



Politechnika
Wrocławska

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

(Zał. 5a do procedury Pr 08)



SPECJALNOŚĆ: KBU

MAGISTERSKA

PRACA DYPLOMOWA

**Wykorzystanie algorytmów generatywnych do
projektowania konstrukcji stalowych**

Autor: inż. Szymon Saczko

Opiekun: dr inż. Piotr Koziół

Recenzent: dr hab. inż. Dariusz Czepizak, prof. uczelni

Rok akademicki: 2025/2026

Spis treści

1	Streszczenie pracy dyplomowej	3
2	Rozwiązania konstrukcyjne dla przekryć stalowych	4
2.1	Ewolucja topologii stalowych przekryć kopulastych.....	4
2.2	Aspekty statyczne i dystrybucja sił	8
2.3	Systemy węzłowe i technologia wykonania.....	11
3	Podstawy programowania i automatyzacji w środowisku Grasshopper	16
3.1	Projektowanie wizualne w programie Grasshopper	16
3.2	Podstawy programowania i automatyzacji w środowisku Grasshopper	19
3.3	Integracja platform numerycznych i pętla sprzężenia zwrotnego	19
4	Algorytmy generatywne	20
4.1	Teoretyczne podstawy algorytmów ewolucyjnych i genetycznych	20
4.2	Architektura algorytmu genetycznego	21
4.3	Implementacja środowisk parametrycznych w optymalizacji konstrukcji	22
5	Parametryczne kształtowanie i analiza numeryczna geometrii przekrycia	24
5.1	Założenia projektowe	24
5.2	Budowa parametrycznego modelu geometrycznego w środowisku Grasshopper ...	25
5.2.1	Siatka typu Lamella równoległe.....	25
5.2.2	Siatka trójdrożna	30
5.2.3	Siatka geodezyjna.....	35
5.3	Budowa modelu obliczeniowego Karamba3D.....	40
5.4	Wyniki optymalizacji generatywnej.....	42
6	Obliczenia statyczno-wytrzymałościowe i wymiarowanie konstrukcji	48
6.1	Porównanie wykresów sił osiowych	48
6.2	Analiza stateczności	50
6.3	Analiza modalna.....	52
6.4	Wymiarowanie konstrukcji w RFEM6	53
6.5	Analiza wyężenia węzła.....	56
7	Wnioski	68
8	Literatura	69
9	Załączniki	70

1 Streszczenie pracy dyplomowej

Niniejsza praca dyplomowa magisterska jest poświęcona interdyscyplinarnemu zagadnieniu integracji nowoczesnych algorytmów generatywnych oraz zaawansowanych technik modelowania parametrycznego z inżynierską analizą statyczno-wytrzymałościową wielkorozpiętościowych stalowych przekryć strukturalnych. Głównym celem badawczym i aplikacyjnym opracowania było stworzenie spójnego, zautomatyzowanego środowiska projektowego, które pozwala na jednoczesne generowanie, optymalizację geometryczno-materiałową oraz pełną weryfikację strukturalną powłokowych konstrukcji sferycznych poddanych normowym obciążeniom klimatycznym. W części teoretycznej pracy dokonano szczegółowego studiów literaturowych w zakresie ewolucji topologii stalowych przekryć kopulastych, analizując dystrybucję sił wewnętrznych, mechanikę pracy powłokowej oraz nowoczesne technologie systemów węzłowych stosowane w architekturze form swobodnych. Równolegle scharakteryzowano podstawy matematyczne projektowania algorytmicznego oraz automatyzacji w środowisku graficznego programowania Grasshopper będącego integralną częścią oprogramowania Rhinoceros 3, ze szczególnym uwzględnieniem wykorzystania języka skryptowego Python do precyzyjnej manipulacji macierzami transformacji i punktami węzłowymi siatek geometrycznych. Część badawcza i projektowa bazuje na konkretnych założeniach inżynierskich dla wielkoprzestrzennej kopuły nad obiektem sportowym zlokalizowanym w Gostyniu I strefa obciążenia śniegiem i wiatrem wg Eurokodów. Konstrukcja charakteryzuje się średnicą podstawy wynoszącą 50 m oraz strzałką wzniesienia wysokością równą 10 m. W środowisku Grasshopper wybudowano autorskie skrypty Python generujące trzy odmienne typy siatek prętowych: siatkę typu Lamella równoległą, siatkę trójdrożną oraz siatkę geodezyjną. Następnie zaimplementowano model obliczeniowy w środowisku wtyczki Karamba3D, co umożliwiło przeprowadzenie automatycznej optymalizacji iteracyjnej przekrojów prętów wykorzystując profile zamknięte SHS w odniesieniu do kryteriów Stanu Granicznego Nośności oraz Użytkowości. Analiza porównawcza wykazała najwyższą wydajność strukturalną oraz najbardziej równomierny, pasmowy rozkład wyteżeń dla kopuły typu Lamella, co wynika z idealnego wpisywania się jej ciągłych żeber południkowych i pierścieni w naturalny przepływ sił w powłoce sferycznej poddanej obciążeniom grawitacyjnym. W celu pełnej weryfikacji i walidacji wyników, model optymalnej kopuły typu Lamella został przeniesiony poprzez interfejs API do profesjonalnego programu numerycznego metod elementów skończonych Dlubal RFEM 6. Przeprowadzona w nim zaawansowana analiza statyczna potwierdziła poprawność ścieżek przesyłu sił osiowych uzyskanych w Karamba3D. Praca udowadnia, że nowoczesne algorytmy parametryczne stanowią potężne narzędzie w rękach inżyniera.

Kluczowe słowa: optymalizacja, algorytm, kopuła, konstrukcja, siatka

2 Rozwiązania konstrukcyjne dla przekryć stalowych

2.1 Ewolucja topologii stalowych przekryć kopulastych

Kopuły od zarania dziejów stanowiły jedną z najbardziej fascynujących i efektywnych form architektoniczno-konstrukcyjnych, pozwalających na przekrywanie wielkich przestrzeni bez użycia podpór wewnętrznych. Historycznie, począwszy od rzymskiego Panteonu czy renesansowej kopuły katedry we Florencji, konstrukcje te opierały się na ciągłych powłokach murowych. Z uwagi na specyfikę materiału, ich stateczność zależała od masywności i zdolności do przenoszenia wyłącznie naprężeń ściskających [27].

Przełom nastąpił w XIX wieku, wraz z rewolucją przemysłową i wprowadzeniem do budownictwa żeliwa, a następnie stali. Zastosowanie materiałów o wysokiej wytrzymałości zarówno na ściskanie, jak i rozciąganie, pozwoliło inżynierom na dyskretyzację ciągłej powłoki [3]. Masywne sklepienia zastąpiono lekkimi, ażurowymi siatkami prętowymi. To przejście od ciągłości do siatki wymusiło rozwój nowych topologii, geometrycznych układów prętów i węzłów, które decydują o sposobie dystrybucji sił wewnętrznych, sztywności układu oraz kosztach produkcji. Ewolucja topologii stalowych kopuł siatkowych przebiegała przez kilka kluczowych etapów, z których każdy stanowił odpowiedź na problemy poprzedników. Ewolucja metalowych przekryć rozpoczęła się jeszcze przed wynalezieniem przemysłowej stali, z użyciem żeliwa i żelaza kutego. Już w latach 1807-1811 w Paryżu wzniesiono 40-metrową żeliwną kopułę nad halą targową, a w zbliżonym czasie (1806-1811) kopułą z kutego żelaza przykryto katedrę Kazańską w Sankt Petersburgu. W pierwszej połowie XIX w. powstawały kolejne takie struktury m.in. w Wielkiej Brytanii, Wiedniu czy Moguncji [15].



Rys. 1. Kopuła La Bourse, Paryż, 1811 r.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:D%C3%B4me_Bourse_du_Commerce.JPG

Prawdziwa epoka konstrukcji żelaznych, a w konsekwencji stalowych w budownictwie kubaturowym rozpoczęła się wraz z wzniesieniem w Londynie słynnego Crystal Palace przez Josepha Paxtona na wielką wystawę światową w Londynie w 1851 roku, to jeden z absolutnie najważniejszych kamieni milowych w historii inżynierii budowlanej i architektury.

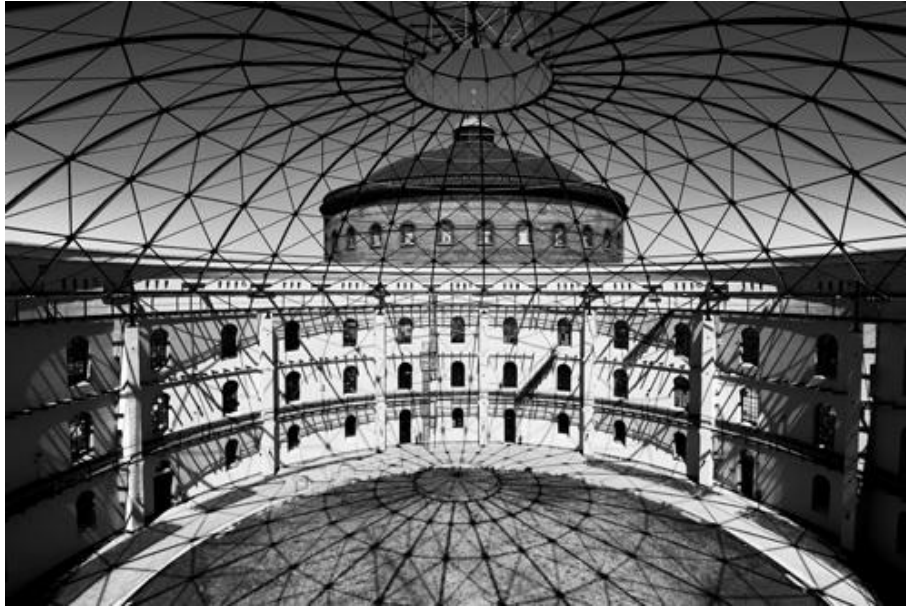
Choć nie była to kopuła, to obiekt ten zrewolucjonizował myślenie o konstrukcjach stalowo-szklanych i utorował drogę dla wszystkich wielkoprzestrzennych przekryć siatkowych, które rozwinęły się w kolejnych dekadach. Crystal Palace był pierwszym na świecie budynkiem wzniesionym w całości na tak gigantyczną skalę z prefabrykowanych elementów. Obiekt miał imponujące wymiary: 564 metry długości, 138 metrów szerokości i ponad 33 metry wysokości w najwyższym punkcie. Cała konstrukcja opierała się na powtarzalnym module geometrycznym wynoszącym 7,3 m, co wynikało z maksymalnej długości tafli szkła, jaką ówczesny przemysł był w stanie wyprodukować. Budynek powstał z seryjnie produkowanych żeliwnych słupów, kutych dźwigarów oraz identycznych tafli szkła. Dzięki temu cały ten gigantyczny obiekt wzniesiono w niewiarygodnym tempie, zaledwie w 9 miesięcy [3], [35].



Rys. 2. The Crystal Palace, Londyn, 1854 r.

<https://www.archdaily.com/397949/ad-classic-the-crystal-palace-joseph-paxton/51d5776db3fc4b5834000230-ad-classic-the-crystal-palace-joseph-paxton-image>

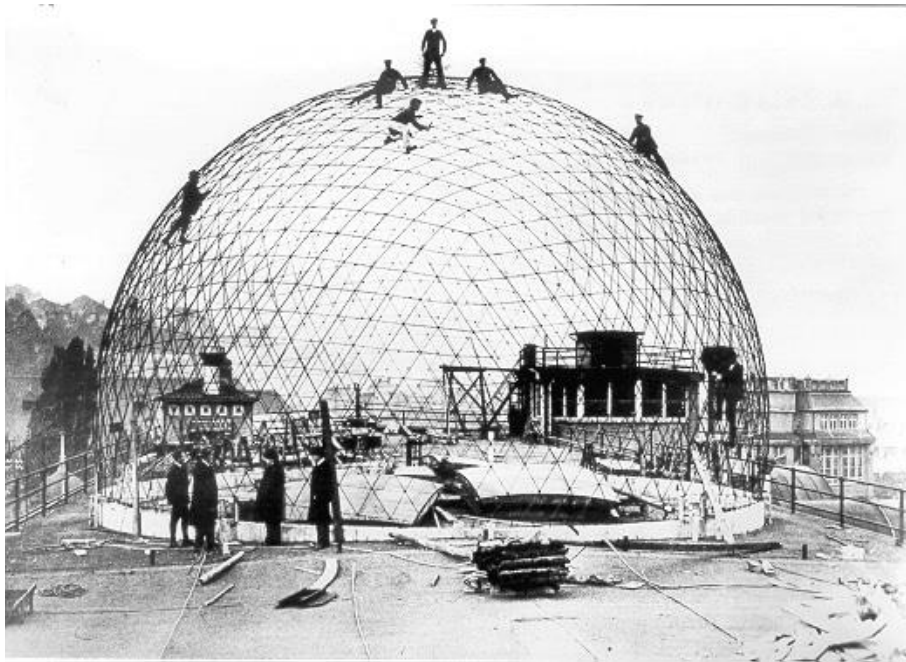
Początkowo kopuły z żelaza opierały się na promienistym układzie masywnych żebier pracujących na zginanie. Kluczowym krokiem naprzód było wprowadzenie w 1863 r. przez niemieckiego inżyniera Johanna Wilhelma Schwedlera sztywnych węzłów i dodatkowych prętów ukośnych [24]. Ten zabieg sprawił, że główna część obciążeń zaczęła być przenoszona poprzez siły ściskające i rozciągające na powierzchni, co dało początek nowoczesnym kopułom siatkowym. Kopuła Schwedlera była pierwszą prawdziwie przestrzenną kratownicą sferyczną, w której skratowanie pozwalało na przejęcie sił tnących i równomierne rozprowadzenie naprężeń z obciążeń asymetrycznych. Topologia ta stała się standardem w budownictwie przemysłowym przełomu XIX i XX wieku. Zbiornik Gazu w Lipsku, jeden z największych ówczesnych zbiorników gazu, którego stalowe przekrycie stanowiła potężna, czysta kopuła Schwedlera o rozpiętości około 50 metrów. Pokazała ona wyższość tego układu nad zwykłymi kopułami żebrowymi, wytrzymując ekstremalne, niesymetryczne obciążenia wiatrem [32].



Rys. 3. Gasometer Leipzig, Lipsk, 1885 r.

https://www.leipzig-im.de/images/bilder/Arena-am-Panometer_schwarz_weiss_Favorit_Fotograf-Stefan-Atlas.jpg

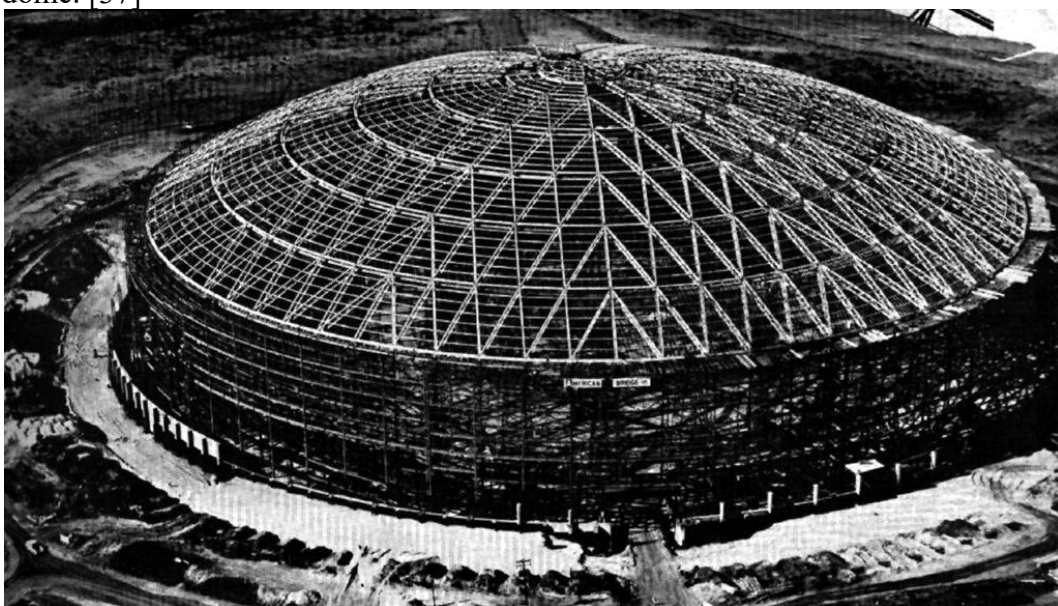
Kopuły geodezyjne oparte na podziale dwudziestościanu foremego, co pozwala na aproksymację sfery za pomocą trójkątów. Mają najwyższy stosunek przykrytej kubatury do zużycia materiału. Choć przy małych rozpiętościach składają się z niewielkiej liczby unikalnych prętów, to jednak wraz ze wzrostem wielkości kopuły drastycznie rośnie liczba różnych elementów. Dodatkowo wprowadzanie w ich trójkątną siatkę klasycznych prostokątnych okien czy drzwi bywa bardzo kłopotliwe z punktu widzenia wykonawczego. Kopuły geodezyjne charakteryzują się niezwykle małym zużyciem materiału konstrukcyjnego na jednostkę przekrywanej powierzchni. Choć teoretyczne założenia jej popularyzatora, R.B. Fullera, mówiące o $0,35 \text{ kg/m}^2$ są trudne do osiągnięcia, to w praktyce zużycie na poziomie kilku kilogramów na metr kwadratowy nadal czyni je kilkukrotnie lżejszymi od standardowych przekryć stalowych [3].



