



Politechnika  
Wroclawska

**Politechniki Wroclawska**  
**Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego**

(Zał. 5a do procedury Pr 08)



**SPECJALNOŚĆ: KBU**

**MAGISTERSKA**

**PRACA DYPLOMOWA**

**MODELOWANIE NUMERYCZNE STROPÓW  
ŻELBETOWYCH**

**Autor: inż. Jakub Mięka**

**Opiekun: dr inż. Jerzy Szolomicki**

**Recenzent: dr hab. inż. Kazimierz Myślecki, prof. PWr**

Rok akademicki: 2016/ 2017

# Spis treści

<b>1. Wprowadzenie</b> .....	<b>3</b>
1.1. Charakterystyka analizowanego oprogramowania.....	10
1.1.1. ABC Płyta .....	10
1.1.2. Robot Structural Analysis Professional.....	11
1.1.3. Dlubal RFEM .....	11
1.2. Opis analizowanych modeli numerycznych stropów żelbetowych.....	12
1.3. Realizacja pracy.....	13
<b>2. Metoda elementów skończonych</b> .....	<b>13</b>
2.1. Informacje ogólne.....	13
2.2. Kształtowanie elementów skończonych.....	15
<b>3. Rodzaje analizy</b> .....	<b>17</b>
3.1. Analiza liniowa.....	17
3.2. Analiza nieliniowa.....	17
3.2.1. Metoda Newtona- Raphsona .....	19
<b>4. Opis analizowanych modeli</b> .....	<b>21</b>
4.1. Wspólne założenia materiałowe i obliczeniowe .....	22
4.1.1. Klasa konstrukcji.....	22
4.1.2. Klasa ekspozycji.....	22
4.1.3. Klasa betonu i stal zbrojeniowa .....	22
4.1.4. Otulina zbrojenia .....	22
4.1.5. Maksymalna szerokość rozwarcia rysy.....	23
4.1.6. Sprawdzenie ugięć.....	23
4.1.7. Obciążenia .....	23
4.1.8. Płyta dwukierunkowo zbrojona.....	24
4.1.9. Siatka elementów skończonych .....	24
4.1.10. Podsumowanie .....	24
4.2. Opis analizowanych modeli numerycznych stropów żelbetowych.....	25
<b>5. Podparcie na belkach</b> .....	<b>26</b>
5.1. Uwzględnianie wpływu sprężystej podatności belek .....	26
5.2. Modelowanie podciągów .....	27
<b>6. Reologia betonu</b> .....	<b>29</b>
6.1. Pełzanie .....	29
6.2. Skurcz.....	30
6.3. Efekty reologii wg eurokodu .....	32
6.4. Sposoby modelowania reologii .....	32
6.4.1. Pełzanie .....	32
6.4.2. Skurcz.....	33

<b>7. Wyznaczanie zbrojenia</b> .....	<b>38</b>
7.1. ABC Płyta.....	38
7.1.1. Zbrojenie minimalne .....	38
7.1.2. Zbrojenie teoretyczne.....	39
7.1.3. Zbrojenie rzeczywiste .....	39
7.2. Robot Structural Analysis .....	40
7.2.1. Zbrojenie minimalne .....	40
7.2.2. Zbrojenie teoretyczne.....	40
7.2.3. Zbrojenie rzeczywiste .....	42
7.3. Dlubal RFEM .....	43
7.3.1. Zbrojenie minimalne .....	43
7.3.2. Zbrojenie teoretyczne.....	44
7.3.3. Zbrojenie rzeczywiste .....	45
7.4. Wyniki.....	46
7.4.1. Model M1 .....	48
7.4.2. Model M2.....	50
7.4.3. Model M3.....	52
7.4.4. Model M4.....	54
<b>8. Zarysowanie</b> .....	<b>56</b>
8.1. ABC Płyta.....	57
8.2. Robot Structural Analysis .....	59
8.3. Dlubal RFEM .....	60
8.4. Wyniki .....	62
8.4.1. Model M1 .....	64
8.4.2. Model M2.....	68
8.4.3. Model M3.....	72
8.4.4. Model M4.....	76
<b>9. Ugięcia</b> .....	<b>80</b>
9.1. ABC Płyta.....	81
9.1.1. Metoda sztywności obszarowej.....	81
9.1.2. Metoda sztywności lokalnej .....	82
9.2. Robot Structural Analysis .....	83
9.2.1. Metoda sztywności zastępczej .....	83
9.2.2. Metoda z aktualizacją sztywności .....	84
9.3. Dlubal RFEM .....	87
9.3.1. RF CONCRETE DEFLECT .....	87
9.3.2. RF CONCRETE NL.....	89
9.4. Wyniki .....	91
9.4.1. Model M1 .....	93
9.4.2. Model M2.....	95
9.4.3. Model M3.....	97
9.4.4. Model M4.....	99
<b>10. Wnioski</b> .....	<b>101</b>
<b>11. BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>105</b>