Rys. 4. Pierwsza kopuła geodezyjna Carl Zeiss Jena, Bauersfeld, 1923r.

https://encrypted-tbn2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRP3t3z332Skf1gIS9hr7SO1IsHQysFUu_4jo3ZPOs_OHo21H6cp

Inżynier G.R. Kiewitt zaproponował topologię łączącą zalety siatek trójdrożnych z powtarzalnością produkcyjną. Kupuła Kiewitta dzieli rzut sfery na trójkątne sektory zbiegające się w kluczu, a każdy z sektorów wypełniany jest regularną, trójdrożną siatką wewnętrzną. Układ ten do dziś uchodzi za jeden z najbardziej zrównoważonych kompromisów pomiędzy nośnością a ekonomią wykonania. W wariancie równoległym, powierzchnia sfery dzielona jest na symetryczne sektory, a pręty biegną w nich równolegle do głównych krawędzi podziału. Pozwoliło to na ujednolicenie długości elementów i wyeliminowanie skomplikowanego węzła wierzchołkowego, co znalazło zastosowanie w tak monumentalnych obiektach jak Houston Astrodome. [37]



Rys. 5. Houston Astrodome, Houston, 1965 r.

<https://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/HOUSTON/h-unusua.html>

W przypadku w pełni stalowych przekryć o siatce trójdrożnej, konstrukcje te rozwinęły się najdynamiczniej w drugiej połowie XX wieku. Stało się to możliwe dzięki wprowadzeniu zaawansowanych systemów węzłowych, takich jak niemiecki system *MERO*, które pozwoliły na precyzyjne łączenie w jednym punkcie sześciu prętów zbiegających się w trzech różnych kierunkach. Kopuła pawilonu Poliedro de Caracas, kultowy obiekt widowiskowo-sportowy, będący czystą, podręcznikową realizacją stalowej kopuły geodezyjnej o siatce trójdrożnej. Średnica kopuły wynosi 143 metry. Konstrukcja została zaprojektowana przy współpracy z biurem Buckminstera Fullera. Jest to jednowarstwowa siatka ze stalowych rur o wysokiej wytrzymałości, połączonych w układzie trójdrożnych trójkątów sferycznych. Obiekt ten udowodnił, że dzięki topologii trójdrożnej można przekryć gigantyczną przestrzeń strukturą o niezwykle małej masie własnej w stosunku do powierzchni. [30]



Rys. 6. Kopuła pawilonu Poliedro de Caracas, Wenezuela, 1974 r.

<https://en.granma.cu/mundo/2020-08-07/the-largest-field-hospital-in-venezuelan-history-can-count-on-cubas-solidarity>

Współcześnie, dzięki gwałtownemu rozwojowi komputerowych metod wspomagania projektowania CAD, inżynierii parametrycznej oraz Metody Elementów Skończonych (MES), poszukiwanie idealnej topologii nie ogranicza się już do sztywnych, historycznych rygorów. Algorytmy generatywne pozwalają na swobodne kształtowanie dowolnych powierzchni oraz automatyczną optymalizację przekrojów i długości elementów, co otwiera zupełnie nowy rozdział w historii inżynierii przekryć wielkoprzestrzennych.

2.2 Aspekty statyczne i dystrybucja sił

Choć idealny model teoretyczny kopuły siatkowej zakłada pracę opartą wyłącznie na siłach osiowych, w rzeczywistych konstrukcjach niemal zawsze pojawiają się niekorzystne momenty zginające. Wynika to z faktu, że realne obciążenia oraz niedoskonałości wykonawcze odchylają ustrój od teoretycznego stanu błonowego, w którym powinny przeważać siły rozciągające i ściskające. Pełna realizacja bezmomentowego efektu membrany w warunkach inżynierskich jest niemożliwa, przede wszystkim ze względu na występowanie zaburzeń brzegowych. W strefach tych optymalny przepływ sił zostaje przerwany, co generuje znaczące zginanie i często wymusza stosowanie sztywnych dźwigarów brzegowych lub lokalne przejście na konstrukcję dwuwarstwową [27]. Dodatkowo kopuły prętowe, jako struktury wrażliwe na zmienne obciążenia dynamiczne, wykazują dużą wrażliwość na niestateczność globalną układu, objawiającą się tzw. przeskokiem węzła. Aby zapobiec temu zjawisku i drastycznie zwiększyć

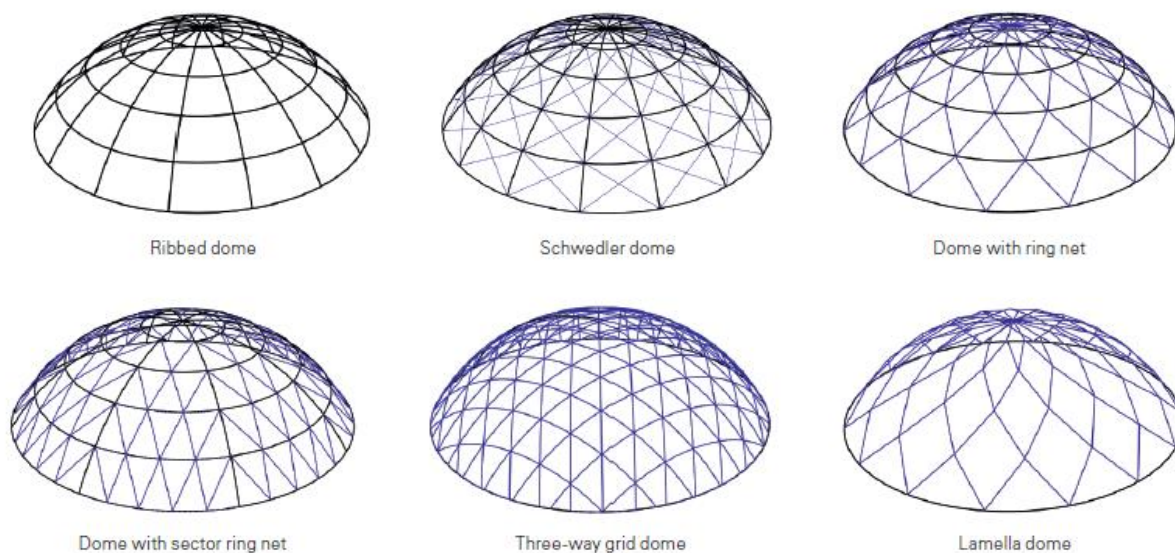
szttywność jednowarstwowej powłoki, konieczne staje się zastosowanie sztywnych węzłów. Fundamentalną konsekwencją tego zabiegu jest jednak odejście od idealnego modelu przegubowej kratownicy przestrzennej sztywno połączone pręty muszą wówczas przejmować siły gnące wynikające bezpośrednio z deformacji całej powłoki [3].

Oprócz czynników globalnych, na powstawanie momentów zginających wpływają bezpośrednio uwarunkowania wykonawcze oraz sposób aplikacji obciążeń. Zgodnie z zasadami mechaniki budowli, czysto osiowy stan pracy wymaga bezmimośrodowych połączeń węzłowych oraz eliminacji obciążeń przyłożonych międzywęzłowo. W praktyce inżynierskiej rzeczywiste elementy zawsze charakteryzują się jednak imperfekcjami geometrycznymi, takimi jak brak idealnej prostoliniowości osi prętów czy wymuszone wstępne mimośrodowe w węzłach. Kumulacja tych początkowych niedoskonałości oraz odchylenia struktury od idealnej powierzchni sprawiają, że pręty ściskane od samego początku swojej pracy podlegają dodatkowemu zginaniu. Z tego względu współczesna analiza jednowarstwowych kopuł siatkowych musi traktować je jako przestrzenne układy ramowe, integralnie uwzględniające współpracę sił osiowych z nieuniknionymi momentami gnącymi. Te uwarunkowania konstrukcyjne bezpośrednio determinują ograniczenia geometryczne oraz gabaryty struktur przestrzennych. Siatkowe powłoki jednowarstwowe zaleca się projektować dla średnic nieprzekraczających 60 metrów powyżej tej granicy, ze względów bezpieczeństwa i zachowania odpowiedniej sztywności, rekomenduje się stosowanie powłok dwuwarstwowych. Szacuje się, że grubość konstrukcji dwuwarstwowej powinna wynosić od 1/30 do 1/60 jej rozpiętości, a przy bardzo dużych średnicach wartość ta może dochodzić do 1/100 rozpiętości [3]. Choć kształt geometryczny powierzchni bazowej w obu wariantach może być identyczny, rozwiązania detali połączeń są skrajnie odmienne. Układy jednowarstwowe konstruuje się ze sztywnymi węzłami co zapobiega wspomnianym przeskokom struktury. Z kolei w powłokach dwuwarstwowych stosuje się osiowo proste kratownice, co pozwala na uproszczenie połączeń węzłowych do łatwiejszych w obliczeniach przegubów. Wybór ten opiera się na kompromisie, powłoki jednowarstwowe zużywają mniej materiału prętowego, lecz wymagają skomplikowanych i ciężkich węzłów oraz idealnego doboru powierzchni bazowej, pod wezwaniem ryzyka, że znaczące zginanie lub zaburzenia brzegowe wymuszą zastosowanie ciężkich dźwigarów. Z kolei konstrukcje dwuwarstwowe, choć bardziej materiałochłonne pozwalają na znaczne uproszczenie samych połączeń [27].

Równie istotna dla optymalizacji zużycia materiału i zachowania nośności membrany jest wyniosłość kopuły, czyli stosunek strzałki wyniesienia do średnicy. W ogólnej praktyce inżynierskiej przedział ten jest bardzo szeroki - od 1/7 dla kopuł spłaszczonych, aż do 3/4 dla obiektów wysoce wyniosłych. Jednakże rygorystyczne analizy wskazują, że optymalny stosunek wysokości do średnicy zapewniający minimalne zużycie stali wynosi około 0,3, a bezpieczny i ekonomiczny zakres dla lekkich konstrukcji zamyka się w granicach od 0,14 do 0,50. Wartość 0,14 stanowi przy tym krytyczną dolną granicę opłacalności: dalsze spłaszczanie kopuły lub siatkowego sklepienia beczkowego wywołuje gwałtowny wzrost masy konstrukcji oraz drastycznie podnosi ryzyko globalnej utraty stateczności powłoki. Zbyt płaskie struktury tracą bowiem swój powłokowy charakter oparty na siłach osiowych i zaczynają zachowywać się jak makroskopowe układy poddane czystemu zginaniu [3].

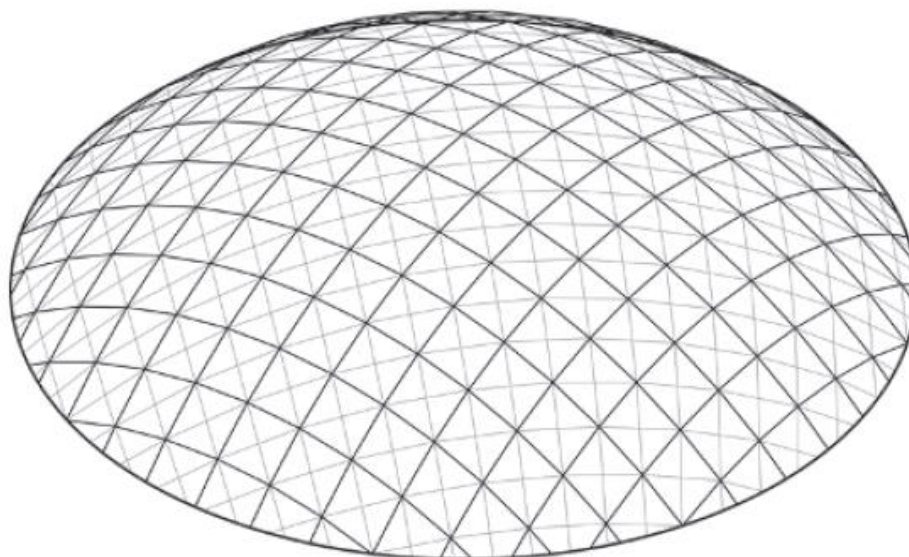
Aby skutecznie zredukować momenty zginające i zbliżyć ustrój do bezmomentowego stanu błonowego, kluczowe jest zapewnienie konstrukcji odpowiedniej sztywności geometrycznej, która ograniczy ugięcia prętów. Podstawowym warunkiem pozwalającym na przenoszenie sił wyłącznie w płaszczyźnie jednowarstwowej powłoki jest zastosowanie siatki o oczkach trójkątnych. Przykładowo siatki czworokątne łatwo ulegają deformacji, dlatego historycznie w kopułach żebrowych usztywniano je cienkimi prętami ukośnymi, tworząc w ten sposób stabilne, struktury powłokowe oparte na trójkątach. Wśród współczesnych topologii jednymi z najsukuteczniejszych w minimalizowaniu zginania są siatki trójdrożne. Dzięki ułożeniu prętów

w trzech kierunkach zapewniają one równomierny rozkład naprężeń i generują znacznie mniejsze ugięcia przy wystąpieniu niekorzystnych obciążeń niesymetrycznych w porównaniu do innych układów. Podobną funkcję pełnią siatki Schwedlera, w których wprowadzenie prętów ukośnych do pierwotnie trapezowych oczek tworzy sztywne wykratowanie trójkątne lub krzyżowe, co drastycznie zwiększa odporność na asymetryczne siły zewnętrzne i chroni węzły przed utratą stateczności [25].



Rys. 7. Rodzaje topologii siatki na planie kopuły [27]

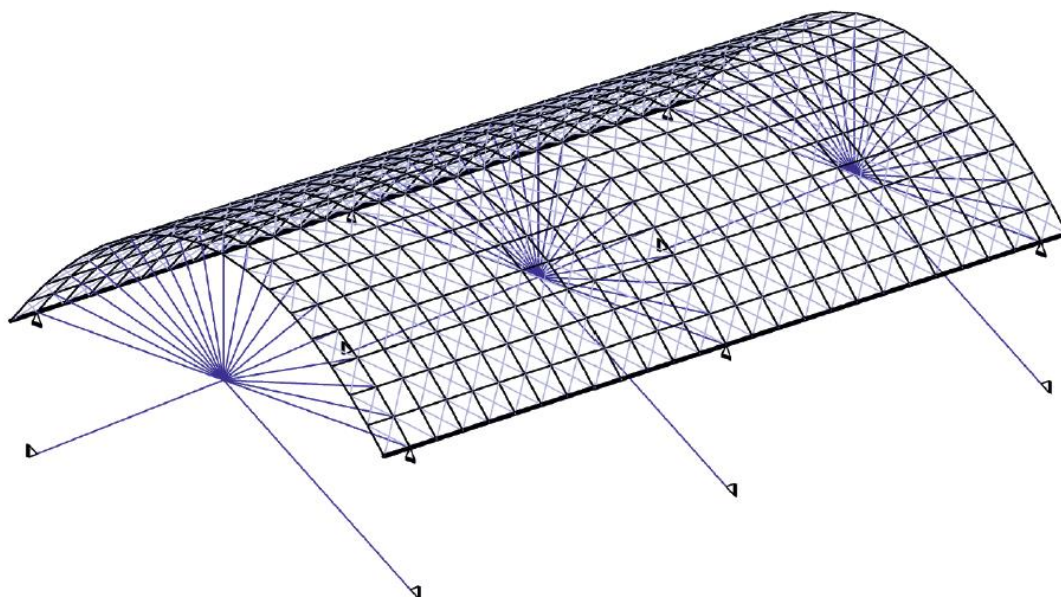
Alternatywnym rozwiązaniem jest transformowanie gładkich siatek czworokątnych w sztywne powłoki poprzez stężenie ich po przekątnych wstępnie sprężonymi cięgnami krzyżowymi, które skutecznie blokują możliwość deformacji oczek [27].



Rys. 8. Czworokątna siatka z cięgnami krzyżowymi [27]

W przypadku sklepień beczkowych opartych na siatce czworokątnej skutecznym sposobem na redukcję zginania na obrzeżach jest także zastosowanie stężeń cięgnowych na jego końcach. Warto pamiętać, że ograniczenie momentów zginających zależy nie tylko od samej topologii

siatki, ale również od globalnej geometrii konstrukcji przykładowo, nadanie sklepieniom beczkowym parabolicznego kształtu przekroju pozwala na przenoszenie symetrycznych obciążeń pionowych niemal wyłącznie za pomocą sił ściskających błony, naturalnie eliminując efekty zginania [15].



Rys. 9. Sklepienie beczkowe z zastosowaniem stężeń cięgowych na jego końcach [27]

2.3 Systemy węzłowe i technologia wykonania

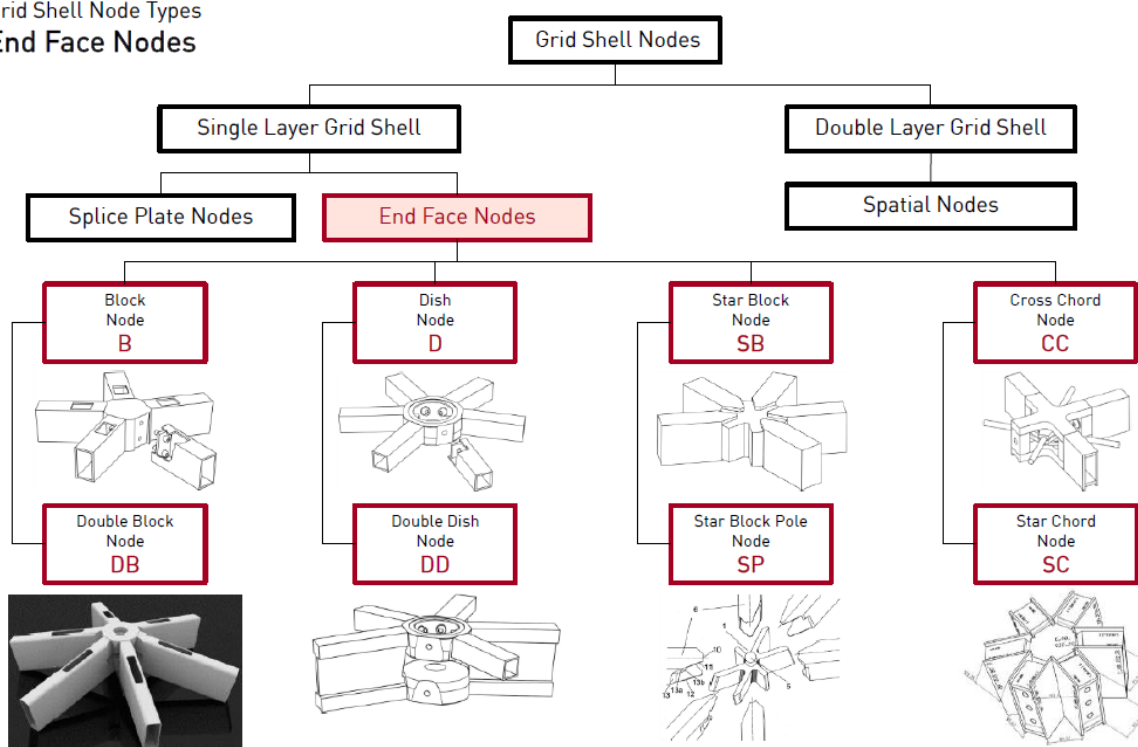
Przekrycia strukturalne oraz prętowe powłoki siatkowe reprezentują wysoce zaawansowane przestrzenne układy konstrukcyjne, w których tradycyjny podział na elementy główne i drugorzędne zostaje całkowicie zatarty. W przeciwieństwie do klasycznych, płaskich układów dwuwymiarowych, w których występuje wyraźna i sekwencyjna ścieżka przekazywania sił wewnętrznych, struktury przestrzenne 3D charakteryzują się globalną współpracą wszystkich komponentów. Układy te są wielokrotnie statycznie niewyznaczalne i wykazują zdolność do redystrybucji sił i momentów, która jest ściśle zależna od lokalnej sztywności oraz orientacji geometrycznej poszczególnych prętów tworzących strukturę. Sercem i kluczowym elementem warunkującym poprawność pracy mechanicznej oraz bezpieczeństwo całego ustroju przestrzennego są węzły, które muszą bezwzględnie sprostać wymaganiom zarówno w sferze wytrzymałościowej, jak i montażowej. W jednowarstwowych przekryciach siatkowych, charakteryzujących się brakiem dodatkowej warstwy konstrukcyjnej zapewniającej ramię sił wewnętrznych, połączenia węzłowe muszą przenosić pełne spektrum obciążeń. Z perspektywy mechanicznej i technologicznej kluczowy podział sztywnych węzłów w tego typu ustrojach opiera się na sposobie transferu tych sił oraz orientacji łączników względem osi podłużnej elementów, co pozwala wyróżnić połączenia doczołowe oraz połączenia zakładkowe [2], [9], [16], [21]

W jednowarstwowych przekryciach siatkowych, połączenia węzłowe muszą przenosić pełne spektrum obciążeń. Z perspektywy mechanicznej i technologicznej kluczowy podział sztywnych węzłów w tego typu ustrojach opiera się na sposobie transferu tych sił oraz orientacji łączników względem osi podłużnej elementów, co pozwala wyróżnić połączenia doczołowe oraz połączenia zakładkowe [27].

Połączenia doczołowe charakteryzują się bezpośrednim przyleganiem płaszczyzny czołowej pręta, wyposażonej zazwyczaj w zespawaną blachę czołową, do odpowiednio przygotowanej

powierzchni centralnego rdzenia węzła, przy czym łączniki śrubowe wysokiej wytrzymałości są zorientowane równolegle do osi podłużnej elementu. W układzie tym siła osiowa ściskająca oraz strefy ściskane wywołane momentem zginającym są przekazywane przez bezpośredni docisk powierzchniowy czoła pręta do rdzenia, natomiast siły rozciągające i strefy rozciągane przy zginaniu generują czyste rozciąganie śrub łączących. Główną zaletą strukturalną tego wariantu jest zapewnienie bardzo wysokiej sztywności obrotowej, co skutecznie chroni wiotką powłokę jednowarstwową przed utratą stateczności węzłowej i zjawiskiem przeskoku węzła. Dodatkowo rozwiązania te charakteryzują się wysokimi walorami estetycznymi ze względu na możliwość kompaktowego rozmieszczenia lub całkowitego ukrycia łączników wewnątrz profili. Istotną wadą tego podejścia jest jednak konieczność zachowania milimetrowej precyzji podczas docinania i frezowania elementów w zakładzie prefabrykacji, ponieważ wszelkie odchyłki kątowe drastycznie redukują powierzchnię styku, inicjując szkodliwe mimośrodowość i lokalną koncentrację naprężeń. Wszelkie szczeliny montażowe uniemożliwiające poprawną pracę na docisk muszą być niwelowane poprzez stosowanie podkładek dystansowych [2], [17], [26].

Grid Shell Node Types
End Face Nodes

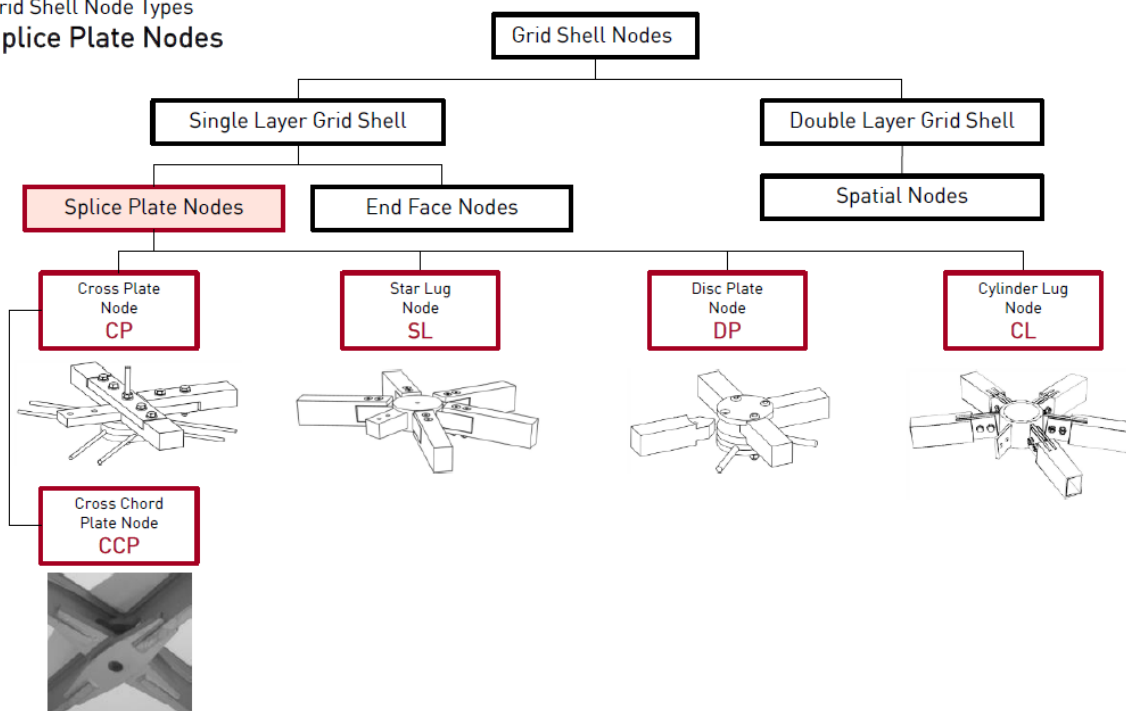


Rys. 10. Warianty węzłów łączonych doczołowo Novum [17]

Alternatywnym rozwiązaniem są połączenia tnące, w których końcówki prętów zachodzą zakładkowo na zintegrowane ramiona lub blachy łącznikowe wyprowadzone z rdzenia węzła, a łączniki w postaci pasowanych sworzni, trzpieni lub śrub pasowanych są usytuowane prostopadle do osi podłużnej pręta. W tym przypadku zarówno siły osiowe, poprzeczne, jak i momenty zginające są transformowane na elementy łączące, które pracują na ścinanie oraz na docisk do ścianek otworów w blachach węzłowych i prętach, przy czym moment zginający przenoszony jest przez parę sił ścinających działających na ramieniu wyznaczonym przez rozstaw łączników. Do zasadniczych zalet tego typu połączeń należy znakomita nośność przy przenoszeniu znacznych sił osiowych i ścinających, a także ułatwione fizyczne naprowadzanie elementów za pomocą żurawi, ponieważ pręt geometrycznie wsuwa się w ramiona węzła, co istotnie przyspiesza proces wstępnego scalania struktury na budowie. Wadą pozostaje jednak konieczność utrzymania ekstremalnie rygorystycznych tolerancji wykonania otworów

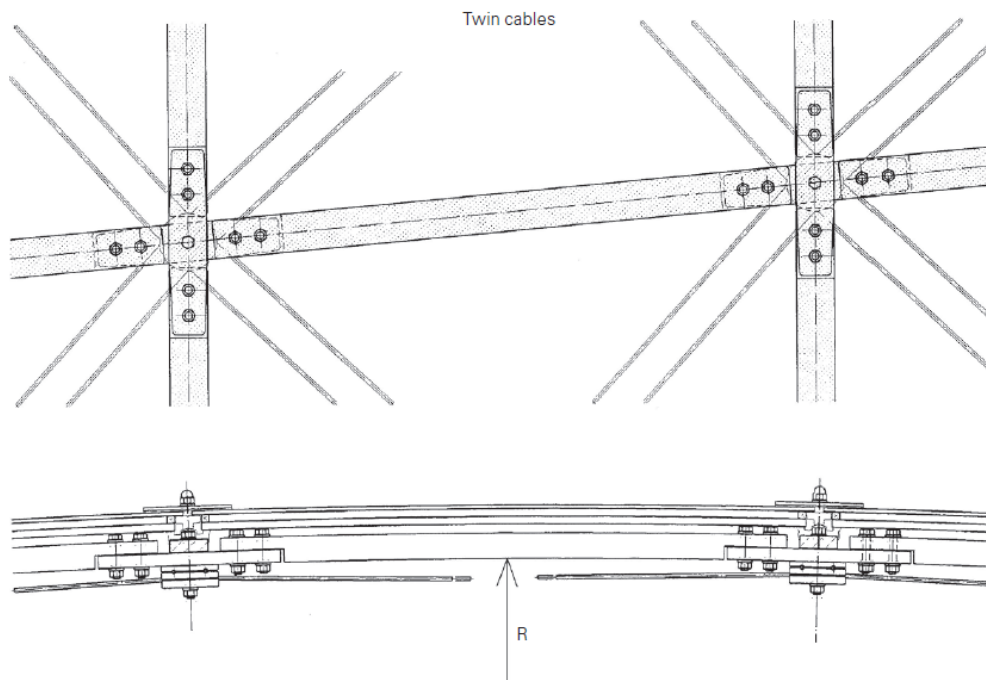
sworzniowych, gdyż ryzyko poślizgu w połączeniu może prowadzić do niekontrolowanych deformacji i obniżenia globalnej sztywności powłoki jednowarstwowej. Sztywne węzły tnące uniemożliwiają płynną regulację pozycji elementu bezpośrednio w punkcie połączenia, przez co skumulowane zniekształcenia oczka sieci sprawiają, że otwory nie pokrywają się, uniemożliwiając poprawne wprowadzenie łącznika. W przypadku wystąpienia takich odchyłek procedura naprawcza opiera się na rektyfikacji mechanicznej, polegającej na precyzyjnym rozfrezowaniu otworów na budowie za pomocą wiertarek z podstawą magnetyczną, a następnie montażu specjalnie dorabianych, nadwymiarowych sworzni naprawczych, co pozwala na pełne zamknięcie i zaryglowanie węzła strukturalnego [3], [25], [26].

Grid Shell Node Types
Splice Plate Nodes



Rys. 11. Warianty węzłów łączonych zakładkowo Novum [17]

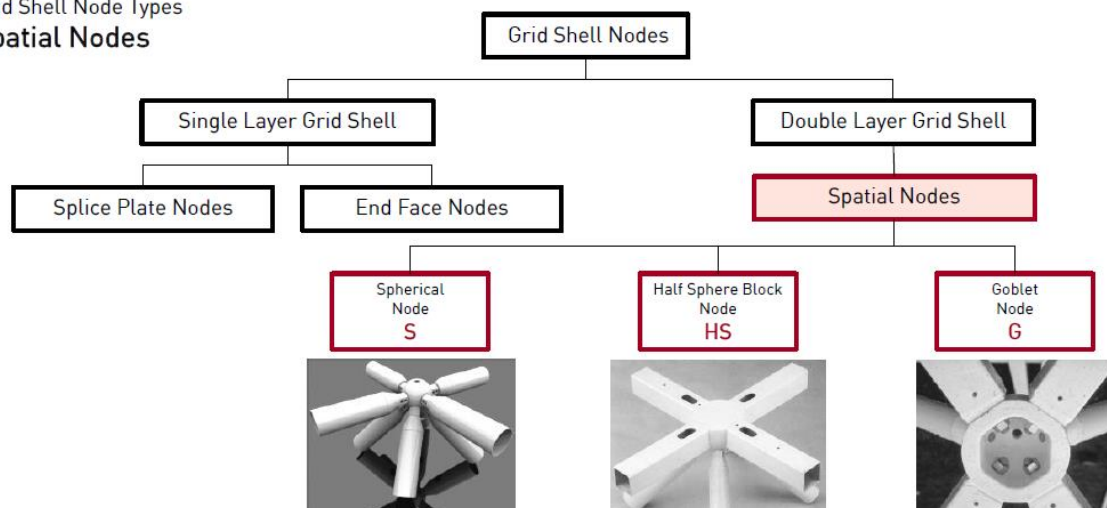
Podstawowa siatka oparta na oczkach czworokątnych wykazuje stosunkowo niską sztywność postaciową i ulega łatwej deformacji polegającej na przesunięciu elementów po powierzchni. Z tego względu w siatkach jednowarstwowych, gdzie stateczność zależy bezpośrednio od sztywności samej powłoki, pełną sztywność powłokową gwarantuje dopiero obligatoryjne wprowadzenie siatki trójkątnej. W tym wariancie istotnym wyzwaniem technologicznym jest fakt, że węzły siatki trójkątnej charakteryzują się wysokim stopniem złożoności, posiadając najczęściej aż 6 ramion o ciągle zmieniających się długościach prętów diagonalnych. Aby wyeliminować konieczność kosztownego i skomplikowanego wykonawczo mierzenia oraz indywidualnej prefabrykacji unikalnych długości pasów ukośnych, we współczesnej praktyce realizacyjnej jako diagonale z powodzeniem stosuje się wstępnie sprężone ciągłe kable bądź ciężna stalowe, mocowane bezpośrednio do węzłów prętowych za pomocą specjalnych zacisków. Rozwiązanie to z jednej strony skutecznie zapewnia wymagane stężenie struktury, z drugiej zaś przynosi bezdyskusyjne i znaczące korzyści ekonomiczne. W układach dwuwarstwowych, dzięki obecności dwóch odrębnych płaszczyzn siatek połączonych krzyżulcami, sztywność giętą wynika z wysokości konstrukcyjnej całego ustroju, co pozwala na obniżenie wymagań dotyczących sztywności obrotowej samych połączeń węzłowych [25], [26].



Rys. 12. Sprężone cięgna krzyżowe [27]

W dwuwarstwowych przekryciach siatkowych specyfika pracy mechanicznej oraz transfer obciążeń różni się diametralnie od układów jednowarstwowych, co bezpośrednio determinuje wymagania stawiane węzłom konstrukcyjnym. Sztywność giętą tego typu przekrycia nie zależy bowiem od sztywności obrotowej pojedynczego połączenia, lecz wynika bezpośrednio z wysokości konstrukcyjnej przestrzennego ustroju, zdefiniowanego przez odległość między płaszczyznami siatki pasa górnego i dolnego. Rozdzielenie pasów za pomocą warstwy krzyżulców pozwala na stosowanie w węzłach połączeń nominalnie przegubowych, co znacząco upraszcza ich formę konstrukcyjną oraz procedury obliczeniowe. Rozwiązania te są szczególnie zalecane i ekonomicznie uzasadnione przy dużych rozpiętościach przekrycia [12].