## ABSTRAKT

W ramach tematu pracy magisterskiej *Modelowanie numerycznie stropów żelbetowych* przeprowadzono analizę porównawczą czterech modeli obliczeniowych stropów żelbetowych, różniących się między sobą geometrią i sposobem podparcia. W pracy skupiono się przede wszystkim na analizie ugięć płyt żelbetowych w stanie zarysowanym, monitorując przy tym stopień wyznaczanego zbrojenia i szerokość rozwarcia rys. Programy badane były pod kątem ich możliwości, niezbędnych w pracy współczesnego inżyniera budownictwa, takich jak modelowanie reologii betonu, wyznaczanie zbrojenia rzeczywistego, zmienność siatki elementów skończonych, uwzględnianie zmiany sztywności przekroju zarysowanego itp. Zwrócono także uwagę na metody obliczeniowe stosowane w oprogramowaniu, w tym możliwość przeprowadzenia analizy nieliniowej (głównie przy nieliniowości materiałowej), aktualizację macierzy sztywności (metoda niesprężysta), czy uwzględnienie ewentualnego usztywnienia betonu przy rozciąganiu. Każdy z modeli obliczany był z uwzględnieniem skurczu oraz bez jego analizowania, co wymagało dodatkowej interpretacji sposobów modelowania reologii betonu przez programy komputerowe.

Ideą przyświecającą autorowi tekstu było przeprowadzenie analizy porównawczej wyników obliczeń w programie najbardziej powszechnym w biurach projektowych oraz na uczelniach w Polsce- *Autodesk Robot Structural Analysis Professional* z innymi dostępnymi programami. W tym celu dobrano dwa dodatkowe systemy o prostszej, w stosunku do oprogramowania Autodesk, budowie- *ABC Płyta* firmy *PRO-SOFT* oraz system znacznie bardziej zaawansowany inżyniersko- *RFEM* firmy *Dlubal Software*.

Przed opracowaniem wyników przeprowadzonych badań, w ramach niniejszej pracy opisano podstawy teoretyczne modelowania numerycznego stropów żelbetowych. W pierwszych dwóch rozdziałach przedstawiono informacje podstawowe dotyczące najbardziej popularnej metody obliczeniowej, jaką jest metoda elementów skończonych oraz opisano główne analizy stosowane przez programy komputerowe- analizę liniową oraz nieliniową. Następnie stosując zalecenia normowe przyjęto wspólne założenia materiałowe i obliczeniowe, takie jak klasa ekspozycji, klasa betonu, otulina zbrojenia, przyjęte maksymalne szerokości rozwarcia rysy, dopuszczalne ugięcia i inne. Wyznaczono także obciążenia, jakie będą musiały przenieść analizowane płyty stropowe. Ze względu na duży wpływ reologii betonu na końcowe wyniki ugięć i zarysowań płyt stropowych poświęcono następny rozdział właśnie tym zagadnieniom, skupiając się głównie na skurczu oraz pełzaniu i sposobach ich modelowania w programach komputerowych, odnosząc się do zaleceń normowych i literaturowych. Po zakończeniu części teoretycznej, w dalszym postępowaniu przedstawiono rezultaty przeprowadzonych badań w zakresie wyznaczania zbrojenia, zarysowania i ugięć, poprzedzając je opisem algorytmów wyznaczania szukanych wartości w każdym z analizowanych programów komputerowych. Skupiono się przy tym głównie na odniesieniach do zapisów normowych oraz różnych metodach obliczeniowych stosowanych przez użyte oprogramowanie. Pracę zamyka podsumowanie uzyskanych wyników oraz wnioski wyciągnięte w trakcie jej realizacji.