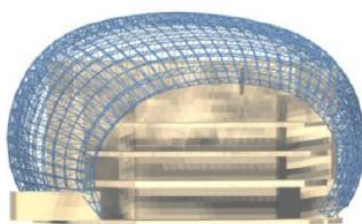
Grid Shell Node Types Spatial Nodes



Rys. 13. Warianty węzłów przegubowych Novum

W praktyce inżynierskiej dominującym rozwiązaniem w tej klasie struktur są systemy oparte na węzłach sferycznych, w których rdzeń stanowi pełna kula stalowa odkuwana matrycowo, wyposażona w nagwintowane otwory zbiegające się precyzyjnie w jej geometrycznym środku. Pręty rurowe dochodzące do węzła posiadają specjalne stożkowe lub cylindryczne końcówki oraz wewnętrzne śruby, których dokręcanie realizowane jest przy użyciu zewnętrznych tulei sześciokątnych. Podstawową zaletą strukturalną tego rozwiązania jest możliwość zbiegania się nawet do 18 prętów w jednym punkcie przestrzeni bez generowania szkodliwych mimośrodków, co gwarantuje czysto przegubową pracę elementów i ogranicza stany naprężeń do sił osiowych minimalizując jednocześnie naprężenia wtórne i upraszczając analizę statyczną. Wadą systemu sferycznego jest jednak kompletny brak zdolności do przenoszenia momentów zginających, co wyklucza jego bezpośrednie użycie w klasycznych powłokach jednowarstwowych. Lokalna rektyfikacja montażowa w tym wariantcie sprowadza się do stopnia wkręcenia śrub w gniazda kuli. [12]

Grid Shell Node Types
Spherical Node S

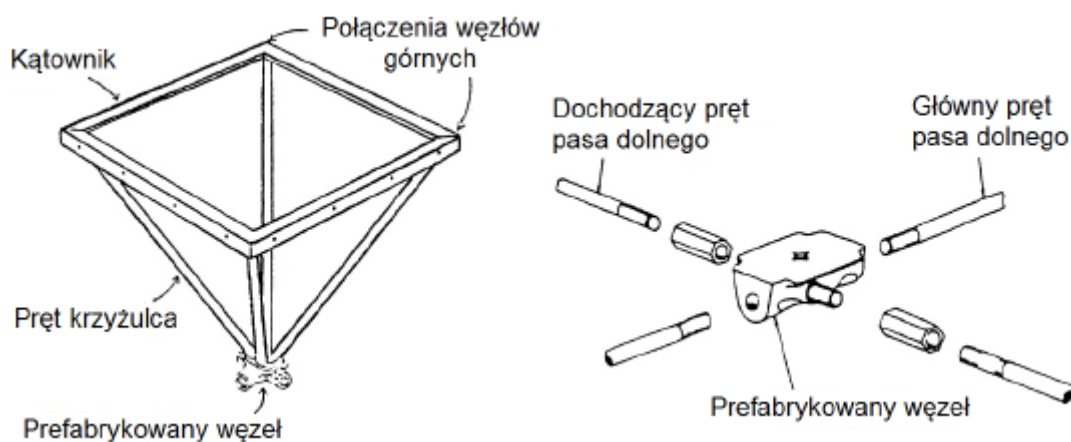


BDP Building Design Partnership: Glasgow Science Center, 3D Cinema, Glasgow, UK
Project Execution: Mero GmbH & Co.KG

Rys. 14. Spherical Node S Novum [17]

Alternatywną koncepcję technologiczną reprezentują systemy piramidowe, oparte na powtarzalnych modułach przestrzennych prefabrykowanych w warunkach warsztatowych. W układach tych pasy górne oraz krzyżulce wznosi się z kształtowników takich jak kątowniki bądź dwuteowniki, natomiast pas dolny formuje się z litych prętów okrągłe o znacznej średnicy. Unikalną cechą i najważniejszą zaletą tego rozwiązania jest wyposażenie elementów pasa dolnego w mechaniczne nakrętki rzymskie, co zapewnia pełną, niezależną możliwość lokalnej rektyfikacji długościowej bezpośrednio na placu budowy. Poprzez obrót nakrętek rzymskich monterzy mogą płynnie regulować długość prętów pasa dolnego, co pozwala nie tylko na efektywne niwelowanie błędów prefabrykacji warsztatowej, ale również na precyzyjne wymuszanie projektowej strzałki odwrotnej przekrycia oraz wprowadzanie kontrolowanego napięcia wstępnego do całego ustroju. System ten wykazuje w efekcie wyjątkowo wysoką tolerancję na trudne warunki montażowe. Do zasadniczych wad konstrukcji piramidowych z nakrętkami rzymskimi należy zaliczyć jednak znaczną masę własną komponentów węzłowych i łącznikowych, a także niski walor estetyczny determinowany przez rozbudowane blachy

węzłowe i widoczne mechanizmy śrubowe, co ogranicza ich stosowanie w obiektach o wysokich wymaganiach architektonicznych. Dodatkowo ustrój ten wykazuje silne ograniczenia topologiczne, przez co jego aplikacja sprowadza się głównie do regularnych, płaskich lub cylindrycznych siatek o układzie ortogonalnym [9], [12].



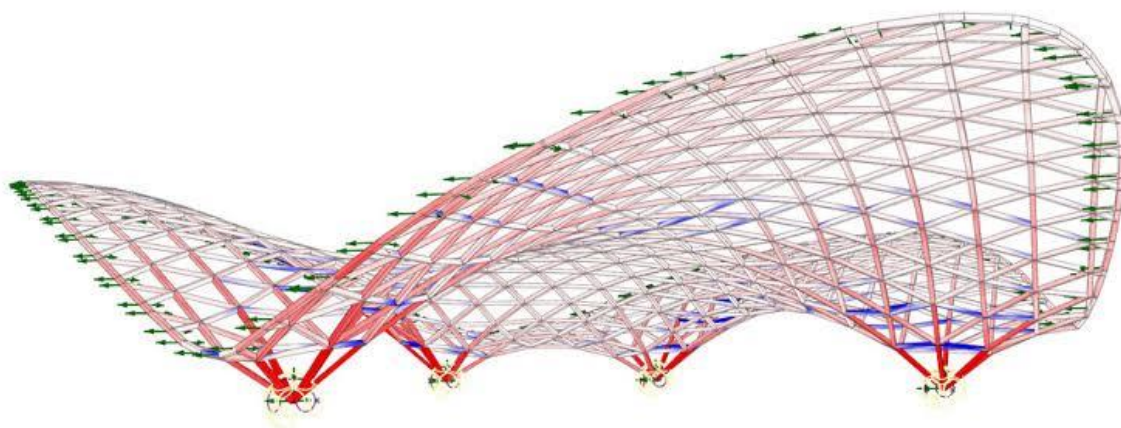
Rys. 15. System Space Deck [3]

3 Podstawy programowania i automatyzacji w środowisku Grasshopper

3.1 Projektowanie wizualne w programie Grasshopper

Programowanie wizualne stanowi nowoczesny paradygmat tworzenia oprogramowania niewymagający tradycyjnego pisania kodu tekstowego, który zostaje ukryty w strukturze gotowych do użycia komponentów. Każdy z tych elementów charakteryzuje się ściśle zdefiniowanymi parametrami wejściowymi i wyjściowymi, które użytkownik integruje ze sobą za pomocą wirtualnych przewodów. W ten sposób powstaje sieć powiązań logicznych, w której sekwencyjny wynik jednego modułu staje się bezpośrednią daną wejściową dla kolejnego, co pozwala na transformację danych pierwotnych w oczekiwany rezultat inżynierski. Implementacja tego podejścia rozwija tzw. myślenie obliczeniowe i stanowi optymalny etap pośredni w procesie zrozumienia cyfrowego przetwarzania informacji. W przypadku napotkania strukturalnych ograniczeń narzędzi wizualnych, wykształcona w ten sposób intuicja algorytmiczna znacząco ułatwia inżynierowi przejście do konwencjonalnych, tekstowych języków programowania [1]

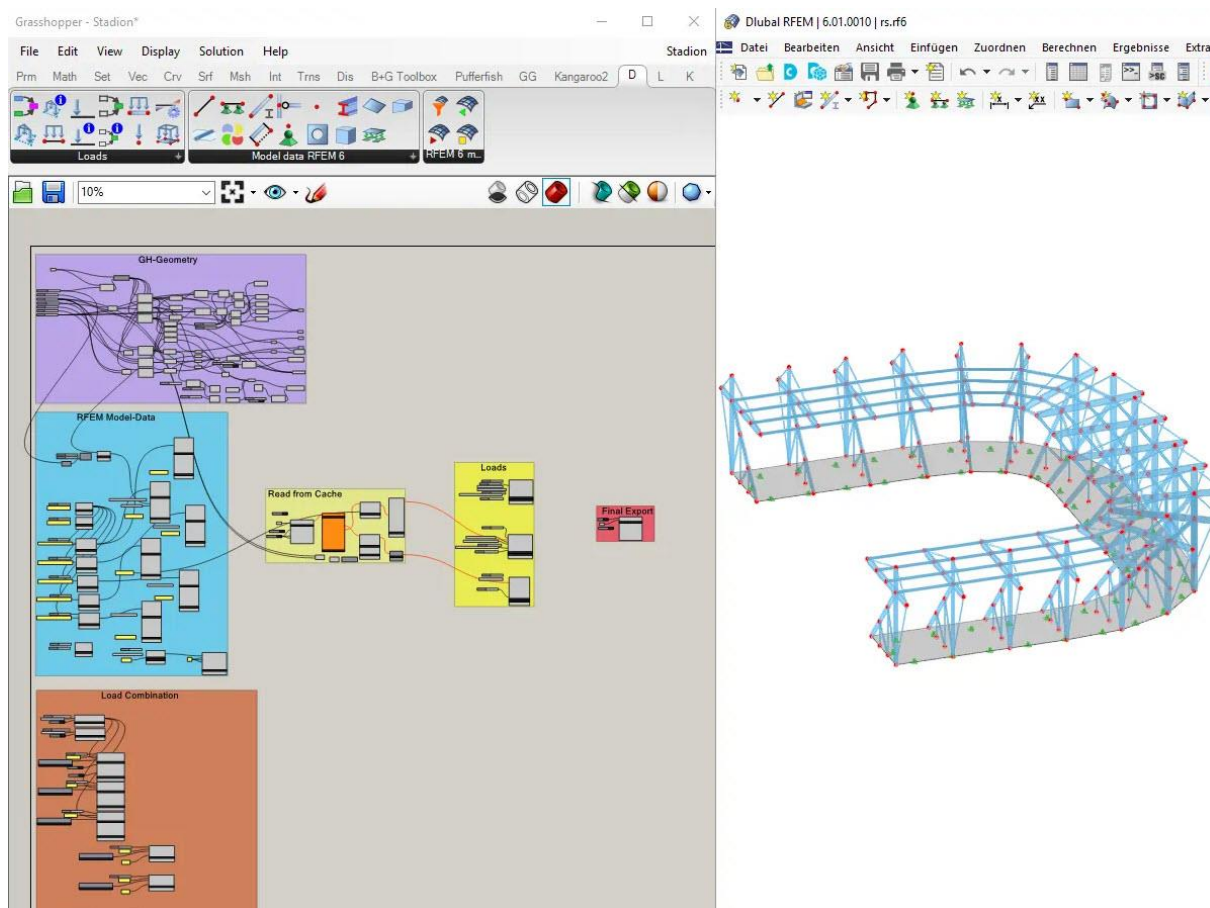
Współczesne projektowanie architektoniczno-budowlane w środowisku Grasshopper wykracza poza samą syntezę geometrii konstrukcji. Poprzez wykorzystanie specjalistycznej wtyczki Karamba3D, możliwe staje się prowadzenie zaawansowanych analiz strukturalnych opartych na Metodzie Elementów Skończonych. Narzędzie to, działając w oparciu o komponenty programowania wizualnego, tworzy bezpośredni interfejs między wygenerowaną parametrycznie geometrią a obliczeniami inżynierskimi. Budowa modelu analitycznego w środowisku Karamba3D wymaga zdefiniowania parametrów tożsamyh z klasycznymi systemami komercyjnymi MES. Punktem wyjścia jest geometria parametryczna, na podstawie której definiuje się listy dyskretnych odcinków linii oraz punkty podparcia struktury. Poszczególnym elementom liniowym przypisuje się określone kształty przekrojów poprzecznych, a także specyfikację materiałową wraz z określeniem gatunku stali. Model numeryczny umożliwia ponadto parametryzację sztywności połączeń międzywęzłowych oraz implementację długości wyboczeniowych elementów ściskanych. Poza standardową dystrybucją sił wewnętrznych, środowisko Karamba3D wspiera procedury optymalizacyjne dzięki wbudowanemu algorytmowi optymalizacji rozmiaru przekrojów, który automatycznie dobiera profile stalowe na podstawie kryteriów stanów granicznych [1], [33].



Rys. 16. Przykładowa konstrukcja w Karamba3d

https://parametric-architecture.com/karamba3d-the-parametric-structural-analysis-tool/?srsltid=AfmBOopd6-JNfqa2cbUYtaX4nq68iRWWp0eoKRomcBbWEOieIHHv_dWU

Mimo zaawansowanych funkcji optymalizacyjnych, Karamba3D wykazuje pewne ograniczenia w stosunku do wiodących na rynku systemów obliczeniowych. Z tego względu kluczową rolę odgrywa możliwość bezpośredniego eksportu modeli parametrycznych do zaawansowanych programów komercyjnych, takich jak RFEM 6. Główny potencjał tego rozwiązania tkwi w pełnej parametryzacji komponentów inżynierskich przez interfejs API. Oznacza to, że każdy atrybut strukturalny w programie RFEM 6, w tym geometria pręta, grubość płyt czy mimośrodowość połączeń może być sterowany bezpośrednio z poziomu algorytmu w środowisku Grasshopper. Taka korelacja umożliwia natychmiastową aktualizację modelu numerycznego w przypadku zmiany założeń architektonicznych: modyfikacja jednego suwaka geometrycznego w programie Rhino automatycznie redefiniuje siatkę elementów, właściwości materiałowe oraz warunki brzegowe w zewnętrznym solverze. Wtyczka obsługuje zaawansowane mapowanie atrybutów, pozwalając na precyzyjne definiowanie typów prętów - od elementów nieskończenie sztywnych po ciągną pracujące wyłącznie na rozciąganie, co jest kluczowe w analizie struktur ciągnowych lub hybrydowych. Ponadto plugin oferuje rozbudowane funkcje zarządzania scenariuszami obciążeń. Użytkownik zachowuje możliwość definiowania przypadków i grup obciążeń, a także automatycznej generacji kombinacji według wytycznych Eurokodów. Algorytmy te umożliwiają aplikację obciążeń węzłowych, liniowych oraz powierzchniowych, wliczając w to implementację charakterystyk nieliniowych podpór i przegubów. W efekcie cały proces przygotowania modelu odbywa się w ramach jednego, spójnego przepływu pracy, co całkowicie eliminuje konieczność manualnej wtórnej edycji danych w programie RFEM 6 po każdej zmianie geometrii bazowej [36].



Rys. 17. Połączony model z środowiskiem RFEM6

<https://bimcorner.com/pl/mes-w-grasshopperze-lista-programow-do-analazy-konstrukcji/>

Zastosowanie metodologii parametrycznej otwiera szerokie możliwości w zakresie minimalizacji masy konstrukcji i redukcji jej śladu węglowego. Niemniej jednak w konwencjonalnych procesach optymalizacji topologicznej węzły konstrukcyjne są często pomijane. Stanowi to poważną pułapkę projektową wprowadzenie szczegółowych detali połączeń na późniejszych etapach opracowania dokumentacji nierzadko wymusza rewizję całego projektu i zwiększenie gabarytów przekrojów poprzecznych prętów. Aby temu zapobiec, do parametrycznych modeli inżynierskich należy implementować wyższy poziom szczegółowości. Uwzględnienie detali konstrukcyjnych na wczesnym etapie pozwala na stworzenie zintegrowanego środowiska analizy, w którym weryfikacji wytrzymałościowej podlega każde połączenie. Przenosi to ciężar optymalizacji z kryterium samej masy całkowitej na globalny koszt realizacji obiektu. W tym obszarze organizacja Bouwen met Staal zrealizowała projekt badawczy SMARTconnection, w ramach którego sformułowano metodyki integracji połączeń stalowych w parametrycznym procesie optymalizacji. Taki zintegrowany proces projektowy znacząco podnosi technologiczną wykonalność konstrukcji, zmieniając i eliminując ryzyka projektowe związane z późniejszym detalowaniem węzłów. Efektem tych prac badawczych było m.in. opracowanie narzędzia KarambaIDEA, które umożliwia inżynierom bezszwowy eksport połączeń stalowych modelowanych wstępnie w programie Karamba3D bezpośrednio do środowiska IDEA StatiCa Connection w celu przeprowadzenia ich zaawansowanej, detalicznej analizy wytrzymałościowej [1].

3.2 Podstawy programowania i automatyzacji w środowisku Grasshopper

Współczesna praktyka inżynierska, szczególnie w zakresie projektowania złożonych struktur prętowych, wymaga kategorycznego odejścia od tradycyjnych, statycznych metod modelowania na rzecz zautomatyzowanych procesów parametrycznych. Cały proces projektowy i analityczny wsparto poprzez zaawansowaną integrację środowiska Grasshopper, służącego do generatywnego kształtowania geometrii sferycznej i powłokowej, z programem RFEM 6, dedykowanym do przeprowadzania zaawansowanych analiz statyczno-wytrzymałościowych oraz wymiarowania strukturalnego. Połączenie to zrealizowano za pośrednictwem dedykowanych interfejsów programistycznych (API), umożliwiających ciągłą, spójną i dwukierunkową komunikację pomiędzy platformami [33], [36].

Implementacja i bezpośrednie wykorzystanie interfejsu API pozwoliło na kompletną automatyzację kluczowych oraz najbardziej czasochłonných etapów pracy inżynierskiej. Obejmuje to automatyczne mapowanie skomplikowanej geometrii siatki trójdrożnej, geodezyjnej oraz układu lamelli na strukturę elementów prętowych w programie RFEM 6, wraz z jednoczesnym przypisaniem im cech fizycznych, specyfikacji materiałowych oraz profili przekrojów poprzecznych. Równolegle zaimplementowano procedury dynamicznego generowania zestawów obciążeń klimatycznych i środowiskowych w oparciu o bieżące parametry geometryczne modelu, co całkowicie wyeliminowało ryzyko błędów ludzkich wynikających z manualnego wprowadzania danych. Poprzez interfejs API wywoływano solver obliczeniowy programu RFEM bezpośrednio z poziomu nadrzędnego algorytmu optymalizacyjnego zlokalizowanego w Grasshopperze. Wyniki obliczeń numerycznych, w tym wartości sił osiowych i momentów gnących, wektory przemieszczeń oraz stopnie globalnego wyłączenia elementów, były automatycznie zwracane do środowiska parametrycznego w czasie rzeczywistym.

Zastosowanie tak zdefiniowanego modelu obliczeniowego umożliwiło przeprowadzenie wielokryterialnej optymalizacji kształtu i wymiarowania konstrukcji w sposób w pełni zautomatyzowany i iteracyjny. Wykorzystanie skryptów napisanych w języku Python, integrujących pakiety API obu systemów, pozwoliło nie tylko na drastyczne skrócenie czasu trwania pojedynczego cyklu obliczeniowego MES, ale również na badanie wpływu kluczowych zmiennych parametrów, takich jak stopień zagęszczenia siatki czy stosunek wyniosłości do średnicy kopuły, na całościową odpowiedź mechaniczną konstrukcji w sposób powtarzalny i weryfikowalny. Taka metodologia zapewnia najwyższą precyzję analizy strukturalnej, niemożliwą do osiągnięcia przy wykorzystaniu standardowych, metod wymiany danych, stanowiąc jednocześnie nowoczesny standard w badaniach nad inżynierią struktur powłokowych.

3.3 Integracja platform numerycznych i pętla sprzężenia zwrotnego

Szczegółowy przepływ informacji w zintegrowanym środowisku projektowym został opisany przede wszystkim na przykładzie programu Grasshopper i jego bezpośrednich powiązań z wtyczkami oraz programami korzystającymi z metody elementów skończonych jak Karamba3D, Sofistik czy RFEM 6. Podczas gdy standardowa literatura akademicka ogranicza się często do ogólnych wzmianek o specjalistycznych modułach obliczeniowych, takich jak moduł poszukiwania formy membranowo-ciężnowej, mechanizm zaawansowanej wymiany danych można precyzyjnie prześledzić na bazowym procesie działania zintegrowanych silników MES [33].

Proces ten inicjowany jest poprzez wygenerowanie parametrycznej geometrii ustroju, która stanowi podstawowy model wejściowy dla dalszych analiz strukturalnych. Wykorzystując wizualne środowisko programowania, inżynier definiuje logikę matematyczną struktury najczęściej w oparciu o dyskretne układy punktów i linii rozbijając proces tworzenia formy architektonicznej na ciąg powiązanych kroków obliczeniowych. Następnie, za pomocą wtyczek

analitycznych lub dedykowanych, dwukierunkowych interfejsów sieciowych, wygenerowana topologia jest bezpośrednio w Grasshopperze wzbogacana o kompletne informacje strukturalne niezbędne do obliczeń inżynierskich. Użytkownik przypisuje poszczególnym elementom właściwości takie jak rodzaj materiału, konkretne przekroje poprzeczne, typy i warunki brzegowe oraz przypadki, grupy i wartości obciążeń.

Fundamentalną zaletą wymiany informacji w tak zintegrowanym środowisku jest fakt, że parametry topologiczne zawarte bezpośrednio w modelu geometrycznym pozwalają na automatyczne przypisanie właściwości inżynierskich do elementów ustroju. Pozwala to na całkowite pominięcie czasochłonnego i niezwykle podatnego na błędy procesu eksportowania geometrii do zewnętrznych programów i ręcznego generowania w nich siatki dyskretyzacyjnej. Tak przygotowany model zostaje natychmiast przeliczony przez zintegrowany silnik MES, dostarczając inżynierowi błyskawicznej informacji zwrotnej na temat naprężeń, ugięć czy masy całkowitej konstrukcji.

Od tego momentu proces płynnie przechodzi do zautomatyzowanej pętli optymalizacyjnej. Otrzymane wyniki analizy strukturalnej, ukierunkowane na minimalizację energii odkształceń sprężystych, redukcję masy stali czy bezwzględne spełnienie normowych stanów granicznych, są przekazywane do algorytmów optymalizacyjnych i definiowane jako funkcje celu lub kary. W tym obszarze wykorzystuje się algorytmy genetyczne oraz ewolucyjne zaimplementowane we wtyczkach *Galapagos* i *Octopus*, bądź metody deterministycznego przeszukiwania siłowego we wtyczce *Colibri*. Na ich podstawie algorytm generuje nową populację rozwiązań, automatycznie modyfikując pierwotne parametry wejściowe, takie jak współrzędne węzłów, gęstość podziału siatki czy profile prętów. Dzięki temu, że model analityczny w tym środowisku jest integralną częścią modelu parametrycznego, cała konstrukcja i jej siatka obliczeniowa dynamicznie adaptują się w locie do nowych wymiarów. Skrypt ponownie i automatycznie wywołuje analizę MES dla zaktualizowanej geometrii, odsyłając kolejne wyniki do algorytmu i zamykając w ten sposób nieprzerwaną pętlę sprzężenia zwrotnego, która trwa aż do ewolucyjnego wyłonienia optymalnego wariantu inżynierskiego [1].

4 Algorytmy generatywne

4.1 Teoretyczne podstawy algorytmów ewolucyjnych i genetycznych

W ujęciu retrospektywnym w ramach inżynierii obliczeniowej wykształciły się cztery główne paradygmaty klasycznych algorytmów ewolucyjnych, z których najbardziej powszechnym są algorytmy genetyczne (GA - Genetic Algorithms). Ich architektura matematyczna, bezpośrednio inspirowana genetyką biologiczną, opiera się na populacji alternatywnych rozwiązań zakodowanych w postaci ciągów znaków, najczęściej binarnych, na które sekwencyjnie nakłada się operatory doboru naturalnego pod postacią selekcji, krzyżowania umożliwiającego wymianę informacji między osobnikami oraz mutacji. Równolegle rozwijane strategie ewolucyjne (ES - Evolution Strategies) zostały zaprojektowane celowo do rozwiązywania złożonych problemów inżynierskich, w tym z zakresu mechaniki płynów i optymalizacji geometrii struktur. W przeciwieństwie do algorytmów genetycznych, strategie te rzadziej implementują operator krzyżowania, upatrując głównego motoru przeszukiwania przestrzeni w operatorze mutacji operującym na liczbach rzeczywistych. Kolejny nurt stanowi programowanie ewolucyjne (EP - Evolutionary Programming), sformułowane w latach sześćdziesiątych XX wieku w celu generowania autonomicznych zachowań sztucznej inteligencji. W paradygmacie tym ewolucji podlegają maszyny skończone stanowe oraz diagramy przejść ukierunkowane na predykcję wzorców środowiskowych, co realizowane jest niemal wyłącznie poprzez korelację selekcji i mutacji strukturalnej, z całkowitym pominięciem mechanizmu krzyżowania. Najmłodszą gałęzią tej klasycznej klasyfikacji jest programowanie genetyczne (GP - Genetic Programming), stanowiące bezpośrednie rozwinięcie idei

algorytmów genetycznych, w którym ewolucji podlegają bezpośrednio programy komputerowe reprezentowane w postaci struktur drzewiastych, co pozwala maszynie na samoczynną syntezę algorytmów wykonujących określone zadania logiczne.

Wraz z intensywnym rozwojem inżynierii systemów i metod metaheurystycznych, te klasyczne podejścia zostały uzupełnione o zaawansowane modele hybrydowe oraz nowoczesne algorytmy naśladujące zróżnicowane zjawiska biologiczne, społeczne, a nawet fizyczne. Do kluczowych rozwiązań tego typu należy optymalizacja oparta na biogeografii (BBO - Biogeography-Based Optimization), bazująca na matematycznym opisie migracji gatunków między ekosystemami, gdzie poszczególne warianty konstrukcyjne wymieniają cechy zgodnie z dynamicznie przydzielanymi prawdopodobieństwami imigracji i emigracji. Zupełnie odmienne, fizyczne podejście reprezentuje optymalizacja inspirowana optyką (OIO - Optics Inspired Optimization), w której powierzchnia optymalizowanej funkcji celu traktowana jest jako pofalowane zwierciadło złożone z wypukłych szczytów i wklęsłych dolin, a generowanie nowych rozwiązań projektowych opiera się na równaniach matematycznych określających powstawanie obrazów z odbitych, sztucznych promieni świetlnych. Do optymalizacji ciągłej powszechnie stosuje się również ewolucję różnicową (DE - Differential Evolution), stanowiącą niezwykle silny algorytm, w którym nowe, zmutowane wektory parametrów tworzy się poprzez dodanie ważonej różnicy jednych osobników do innych. W obszarze inteligencji roju dominującą pozycję zajmuje optymalizacja rojem cząstek (PSO - Particle Swarm Optimization), odtwarzająca mechanizmy społeczne i kinematykę grup, na przykład ławic ryb lub stad ptaków, przemieszczających się po wspólnej przestrzeni stanów. Podobną inspiracją biologiczną charakteryzują się algorytmy mrówkowe (Ant Colony Optimization), symulujące zachowanie kolonii poszukujących najkrótszych ścieżek do pożywienia przy użyciu cyfrowych śladów feromonowych. Wskazuje się ponadto na szerokie spektrum innych metod metaheurystycznych, do których należą m.in. algorytm poszukiwania harmonii (HS - Harmony Search) wzorowany na improwizacji muzycznej, optymalizacja oparta na procesie nauczania (TLBO - Teaching-Learning-Based Optimization) czy algorytm Wielkiego Wybuchu i Wielkiego Skurczu (BB-BC - Big Bang-Big Crunch) implementujący kosmologiczne koncepcje ewolucji Wszechświata [5], [7], [8], [10].

4.2 Architektura algorytmu genetycznego

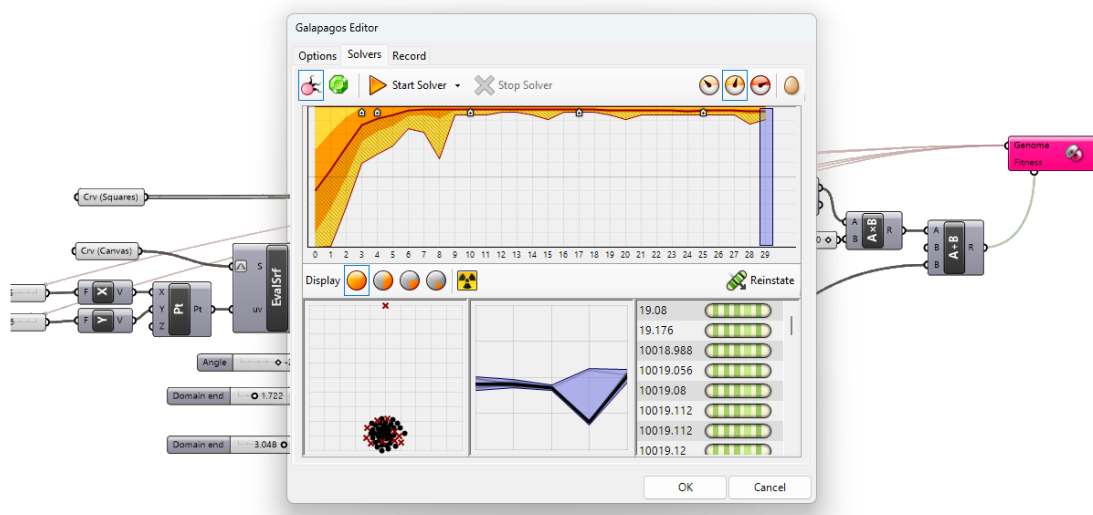
Algorytmy genetyczne stanowią potężne procedury przeszukiwania, których iteracyjny cykl ewolucyjny opiera się na sekwencyjnym stosowaniu trzech podstawowych operatorów genetycznych: selekcji, krzyżowania oraz mutacji. Operator selekcji, odpowiedzialny za reprodukcję, polega na ocenie osobników i ich powielaniu do następnego pokolenia z prawdopodobieństwem wprost proporcjonalnym do wartości ich funkcji przystosowania. Proces ten promuje przetrwanie jednostek najlepiej dostosowanych do warunków środowiskowych zadania projektowego, a do najpopularniejszych metod wyboru zalicza się selekcję ruletkową, turniejową oraz rankingową. Głównym motorem napędowym algorytmu jest jednak operator krzyżowania, w ramach którego wyselekcjonowane pary rodzicielskie wymieniają między sobą fragmenty kodu genetycznego w losowo wybranych miejscach podziału. Pozwala to na syntezę nowych rozwiązań łączących pożądane podstruktury, tzw. bloki budulcowe, cechujące generacje poprzednie. Operator mutacji pełni z kolei funkcję zabezpieczającą i polega na rzadkiej, losowej zmianie wartości pojedynczego genu, na przykład poprzez negację bitu w reprezentacji binarnej. Zapobiega to nieodwracalnej utracie różnorodności genetycznej wewnątrz populacji i chroni algorytm przed uwięzieniem w lokalnych minimach. Właściwy dobór funkcji celu oraz jej transformacja w funkcję przystosowania determinują skuteczność całego procesu optymalizacji, dostarczając algorytmowi informacji zwrotnej niezbędnej do ukierunkowania poszukiwań. W inżynierii konstrukcji budowlanych kryterium optymalizacyjnym jest najczęściej minimalizacja masy

całkowitej, globalnego kosztu realizacyjnego, przemieszczeń węzłowych lub energii odkształcenia sprężystego. Ponieważ algorytmy genetyczne ze względów matematycznych wymagają, aby funkcja przystosowania stanowiła nieujemną miarę zysku, naturalna funkcja celu podlegająca minimalizacji musi zostać odpowiednio przekształcona matematycznie w postać maksymalizowaną. W tym celu stosuje się zaawansowane mechanizmy skalowania, na przykład skalowanie liniowe, które pozwala utrzymać odpowiedni poziom konkurencyjności w populacji i zapobiega sytuacji, w której pojedynczy, silny osobnik przedwcześnie zdominowałby całą strukturę genetyczną grupy. Rzeczywiste problemy inżynierskie są nierozzerwalnie związane z ograniczeniami normowymi, takimi jak stany graniczne nośności i użyteczności. Ponieważ klasyczny algorytm genetyczny jest z założenia procedurą optymalizacji bez ograniczeń, ich uwzględnienie realizuje się poprzez implementację tzw. funkcji kary. W sytuacji, gdy algorytm wygeneruje rozwiązanie niespełniające warunków normowych, do jego funkcji celu przypisywany jest wysoki, matematyczny koszt numeryczny. Spada wówczas ocena przystosowania takiego osobnika, co drastycznie ogranicza jego szanse na przetrwanie i dalszą reprodukcję. [5], [7], [8], [10].

Pętla ewolucyjna jest wykonywana w sposób ciągły aż do momentu spełnienia kryteriów zatrzymania procesu obliczeniowego. Do najczęściej stosowanych reguł konwergencji zalicza się osiągnięcie maksymalnej, z góry narzuconej liczby pokoleń bądź określonej liczby ewaluacji funkcji celu. Alternatywnie proces może zostać przerwany na podstawie kryterium zbieżności, czyli w momencie, gdy populacja osiąga wysoki stopień jednorodności, a kolejne generacje nie przynoszą mierzalnego postępu w optymalizacji formy. Należy jednak podkreślić, że w przeciwieństwie do klasycznych metod różniczkowych, algorytmy genetyczne w swojej podstawowej konfiguracji nie posiadają twardych, formalnych gwarancji matematycznych dotyczących osiągnięcia absolutnego optimum globalnego w skończonym czasie. [5], [7], [8], [10].

4.3 Implementacja środowisk parametrycznych w optymalizacji konstrukcji

Współczesna praktyka inżynierska w obszarze projektowania parametrycznego wykorzystuje platformy programowania wizualnego, takie jak środowisko Grasshopper, które umożliwiają bezszwowe sprzężenie generowanej geometrii przestrzennej z analizą numeryczną MES przy użyciu dedykowanych wtyczek inżynierskich, takich jak Karamba3D. W przypadku skomplikowanych modeli o wysokim stopniu parametryzacji, stosowanie tradycyjnej metody brute-force, polegającej na wyczerpującym przeliczaniu każdego możliwego wariantu geometrii, staje się skrajnie nieefektywne. W takich scenariuszach optymalizacyjnych kluczową rolę odgrywają narzędzia implementujące algorytmy ewolucyjne, do których należą wbudowane wtyczki Galapagos i Octopus, a także zaawansowane platformy nowej generacji, takie jak Wallacei, oferujące rozbudowane funkcje analityczne oraz wielokryterialną wizualizację wyników ewolucyjnych. Zastosowanie tych narzędzi pozwala na wydajne przeszukiwanie krajobrazu rozwiązań, drastyczną redukcję czasu obliczeń, odporność na trudne, nieliniowe funkcje multimodalne oraz pełną swobodę w operowaniu zmiennymi dyskretnymi. Do głównych ograniczeń tej metodologii zalicza się ryzyko przedwczesnej zbieżności populacji oraz wysoki stopień skomplikowania procedur skalowania funkcji kar przy wprowadzaniu restrykcyjnych warunków normowych Eurokodów [1], [33].