Przeprowadzając szereg obliczeń trzema wiodącymi programami komputerowymi, dostępnymi na polskim rynku w biurach projektowych i uczelniach wyższych na terenie całego kraju, jakimi są *Robot Structural Analysis*, *ABC Płyta* oraz *Dlubal RFEM* zauważono wiele problemów wynikających z użytkowania wyżej wymienionych narzędzi. Pomimo oparcia na jednakowej metodzie wyznaczania poszukiwanych wartości- metodzie elementów skończonych (MES), a nawet jednakowym algorytmie iteracyjnym ich określania, a więc przyrostowej metodzie Newtona-Raphsona, uzyskiwane wyniki różnią się od siebie nawet kilkukrotnie. Rezultaty te mogą zaskakiwać tym bardziej, iż przeprowadzone analizy stosowano zgodnie z procedurą opisaną w obowiązujących obecnie normach krajowych – eurokodach.

Jedną z przeszkód, która pojawiła się w trakcie modelowania płyty stropu żelbetowego był sposób opisywania zjawisk reologicznych oraz ich uwzględniania przez różne programy komputerowe. O ile rozpatrywanie wpływu pełzania okazało się zgodny dla wszystkich wykorzystanych narzędzi (polegało na wyznaczeniu współczynnika pełzania, który następnie redukował moduł sprężystości betonu), tak przyjmowanie efektów skurczowych było zdecydowanie różne dla wszystkich trzech programów:

- *ABC Płyta* uwzględnia wpływ skurczu, jednak jedynie przy wyznaczeniu linii ugięcia elementów.
- *Robot Structural Analysis* nie uwzględnia wpływu skurczu przy wymiarowaniu elementów żelbetowych, nawet w zakresie stanu granicznego użytkowności, a jego wpływ w konstrukcjach żelbetowych można przyjmować za równoważny z obniżeniem temperatury o 15°C.
- *Dlubal RFEM* w pełni uwzględnia wpływ skurczu na projektowany element betonowy, zarówno w zakresie analizy liniowej, jak i nieliniowej.

Różnice w wynikach pojawiły się także podczas wyznaczania zbrojenia minimalnego w programach obliczeniowych. Wynikało to z różnej interpretacji zaleceń normowych, gdzie nie sprecyzowano, kiedy dokładnie należy uwzględniać zbrojenie minimalne przy analizowaniu stanu granicznego użytkowności. *ABC Płyta* traktuje, że każde obliczenia numeryczne są analizą dokładną, przy czym *Dlubal RFEM* za takie uważa dopiero te wykonane metodą nieliniową.

Na podstawie przeprowadzonych badań, wielokrotnych obliczeń oraz studiowanej literatury wyciągnięte zostały następujące wnioski:

- Czynnikiem istotnym jest kształtowanie odpowiedniej siatki elementów skończonych. Propozycje nasuwane przez programy często są zbyt dużym przybliżeniem i wymagają skorygowania, choćby w miejscach newralgicznych dla danej konstrukcji, takich jak punkty podporowe, czy przyłożenie sił skupionych. Zaniedbanie tego faktu może skutkować znacznym niedoszacowaniem wartości w miejscach pomiędzy węzłami elementów skończonych, bądź wręcz przeciwnie, przyjęciem zbyt dużego obszaru oddziaływania danego zjawiska.
- Łatwość i intuicyjność modelowania w programach komputerowych umożliwia zrezygnowanie ze schematów uproszczonych, a w zamian wprowadzanie sytuacji zgodnej z rzeczywistością. Dzięki temu jesteśmy w stanie otrzymać wyniki w większym stopniu zbliżone do realnych warunków pracy konstrukcji, a co za tym idzie szukania rozwiązań ekonomicznych.