Rys. 18. Środowisko Galapagos

<https://hopific.com/galapagos-grasshopper-tutorial/>

W praktyce inżynierskiej procesy optymalizacji generatywnej zorientowane na minimalizację masy konstrukcji klasyfikuje się w ramach trzech komplementarnych obszarów:

Optymalizacja doboru przekrojów, w zagadnieniach tych topologia oraz kształt geometryczny układu pozostają stałe, a algorytm poszukuje optymalnych wymiarów przekrojów poprzecznych prętów. Klasycznym przykładem historycznym jest optymalizacja płaskiej kratownicy dziesięcioprętowej przeprowadzona przez Goldberga i Samtaniego z użyciem kodowania binarnego. Współcześnie do tego celu wykorzystuje się hybrydowe algorytmy łączące optymalizację biogeograficzną z ewolucją różnicową, które umożliwiają automatyczny dobór najłżejszych profili stalowych z gotowych katalogów przy jednoczesnym monitorowaniu dopuszczalnych naprężeń i ugięć. Wbudowane w Karamba3D komponenty *sizingu* pozwalają na automatyczną, iteracyjną redukcję masy pasów czy krzyżulców pod wpływem zadanych układów obciążeń [5], [7], [8], [10].

Optymalizacja schematu statycznego i topologii stanowi najbardziej złożony matematycznie typ optymalizacji, w którym algorytm decyduje o istnieniu konkretnego elementu prętowego w strukturze oraz sposobie wzajemnego połączenia węzłów. Metodologia ta znajduje szerokie zastosowanie przy projektowaniu struktur szkieletowych i systemów stężających budynków wysokich przy użyciu strategii ewolucyjnych. W środowisku Grasshopper algorytmy genetyczne pozwalają nie tylko określić optymalne wykratowanie konstrukcji, ale również wyznaczyć najbardziej efektywne przestrzenne pozycje punktów podparcia zadaszonych wielokorzępięściowych, eliminując potrzebę ręcznego testowania wariantów. W zaawansowanych badaniach akademickich algorytmy wielokryterialne, takie jak NSGA-II, są wykorzystywane do optymalizacji ciągłych płyt wspornikowych, określając geometrię otworów redukcyjnych na podstawie diagramów Voronoia lub teorii fraktali [5], [7], [8], [10]. Optymalizacja kształtu opiera się na relokacji współrzędnych węzłów w przestrzeni trójwymiarowej przy zachowaniu stałej siatki połączeń prętowych, co pozwala na drastyczną redukcję momentów zginających w elementach. W przypadku przekryć krzywoliniowych, takich jak dachy powłokowe o swobodnej geometrii czy drzewiaste słupy strukturalne, kształt poszukiwany jest poprzez modyfikację położenia węzłów siatki kontrolnej w zadanych granicach architektonicznych. Nowoczesne algorytmy metaheurystyczne, w tym algorytmy inspirowane optyką lustrzaną, umożliwiają simultaneousne prowadzenie optymalizacji kształtu i przekrojów poprzecznych przy ostrych ograniczeniach dynamicznych. Pozwala to na

minimalizację masy układów przestrzennych z zachowaniem rygorystycznych warunków dotyczących minimalnych częstotliwości drgań własnych struktury [5], [7], [8], [10].

Podsumowując, we wszystkich zautomatyzowanych metodach generatywnych minimalizacja masy realizowana jest poprzez optymalizację funkcji objętości materiału, integralnie powiązanej z matematyczną funkcją kary. W przypadku wygenerowania przez algorytm formy o zbyt niskiej sztywności bądź przekrojach przekraczających stany graniczne nośności lub wybożenia, wartość kary drastycznie obniża ocenę przystosowania danej geometrii. W toku ewolucji osobniki niespełniające kryteriów bezpieczeństwa są eliminowane z populacji, co pozwala inżynierowi na uzyskanie finalnej formy konstrukcyjnej, która charakteryzuje się minimalnym ciężarem własnym przy pełnym zachowaniu wymogów bezpieczeństwa strukturalnego.

5 Parametryczne kształtowanie i analiza numeryczna geometrii przekrycia

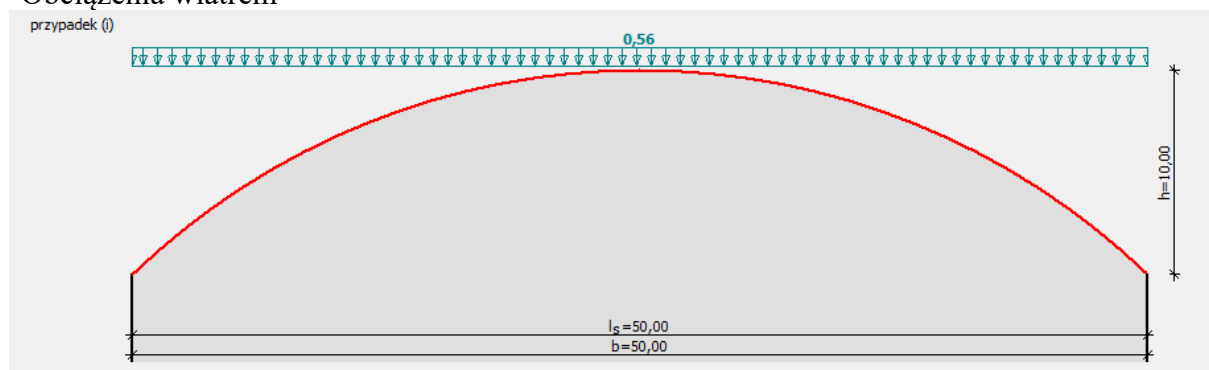
5.1 Założenia projektowe

Przedmiotem opracowania jest projekt techniczny konstrukcji przekrycia stalowego kopulastego nad obiektem sportowym. Budynek został zaprojektowany na planie koła o całkowitej średnicy wynoszącej 70 metrów. Jego główną konstrukcję nośną w dolnej partii stanowi żelbetowy płaszcz, który wznosi się od poziomu zero do wysokości 10 metrów. Na zwieńczeniu, na wysokości 10 metrów, oparto stalowe przekrycie o średnicy 50 metrów. Całość konstrukcji stalowej zamyka obiekt, sięgając od poziomu 10 do maksymalnej wysokości 20 metrów.

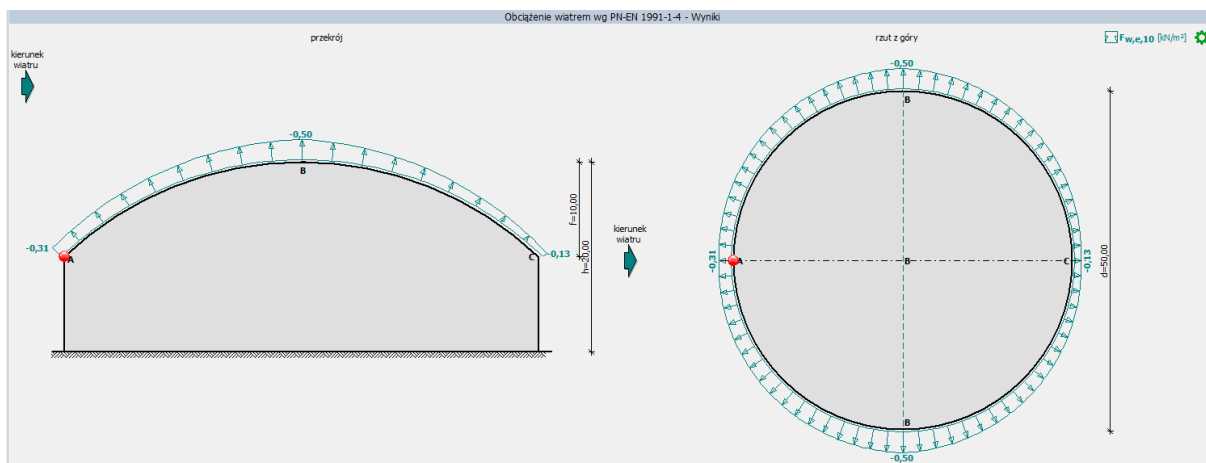
- Średnica konstrukcji betonowej: 70m
- Wysokość konstrukcji betonowej: 10m
- Wysokość konstrukcji stalowej: 20m
- Średnica konstrukcji stalowej: 50m
- Lokalizacja: Gostyń

Założono obciążenie od:

- Ciężaru własnego konstrukcji oraz szklanych paneli- $0,8 \text{ kN/m}^2$
- Obciążenia śniegiem
- Obciążenia wiatrem



Rys. 19. Rozpatrywany przypadek obciążenia śniegiem SPECBUD



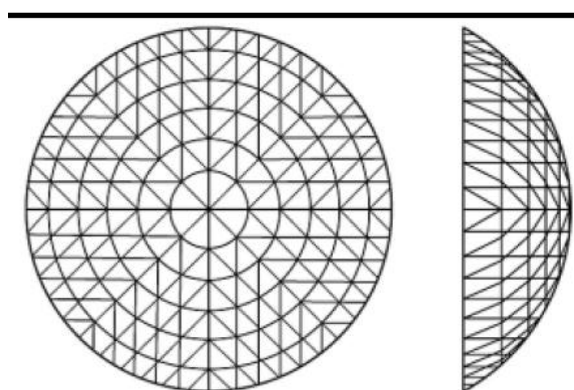
Rys. 20. Rozpatrywany przypadek obciążenia wiatrem SPECBUD

5.2 Budowa parametrycznego modelu geometrycznego w środowisku Grasshopper

5.2.1 Siatka typu Lamella równoległe

Sieć lamella tworzy przecinające się dwukierunkowo pręty ukośne, tworząc siatkę w kształcie rombu, podobnie jak w siatce lamella w sklepieniach kolebkowych. Każdy elementrombowy ma dwa boki, z których jeden jest dwa razy dłuższy od drugiego. Siatki lamella mogą być równoległe lub zakrzywione. Siatka równoległa jest konstruowana na planie kołowym, podzielonym jest na kilka sektorów, a każdy sektor jest podzielony równoległe do żeber siatki rombu o tej samej wielkości. Elementy tworzą diamentowy wzór, zastosowany w dwóch pierwszych wielkich stadionach sportowych USA: Houston Astrodome (1962/64), o rozpiętości 196 m i Superdome w Nowym Orleanie (1973), o średnicy 207 m. Typ kopuł Lamella bardzo popularny w USA i nazywany Kiewitt [3].

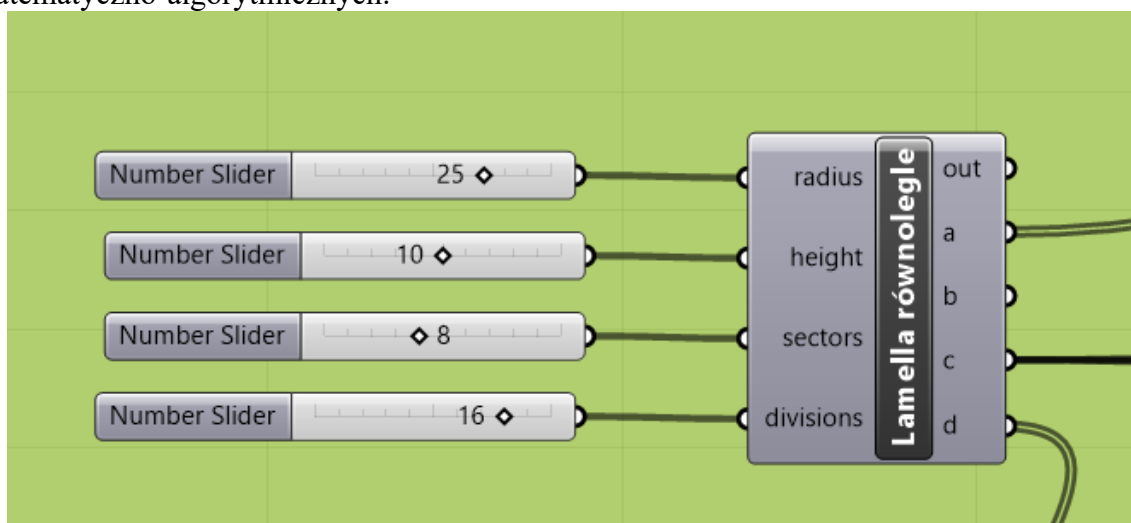
Lamella równoległe



Rys. 21. Siatka typu lamella równoległe [3]

Zamiast posługiwać się gotowymi komponentami dostępnymi w programie Grasshopper, można iść o krok dalej i sparametryzować model konstrukcji za pomocą kodu w języku programowania Python. Pozwala nam to na szybsze i bardziej dokładne uzyskanie docelowej geometrii. Dla każdego rodzaju siatki należy napisać osobny kod, który da nam możliwość wygenerowania siatki prętów, które posłużą nam później do obliczeń w programie MES. Proces generowania struktury numerycznej zorientowany jest na stworzenie powtarzalnej, zoptymalizowanej siatki prętowej na powierzchni sferycznej o zadanych parametrach

gabarytowych, promieniu rzutu, strzałce wzniesienia, oraz gęstości podziału. Realizacja tego zadania za pomocą dedykowanego komponentu Python opiera się na trzech głównych etapach matematyczno-algorytmicznych.



Rys. 22. Komponent Python 3 Script Grasshopper

W pierwszym kroku algorytm przekształca parametry wejściowe w celu wyznaczenia geometrii pełnej sfery opisującej przekrycie. Na podstawie promienia podstawy oraz wysokości wyliczany jest rzeczywisty promień sfery oraz współrzędna środka jej ciężkości w układzie globalnym.

```

4  # --- 1. Parametry wejściowe z Grasshoppera ---
5  R = radius if 'radius' in globals() and radius is not None else 15.0
6  H = height if 'height' in globals() and height is not None else 8.0
7  freq = frequency if 'frequency' in globals() and frequency is not None else 4
8
9  if freq < 1: freq = 1
10
11  if H <= 0 or R <= 0:
12      a, b, d = [], [], []
13      c = None
14  else:
15      # Parametry sfery
16      Rsph = (R**2 + H**2) / (2 * H)
17      Zc = H - Rsph

```

Rys. 23. Część kodu do generacji konstrukcji parametrycznej

Kluczem do uzyskania struktury typu Lamella równoległe jest zastosowanie zmiennego kroku kąтового dla sąsiadujących pierścieni. Wykorzystując pętle iteracyjne, algorytm generuje współrzędne punktów na każdym poziomie. Dla poziomów parzystych punkty rozmieszczane są ze standardowym krokiem kątowym, oraz dla poziomów nieparzystych wprowadzane jest przesunięcie fazowe o wartość równą połowie modułu obwodowego. Wszystkie wygenerowane węzły są dynamicznie mapowane i zapisywane w strukturalnej bazie danych pod unikalnymi adresami opisującymi numer poziomu oraz pozycję na obwodzie.

```

17     def get_pt(s, i, j):
18         k = i + j
19
20         if k == 0:
21             nx, ny = 0.0, 0.0
22             z = H
23         else:
24             angle1 = s * (2 * math.pi / S)
25             angle2 = (s + 1) * (2 * math.pi / S)
26
27             t_angle = float(j) / k
28             angle_target = angle1 + t_angle * (angle2 - angle1)
29
30             r_target = (float(k) / D) * R
31
32             nx = r_target * math.cos(angle_target)
33             ny = r_target * math.sin(angle_target)
34
35             if k == D:
36                 z = 0.0
37             else:
38                 r_sq = nx**2 + ny**2
39                 if r_sq > R_sph**2: r_sq = R_sph**2
40                 z = math.sqrt(R_sph**2 - r_sq) + Z_c
41
42         return rg.Point3d(nx, ny, z)

```

Rys. 24. Część kodu do generacji siatki Lamella w. 17-42

Ostatni etap polega na automatycznym budowaniu relacji topologicznych między węzłami w celu wygenerowania siatki. Algorytm przeszukuje bazę danych i generuje obiekty liniowe, w oparciu o trzy rodziny prętów. Łączą sąsiednie punkty leżące na tym samym poziomie, tworząc pierścienie usztywniające. Dzięki przesunięciu fazowemu, każdy węzeł poziomu niższego łączy się z dwoma najbliższymi węzłami poziomu wyższego pod kątem. Tworzy to siatkę trójkątno-równoboczną o wysokiej sztywności geometrycznej. W obszarze przywierzchołkowym algorytm automatycznie redukuje liczbę połączeń, zbiegając pasma ukośne do jednego centralnego węzła.

W celu zapewnienia pełnej poprawności strukturalnej modelu przekazywanego do programów analizy numerycznej, komponent generujący trójdrożną siatkę typu lamella równoległą realizuje zaawansowane procedury filtrowania topologicznego. Proces ten gwarantuje, że geometria nie zawiera zduplikowanych krawędzi ani pokrywających się węzłów, które mogłyby wywołać błędy osobliwości macierzy sztywności w obliczeniach MES. Efektem działania skryptu jest precyzyjny podział struktur danych na cztery wyspecjalizowane wyjścia geometryczne nazwane: a,b,c,d.

Generowanie struktur siatkowych z pętli iteracyjnych często niesie za sobą ryzyko powtórznego nakreślenia tej samej linii pomiędzy dwoma węzłami. Aby temu zapobiec, algorytm implementuje filtr unikalności oparty na strukturze zbioru. Dla każdej wygenerowanej linii pobierany jest punkt początkowy oraz końcowy. W celu uniezależnienia wektora od kierunku jego rysowania, współrzędne końców są logicznie sortowane, tworząc unikalny ciąg tekstowy. Jeśli dany klucz nie figuruje w zbiorze linii już przetworzonych, pręt zostaje zapisany na liście wyjściowej a. Dzięki temu eliminowane jest zjawisko dublowania elementów geometrycznych.

```

110 # --- USUWANIE DUPLIKATÓW ---
111
112 # 1. Pręty
113 unique_lines = []
114 seen_lines = set()
115 for ln in all_lines:
116     pA, pB = ln.From, ln.To
117     if pA.X > pB.X or (pA.X == pB.X and pA.Y > pB.Y) or (pA.X == pB.X and pA.Y == pB.Y and pA.Z > pB.Z):
118         pA, pB = pB, pA
119     key = "{:.3f},{:.3f},{:.3f}-{:.3f},{:.3f},{:.3f}".format(pA.X, pA.Y, pA.Z, pB.X, pB.Y, pB.Z)
120     if key not in seen_lines:
121         seen_lines.add(key)
122         unique_lines.append(ln)

```

Rys. 25. Część kodu do generacji siatki Lamella w. 110-122

Wyjście to reprezentuje globalną bazę punktów węzłowych niezbędnych do definicji topologii struktury przestrzennej. Zamiast budować listę z pojedynczych kroków rysowania linii, algorytm odwołuje się bezpośrednio do geometrii wygenerowanej siatki wielobocznej. Skrypt pobiera unikalne i jednoznacznie zdefiniowane w przestrzeni wierzchołki trójkątnych oraz czworokątnych paneli powłoki. Punkty te, jako tablica obiektów, są bezpośrednio mapowane na wyjście b i stanowią kompletną bazę węzłów dla modelu MES.

```

132
133 # 3. Wszystkie węzły konstrukcyjne (pobieramy bezpośrednio z wierzchołków wygenerowanej siatki)
134 unique_pts = list(final_mesh.Vertices.ToPoint3dArray())

```

Rys. 26. Część kodu do generacji siatki Lamella w. 132-134

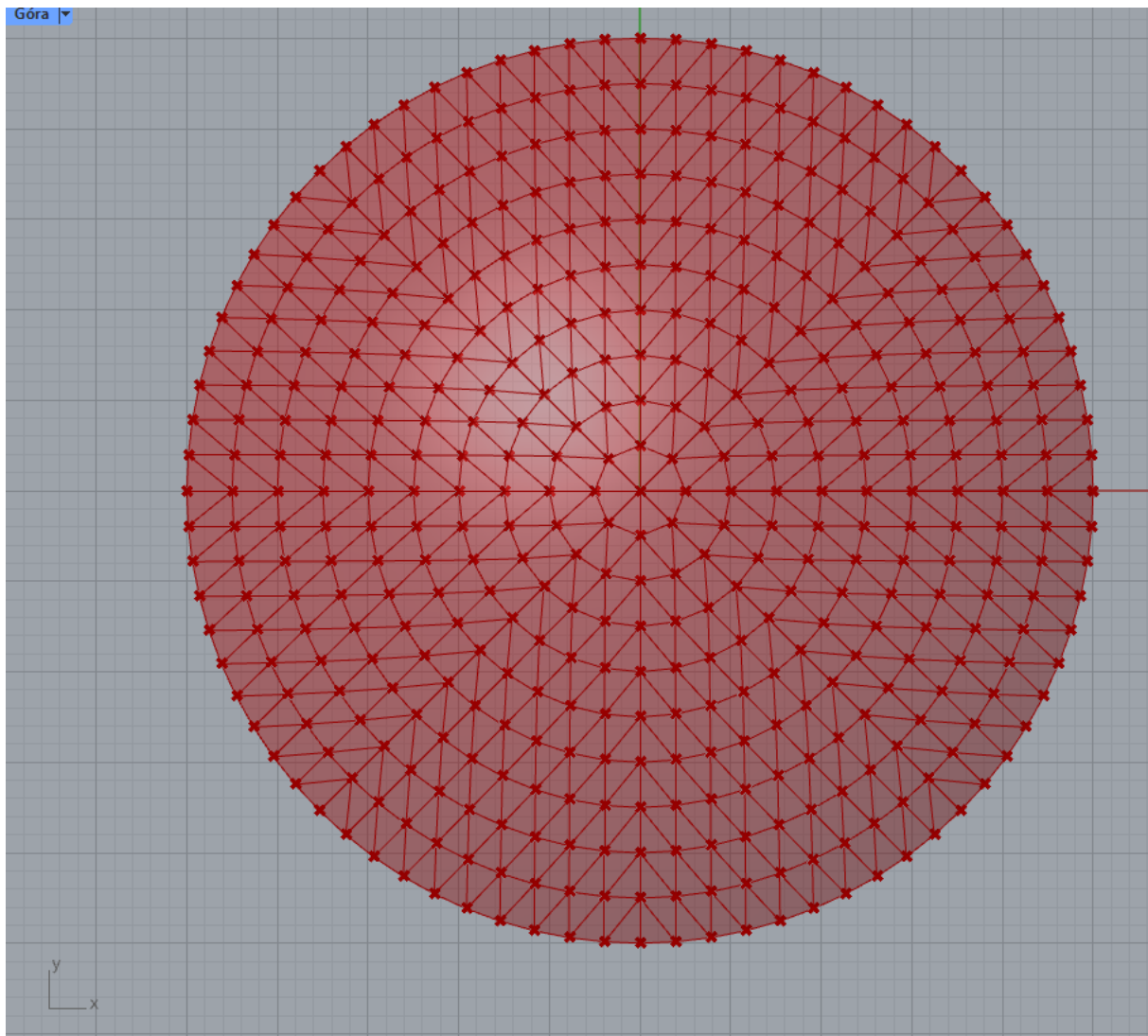
Wyjście C komponentu zwraca skonsolidowany, pojedynczy obiekt. Reprezentuje on geometryczną powłokę przekrycia kortu tenisowego. Obiekt ten powstaje poprzez numeryczne rozpięcie paneli na wyznaczonych wcześniej węzłach. Ciągła powierzchnia typu Mesh jest kluczowa w procesie projektowania parametrycznego z dwóch powodów, umożliwia graficzną weryfikację estetyki i gładkości wygenerowanej kopuły, a także stanowi podkład geometryczny do automatycznego generowania obciążeń powierzchniowych, takich jak obciążenie śniegiem i wiatrem.

```

136 # --- 4. Generowanie Powierzchni dociążających (Mesh) ---
137 out_mesh = rg.Mesh()
138 nodes_list = list(unique_nodes_dict.values())
139
140 try:
141     import ghpythonlib.components as ghcomp
142     mesh = ghcomp.DelaunayMesh(nodes_list)
143     if mesh: out_mesh = mesh
144 except:
145     pass
146

```

Rys. 27. Część kodu do generacji siatki Lamella w. 136-145



Rys. 28. Widok z góry na wygenerowaną siatkę Lamella

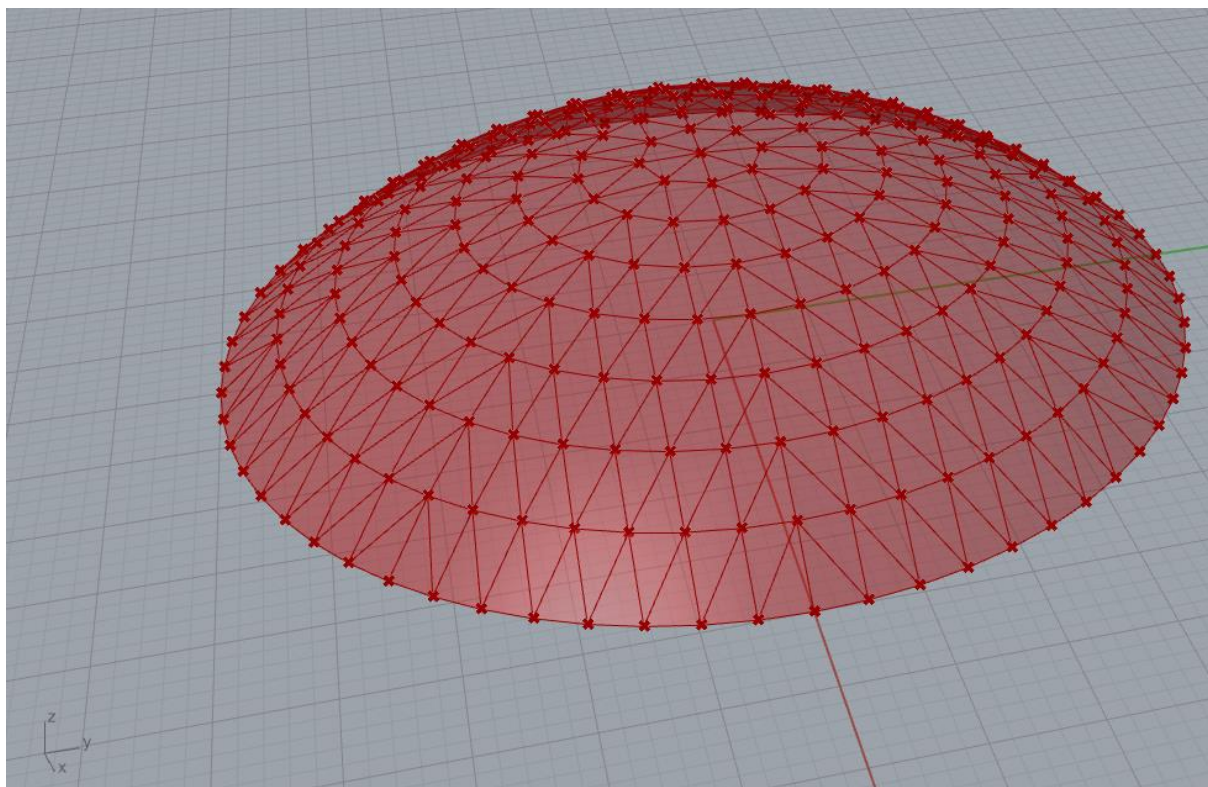
Do poprawnego przeprowadzenia analizy statycznej konstrukcji niezbędne jest jednoznaczne zdefiniowanie warunków brzegowych. Algorytm automatyzuje ten proces na poziomie kodu. Skrypt przeszukuje bazę wszystkich węzłów leżących na najniższym pierścieniu kopuły. Podobnie jak przy prętach, każdy punkt ulega procesowi rygorystycznej filtracji geometrycznej przy użyciu klucza tekstowego opartego o zaokrąglone współrzędne, co zapobiega powielaniu punktów w tym samym miejscu. Przefiltrowana lista unikalnych punktów z poziomu posadowienia $Z=0$ jest kierowana na wyjście d. Pozwala to na automatyczne i natychmiastowe przypisanie podpór węzłowych po stronie oprogramowania MES, bez konieczności ręcznego ich wskazywania na modelu.

```

124 # 2. Węzły podporowe (Wszystkie na Z=0)
125 unique_base_pts = []
126 seen_base_pts = set()
127 for pt in all_base_nodes:
128     pt_key = "{:.3f},{:.3f},{:.3f}".format(pt.X, pt.Y, pt.Z)
129     if pt_key not in seen_base_pts:
130         seen_base_pts.add(pt_key)
131         unique_base_pts.append(pt)
132

```

Rys. 29. Część kodu do generacji siatki Lamella w. 124-132

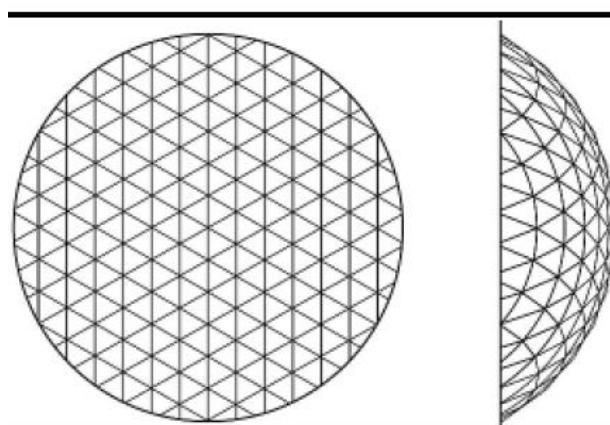


Rys. 30. Widok w perspektywie na wygenerowaną siatkę Lamella

5.2.2 Siatka trójdrożna

Sieć trójdrożna w kopułach jest uogólnieniem siatki trójkierunkowej w sklepieniach. Jest stosowana zarówno w kopułach jednowarstwowych jak i dwuwarstwowych. System trójdrożny został rozwinięty i opatentowany przez japońską firmę *Tomoegumi Iron Works* pod nazwą „*Diamond Dome*”. Chętnie stosowane ze względu na równomierny rozkład sił w przypadku niesymetrycznego obciążenia. Wdrożono kilka praktycznych systemów kopuł trójdrożnych. [3]

Trójdrożne



Rys. 31. Siatka trójdrożna [3]

Zasadnicza część topologii powstaje w przestrzeni dwuwymiarowej. Skrypt generuje nieskończoną siatkę węzłów, opartą na trójkątach równobocznych o długości boku L .

Współrzędne węzłów obliczane są za pomocą transformacji liniowej, wykorzystującej wektory bazowe siatki heksagonalnej.

$$x = i * L + j * L * 0,5$$

$$y = k * L * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

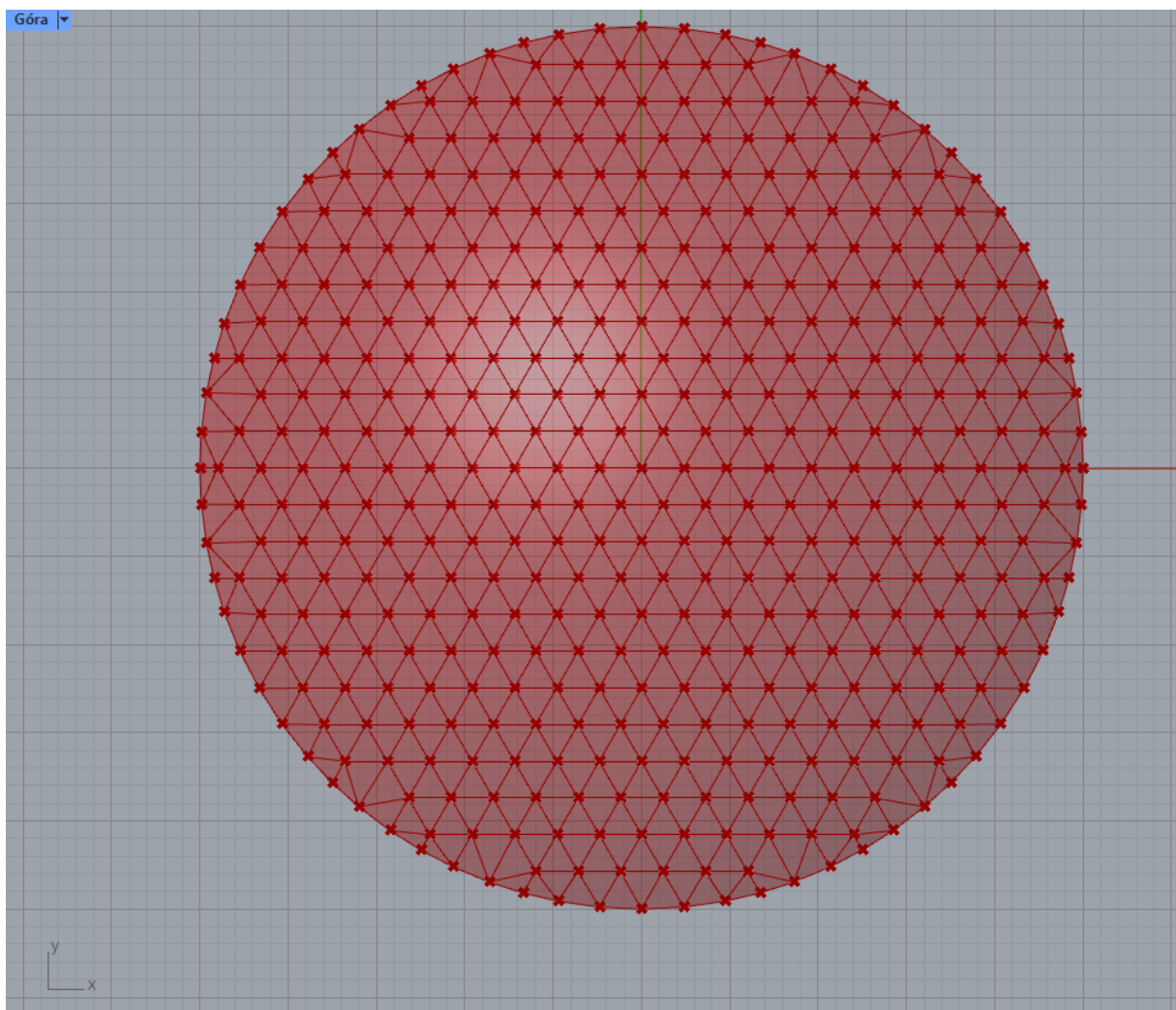
gdzie i oraz j stanowią indeksy iteracyjne w kartezjańskim układzie odniesienia. Wynikiem tej operacji jest gęsta, idealnie regularna, płaska siatka prętów o trzech głównych kierunkach przebiegu.

```

25 # --- 2. Generowanie siatki równobocznej i dociąganie węzłów (Snapping) ---
26 raw_lines = []
27
28 # Zwiększony zasięg siatki
29 grid_extent = int(2.0 * R / L) + 3
30 min_idx = -grid_extent
31 max_idx = grid_extent
32
33 def get_grid_pt(i, j):
34     x = i * L + j * L * 0.5
35     y = j * L * math.sqrt(3.0) * 0.5
36     return rg.Point3d(x, y, 0)

```

Rys. 32. Część kodu do generacji siatki trójdrożnej w. 25-36



Rys. 33. Widok z góry na wygenerowaną siatkę trójdrożną.