- W celu wiernego odwzorowania modelu obliczeniowego należy szczególną uwagę poświęcić przyjmowaniu współczynników i założeń materiałowych. Domyślne parametry często nie opisują w sposób wystarczający indywidualnych modeli. Ważne jest, aby przyjąć założenia zgodne z późniejszą realną konstrukcją, dlatego należy odpowiednio dobierać parametry stali, betonu i użytych współczynników, aby uniknąć ewentualnych awarii w przyszłości.
- W przypadku elementów żelbetowych istotne jest także świadome dobieranie zbrojenia rzeczywistego na podstawie wyników potrzebnego stopnia zbrojenia. Rezultaty obliczeń podawane przez programy są minimalnymi ilościami stali niezbędnymi do przeniesienia występujących sił wewnętrznych i spełniającymi warunki stanu granicznego nośności oraz użyteczności. Rolą projektanta jest na ich podstawie dobrać odpowiednie średnice i rozstawy prętów, aby zapewnić zgodność z wynikami, jednocześnie zapewniając jak największą modularność siatki zbrojeniowej. Analizie należy poddać, które miejsca należy wzmocnić, aby bezpodstawnie nie zwiększać stopnia zbrojenia na całości płyty, a jedynie w miejscach newralgicznych.
- Przeprowadzone badania wykazały, że wyjątkowe znaczenie ma odpowiednie kształtowanie reologii betonu. Wpływ skurczu i pełzania ma znaczny wpływ na zarysowanie i ugięcia elementów betonowych. W celu zachowania ustalonych szerokości rozwarcia rysy, czy maksymalnego ugięcia niejednokrotnie należy zwiększyć grubość płyty, bądź dołożyć potrzebne zbrojenie przeciwskurczowe. Przy płytach o dużej rozpiętości można zapewnić swobodę odkształceń poprzez stosowanie odpowiedniego systemu dylatacji. Normowa sugestia kształtowania skurczu jako równomiernego obniżenia temperatury płyty o  $-15^{\circ}\text{C}$  wydaje się znacznym przerysowaniem sytuacji, zwłaszcza, że ma to widoczny wpływ na zarysowanie, ale nieznaczny przy ugięciu. Modelowanie zjawisk reologicznych należy przeprowadzać w sposób indywidualny, aby bezpodstawnie nie zwiększać przyjętego zbrojenia, jedynie ze względu na skurcz, który można łagodzić także poprzez odpowiednią pielęgnację betonu.
- Istotnym czynnikiem wpływającym na jakość obliczeń jest stosowanie algorytmów przybliżonych oraz uproszczonych. Sytuacja ta była wyraźnie widoczna przy stosowaniu metod iteracyjnej i pasmowej w *ABC Płyta* (bądź sprężystej i niesprężystej w programie *Robot*). Wyniki otrzymywane metodą przybliżoną były zdecydowanie większe i można je przyjmować jedynie do oszacowania efektów danego zjawiska, a nie jako wartość obliczeniową i oczekiwaną w rzeczywistości.
- Programy komputerowe wykorzystują analizy liniowe oraz nieliniowe do określania efektów oddziaływań danych czynników. Należy jednak być świadomym różnych rodzajów nieliniowości i posiadać wiedzę, które są wykorzystywane w danym narzędziu. Za przykład może tutaj służyć przyjęty program bazowy *Robot Structural Analysis*, który pomimo zastosowania analizy nieliniowej zwiększył wartości sił wewnętrznych na poziomie 1%. Wynika to faktu, wykorzystania jedynie nieliniowości geometrycznej, która jest spowodowana zmianą kształtu modelu konstrukcji w trakcie wykonywanych obliczeń. Natomiast przy analizie płyt żelbetowych decydujący wpływ ma tutaj nieliniowość materiałowa uwzględniająca zachowania konkretnych materiałów podczas ich obciążania.

Wpływ zastosowania analizy nieliniowej uwidocznił się dzięki programowi *Dlubal RFEM* i jego modułom *RF CONCRETE DEFLECT* oraz *RF CONCRETE NL*, który jako jedyny z analizowanych programów posiadał algorytmy w pełni wykorzystujące analizę nieliniową (także z uwzględnieniem skurczu). Zastosowanie tego rodzaju analizy powodowało zdecydowanie większe wartości zarysowania oraz inny rozkład i kierunek powstałych rys (rotacyjny model zarysowania konstrukcji). Różnice w stosowanych analizach można zaobserwować także przy wyznaczaniu ugięć, gdzie przy rozpatrywaniu nieliniowości otrzymywano wyniki mniejsze, ze względu na uwzględnienie usztywnienia przy rozciąganiu z resztkową wytrzymałością betonu.

## SUMMARY

Within the subject of the Master Thesis “*Numerical modeling of reinforced concrete slabs*” a comparative analysis of four computational models of reinforced concrete floors, differing in geometry and support system, was performed. The work focused on reinforced concrete slab deflection analysis in scratched state, while monitoring the degree of appointed reinforcement and width of the cracks. Different programs were tested for their capabilities needed in the work of modern civil engineer, such as modeling of concrete rheology, determination of real reinforcement, variability of finite elements mesh, consideration of the stiffness change in scratched cross-section, ect. Attention has also been paid to the calculation methods used in the software, including the ability to perform nonlinear analysis (mainly for material nonlinearity), updating of the stiffness matrix (non-elastic method) or considering possible stiffening of concrete in tension. Each model was calculated with respect to shrinkage and without its analysis, which would require an additional interpretation of the modeling methods of concrete rheology by computer programs.

The idea of the Master Thesis author was to carry out a comparative analysis of the calculation results in the most common program in design offices and universities in Poland – *Autodesk Robot Structural Analysis Professional* with results from other available programs. For this purpose, two additional, simpler (with respect to Autodesk software) systems have been selected – *ABC Plyta* from *PRO-SOFT* and much more sophisticated engineering system - *RFEM* from *Dlubal Software*.

Before the elaboration of the research results, theoretical bases of numerical modeling of reinforced concrete floors were described. The first two chapters provide basic information about the most popular computational method – the finite element method – and describe the main analyzes used by computer programs – linear and non-linear analysis. Afterwards, standards were used to determine common material and computational assumptions, such as exposure class, concrete class, reinforcement coverage, maximum crack widths, possible deflections and others. The loads that had to be transferred by the floors have also been determined. Due to the high impact of concrete rheology on the conclusive results of deflection and cracks of the slabs, the next chapter was dedicated to those issues, focusing mainly on shrinkage and creep of the concrete and their modeling methods in computer programs, with reference to normative and literature recommendations. After completion of the theoretical part, the results of the conducted research in matter of reinforcement, cracks and deflections determination were presented, preceded by description of algorithms used for appointment of the values sought in each analyzed computer program. The focus was mainly on references to standard records and different calculation methods used by the software used. Master Thesis closes with a summary of the results and conclusions drawn during its realization.

By carrying out a number of calculation with use of three leading computer programs available on the polish market, at design offices and universities all over the country, such as *Robot Structural Analysis Professional*, *ABC Plyta* and *Dlubal RFEM*, many problems have arisen as a result of using the aforementioned tools. Although based in the same estimation method the sought values – finite element method (FEM) and even the identical iterative algorithm of their definition, which was the increment Newton-Raphson method, obtained results differ even a few times. These results may be surprising, since the analyzes were carried out according to the procedure described in the current national standards – Eurocodes.



One of the obstacles that emerged during the modeling of the reinforced concrete slab was the way of describing the rheological phenomena and their inclusion by various computer programs. While the consideration of the creep effect proved to be consistent across all tools used (it consisted in determining of the creep coefficient, which then reduced the modulus of elasticity of concrete), the adoption of shrinkage effects was significantly different for all three programs:

- *ABC Plyta* considers the effect of the shrinkage, but only when defining the deflection lines of the elements.
- *Robot Structural Analysis* does not consider the shrinkage effect when dimensioning reinforced concrete elements, even within the limit of serviceability, and its effect on reinforced concrete structures can be assumed to be equivalent to a temperature reduction of 15 °C.
- *Dlubal RFEM* fully considers the effect of shrinkage in the design of the concrete element, both in linear and nonlinear analysis.

Differences in results also emerged when determining the minimum reinforcement in computational programs. This was due to the different interpretations of the standards recommendations, where it was not specified when the minimum reinforcement should be considered when analyzing the ultimate limit state. *ABC Plyta* treats that every numerical calculation is an accurate analysis, whereas *Dlubal RFEM* considers such only conducted in nonlinear method.

Based on the research, multiple calculations and literature studied, the following conclusions were drawn:

- A crucial factor is the shaping of the finite element mesh. Proposals suggested by programs are often too approximate and need to be corrected, even in sensitive places of a given structure, such as support points or points of concentrated forces. Neglect to do so may result in significant underestimation of values at the nodes between the finite element nodes, or, on the contrary, the adoption of too large impact area of the effect.
- The simplicity and intuitiveness of computer modeling makes it possible to abandon simplified schemes and instead introduce a situation that is consistent with reality. Thanks to that, we can get results closer to the real working conditions of the construction, and consequently to seek economic solutions.
- To accurately reproduce the computational model, special attention should be paid to the adoption of coefficients and material assumptions. Default parameters often do not adequately describe individual models. It is important to adopt assumptions that are consistent with the later real construction, so the parameters of the steel, concrete and the coefficients used must be appropriately chosen to avoid probable future breakdowns.
- For reinforced concrete elements, it is also important to be aware of the actual reinforcement based on the results of the required reinforcement. The results of the calculations given by the programs are the minimum quantities of steel required to carry the internal forces and meet the conditions of the limit of bearing capacity and serviceability. The designer's role is to select the right diameters and spacing of the rods to ensure consistency with the results, while providing modularity in the reinforcing mesh. The analysis should be given for sites, which should be strengthened, so the

degree of reinforcement will not be increased on the entire slab, but only in sensitive areas.

- The research has shown that it is particularly important to properly shape the rheology of concrete. The effect of shrinkage and creep has a significant effect on the cracking and deflection of the concrete elements. To preserve the specified crack width or maximum deflection, it is necessary to increase the thickness of the slab or to add the necessary anti-shrinkage reinforcement. In wide span slabs, freedom of deformation can be ensured by using a suitable expansion joint system. The normal suggestion of shrinkage shaping as a uniformly lowering of slab temperature by  $-15^{\circ}\text{C}$  seems to be a significant over-interpretation, especially as it has a noticeable impact on the scratch but slightly on deflection. Modeling of rheological phenomena should be carried out individually so as not to increase the adopted reinforcement only because of shrinkage, which can also be mitigated by proper care of the concrete.
- A key factor influencing the quality of calculations is the use of approximate and simplified algorithms. This situation was evident when using iterative and banding methods in *ABC Plyta* (either elastic or non-elastic in *Robot*). The results obtained by the approximation method were considerably larger and can only be used to estimate the effects of a given phenomenon and not as a calculation value and expected in reality.
- Computer programs use linear and non-linear analysis to determine the effects of the factors involved. However, it is important to be aware of the several types of nonlinearity and to have the knowledge that is used in the tool. For example, the accepted *Robot Structural Analysis* base program, which despite the non-linear analysis, has increased the value of internal forces by 1%. This is since only geometric nonlinearity is used, which is due to a change in the shape of the structure model during the calculations. On the other hand, when analyzing reinforced concrete slabs, the material nonlinearity has the crucial influence on the behavior of particular materials during their loading.

The effect of using non-linear analysis was evident through the *Dlubal RFEM* program and its RF modules, *CONCRETE DEFLECT* and *RF CONCRETE NL*, which were the only ones in the analyzed programs to have fully non-linear analysis algorithms (also including shrinkage). The use of this type of analysis resulted in significantly higher scratching values and other distribution and direction of the resulting cracks (rotational scratching pattern). The differences in the applied analyzes can also be observed in the determination of deflections, where the results for the nonlinearity were lesser for the consideration of tensile stiffness with residual concrete strength.