Jednym z kluczowych wyzwań w projektowaniu parametrycznych siatek prętowych jest zjawisko powstawania mikroskopijnych, nieoptymalnych konstrukcyjnie elementów na obrzeżach struktury, wynikających z przypadkowego przecięcia regularnej siatki z okrągłym rzutem podstawy. Skrypt rozwiązuje ten problem poprzez zdefiniowanie strefy tolerancji, ustalonej na 35% długości nominalnego boku komórki L . Jeśli wygenerowany węzeł siatki znajdzie się w tej strefie w stosunku do obwodu podstawy R , algorytm wymusza jego promieniowe przesunięcie punkt jest dociągany i osadzany dokładnie na okręgu brzegowym. Zapobiega to powstawaniu zbyt krótkich krawędzi, poprawiając właściwości strukturalne siatki.

```

38     def get_snapped_pt(pt):
39         dist = math.sqrt(pt.X**2 + pt.Y**2)
40         if abs(dist - R) <= snap_tol:
41             if dist > 1e-6:
42                 return rg.Point3d((pt.X / dist) * R, (pt.Y / dist) * R, 0)
43         return pt
44
45     for i in range(min_idx, max_idx):
46         for j in range(min_idx, max_idx):
47             p1 = get_snapped_pt(get_grid_pt(i, j))
48             p2 = get_snapped_pt(get_grid_pt(i + 1, j))
49             p3 = get_snapped_pt(get_grid_pt(i, j + 1))
50             p4 = get_snapped_pt(get_grid_pt(i - 1, j + 1))
51
52             raw_lines.extend([rg.Line(p1, p2), rg.Line(p1, p3), rg.Line(p1, p4)])
53
54     def clip_line_to_circle(line, radius):
55         p1, p2 = line.From, line.To
56         dx, dy = p2.X - p1.X, p2.Y - p1.Y
57         a_eq = dx**2 + dy**2
58         if a_eq == 0: return None

```

Rys. 34. Część kodu do generacji siatki trójdrożnej w. 38-58

Węzły, które nie uległy dociągnięciu, a znajdują się poza promieniem R , muszą zostać odrzucone, a łączące je pręty odpowiednio docięte. Algorytm iteruje przez wszystkie wygenerowane linie proste i przeprowadza analityczne przecięcie linii z okręgiem. Rozwiązywane jest równanie kwadratowe, z którego wyznaczane są parametry t określające punkt przecięcia na odcinku. Pręty wystające poza obszar o promieniu R są trzymowane do wyznaczonych punktów brzegowych.

```

85 # --- NOWOŚĆ: Generowanie dolnego pierścienia zamykającego siatkę ---
86 boundary_pts = []
87 seen_boundary_keys = set()
88
89 for ln in clipped_lines_2d:
90     for pt in [ln.From, ln.To]:
91         # Sprawdzamy czy punkt leży na zewnątrz (na krawędzi okręgu R)
92         dist = math.sqrt(pt.X**2 + pt.Y**2)
93         if abs(dist - R) < 1e-3:
94             key = "{:.3f},{:.3f}".format(pt.X, pt.Y)
95             if key not in seen_boundary_keys:
96                 seen_boundary_keys.add(key)
97                 boundary_pts.append(pt)
98
99 # Sortowanie punktów brzegowych względem kąta od środka, aby poprowadzić po nich linię w koło
100 boundary_pts.sort(key=lambda p: math.atan2(p.Y, p.X))
101
102 # Łączenie posortowanych punktów i zamykanie pętli
103 if len(boundary_pts) > 2:
104     for i in range(len(boundary_pts)):
105         p_curr = boundary_pts[i]
106         p_next = boundary_pts[(i + 1) % len(boundary_pts)] # % pozwala połączyć ostatni z pierwszym
107         if p_curr.DistanceTo(p_next) > 1e-3:
108             clipped_lines_2d.append(rg.Line(p_curr, p_next))
109

```

Rys. 35. Część kodu do generacji siatki trójdrożnej w. 85-108

Następnie nowo powstałe oraz dociągnięte węzły leżące dokładnie na okręgu podstawy są ekstrahowane i poddawane sortowaniu kątowemu za pomocą funkcji arcus tangens dwóch zmiennych. Umożliwia to połączenie ich w spójny, wieloboczny pierścień zamykający strukturę u dołu.

Przedostatnim etapem jest nadanie płaskiej topologii formy trójwymiarowej. Z racji faktu, że węzły zostały wygenerowane w płaszczyźnie poziomej, ich transformacja nie przebiega radialnie, lecz polega na rzutowaniu ortogonalnym równoległym do osi Z wprost na wyliczoną w pierwszym kroku sferę referencyjną.

Dla każdego węzła 2D algorytm odczytuje jego promień płaski r względem środka układu i, przekształcając równanie sfery, wyznacza jego współrzędną z .

$$z = \sqrt{R_{shp}^2 - r^2} + Z_c$$

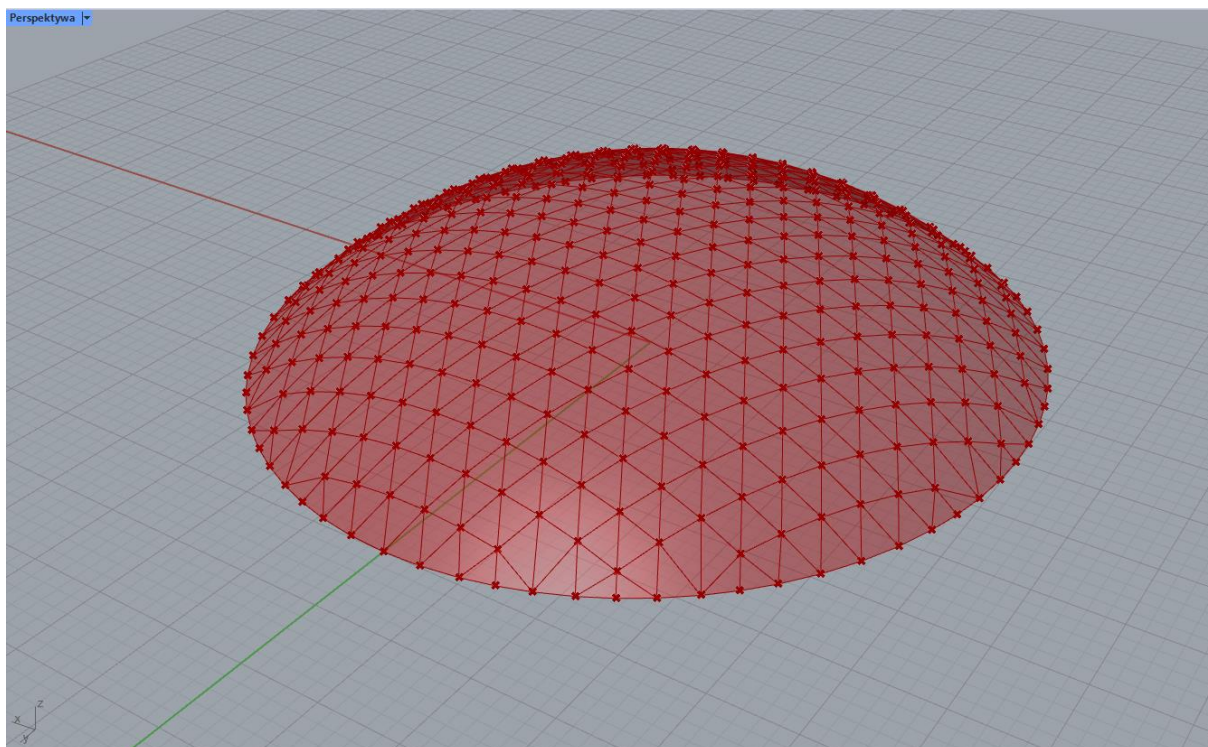
Zastosowanie rzutowania pionowego w przeciwieństwie np. do rzutowania środkowego z punktu (0;0;0) sprawia, że rzut struktury na płaszczyznę płaską pozostaje idealnie regularną siatką trójdrożną, podczas gdy rzeczywiste rozmiary poszczególnych komórek w przestrzeni trójwymiarowej ulegają niewielkiemu wydłużeniu w miarę zbliżania się do strefy przyziemnej. Ostatni element algorytmu przekłada wygenerowaną matematycznie chmurę przestrzennych punktów na spójną siatkę wielokątną. Wykorzystywana jest do tego zintegrowana w środowisku Grasshopper funkcja triangulacji, która w oparciu o dostarczone węzły 3D odtwarza powłokę pokrywającą strukturę. Gotowa geometria węzłów, prętów oraz powierzchni dociążającej jest następnie udostępniana na wyjściu skryptu.

```

110 # --- 3. Rzutowanie na sferę 3D i budowa topologii ---
111 unique_lines_3d = []
112 unique_nodes_dict = {}
113
114 def get_key(pt):
115     return "{:.3f},{:.3f},{:.3f}".format(pt.X, pt.Y, pt.Z)
116
117 def get_or_add_node(pt2d):
118     pt3d = project_to_sphere(pt2d)
119     key = get_key(pt3d)
120     if key not in unique_nodes_dict:
121         unique_nodes_dict[key] = pt3d
122     return unique_nodes_dict[key]
123
124 seen_line_keys = set()
125 for ln in clipped_lines_2d:
126     pA = get_or_add_node(ln.From)
127     pB = get_or_add_node(ln.To)
128
129     if pA.DistanceTo(pB) > 1e-3:
130         line_key = "-".join(sorted([get_key(pA), get_key(pB)]))
131
132         if line_key not in seen_line_keys:
133             seen_line_keys.add(line_key)
134             unique_lines_3d.append(rg.Line(pA, pB))
135
136 # --- 4. Generowanie Powierzchni dociążających (Mesh) ---
137 out_mesh = rg.Mesh()
138 nodes_list = list(unique_nodes_dict.values())
139
140 try:
141     import ghpythonlib.components as ghcomp
142     mesh = ghcomp.DelaunayMesh(nodes_list)
143     if mesh: out_mesh = mesh
144 except:
145     pass

```

Rys. 36. Część kodu do generacji siatki trójdrożnej w. 110-145

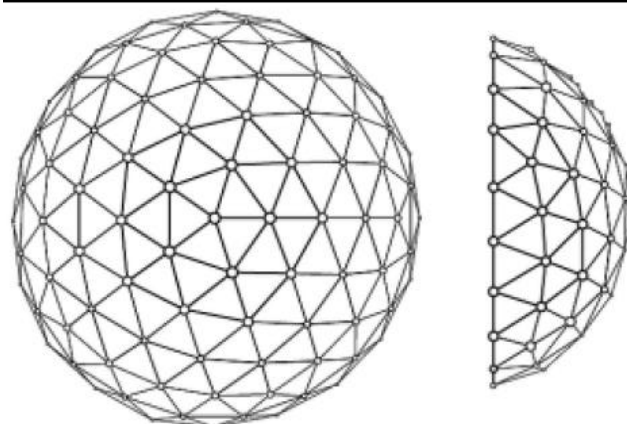


Rys. 37. Widok w perspektywie na wygenerowaną siatkę trójdrożną.

5.2.3 Siatka geodezyjna

Siatki geodezyjne zostały opracowane przez Richarda Buckminstera Fullera, który uwypuklił kluczowe zalety kopuł siatkowych, wprowadzając jednocześnie samą nazwę „geodezyjne” ze względu na fakt, iż ich główne elementy konstrukcyjne leżą na wielkich okręgach sfery. Powierzchnią bazową w tego typu strukturach jest sfera, na której rozpina się trójdrożną siatkę złożoną z trójkątów sferycznych. Oryginalne kopuły Fullera tworzone były na bazie dwudziestościanu, stanowiącego bryłę wyjściową do geometrycznej aproksymacji sfery. Autor tego rozwiązania opracował kilka metod podziału powierzchni sferycznej na trójkąty sferyczne, niemniej jednak praktyka inżynierska pokazuje, że pierwotny układ sieci uzyskany z bezpośredniego podziału geodezyjnego często okazuje się niewystarczający. Prowadzi on bowiem do niekorzystnego układu sił i deformacji elementów, co wymusza wprowadzenie dodatkowych prętów stężających. W konsekwencji tego zabiegu nowo powstałe trójkąty tracą swój pierwotny, równoboczny charakter. Ponadto wraz ze wzrostem stopnia aproksymacji sfery i jednoczesnym zmniejszaniem długości poszczególnych krawędzi, gwałtownie rośnie liczba zróżnicowanych typów prętów oraz węzłów, co bezpośrednio przekłada się na wzrost stopnia skomplikowania produkcji oraz całkowitych kosztów realizacji kopuły. Kopuły geodezyjne są bardzo ekonomiczne dla mniejszych rozpiętości z powodu małej liczby różnych prętów i węzłów. Dla dużych rozpiętości często stosuje się inne typy [2].

Geodezyjne

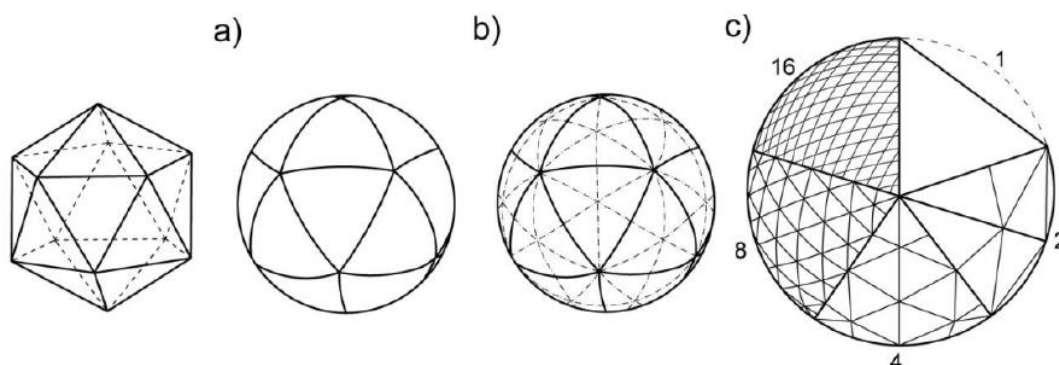


Rys. 38. Siatka geodezyjna [3]

Podobnie jak w poprzednich typach siatek proces rozpoczyna się od zdefiniowania wejściowych parametrów brzegowych geometrii. Podstawowe zmienne to promień podstawy czaszy, jej pożądana wysokość w punkcie centralnym oraz częstotliwość podziału określająca gęstość siatki. Ponieważ struktura nie jest pełną sferą, algorytm w pierwszej kolejności oblicza promień referencyjnej sfery opisującej tę czaszę. Wykorzystywane jest do tego przekształcenie geometryczne wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta utworzonego przez promień podstawy, promień sfery i różnicę między promieniem sfery a wysokością czaszy.

```
11 if H <= 0 or R <= 0:
12     a, b, d = [], [], []
13     c = None
14 else:
15     # Parametry sfery
16     Rsph = (R**2 + H**2) / (2 * H)
17     Zc = H - Rsph
```

Rys. 39. Część kodu do generacji siatki geodezyjnej w. 11-17



Rys. 40. Podział geodezyjny Fullera [3]

Kolejnym etapem jest wygenerowanie bazowej bryły platońskiej w tym przypadku dwudziestościanu foremnego. Kluczowym zabiegiem zastosowanym w kodzie jest nadanie geometrii orientacji zenitalnej. Oznacza to, że dwudziestościan jest budowany tak, aby jeden z jego wierzchołków znajdował się dokładnie na biegunie północnym, a kolejny na południowym. Pozostałe wierzchołki formują dwa poziome, pięciokątne pierścienie. Taka

topologia gwarantuje, że ostateczna siatka geodezyjna będzie posiadała regularny, gwiazdzisty układ w najwyższym punkcie kopuły, co jest pożądane zarówno pod względem estetycznym, jak i konstrukcyjnym.

```

19 # --- 2. Generowanie Dwudziestościanu (Zorientowanego Zenitalnie) ---
20 v_top = rg.Point3d(0, 0, 1)
21 v_bottom = rg.Point3d(0, 0, -1)
22 ring1, ring2 = [], []
23 z_ring = 1.0 / math.sqrt(5.0)
24 r_ring = 2.0 / math.sqrt(5.0)
25
26 for i in range(5):
27     angle1 = i * 2.0 * math.pi / 5.0
28     ring1.append(rg.Point3d(r_ring * math.cos(angle1), r_ring * math.sin(angle1), z_ring))
29
30     angle2 = angle1 + math.pi / 5.0
31     ring2.append(rg.Point3d(r_ring * math.cos(angle2), r_ring * math.sin(angle2), -z_ring))
32
33 verts = [v_top] + ring1 + ring2 + [v_bottom]
34
35 faces = [
36     (0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 4), (0, 4, 5), (0, 5, 1),
37     (1, 6, 2), (2, 7, 3), (3, 8, 4), (4, 9, 5), (5, 10, 1),
38     (6, 7, 2), (7, 8, 3), (8, 9, 4), (9, 10, 5), (10, 6, 1),
39     (11, 7, 6), (11, 8, 7), (11, 9, 8), (11, 10, 9), (11, 6, 10)
40 ]

```

Rys. 41. Część kodu do generacji siatki geodezyjnej w. 19-40

Trzecia faza opiera się na matematycznym podziale każdej z trójkątnych ścian dwudziestościanu. Proces ten, uzależniony od zdefiniowanej częstotliwości podziału, realizowany jest poprzez interpolację współrzędnych barycentrycznych. Algorytm iteruje po lokalnych układach współrzędnych każdej ściany, generując nową siatkę mniejszych trójkątów. Ponieważ wynikowy podział barycentryczny tworzy płaskie siatki rozpięte między wierzchołkami bazy, nowo powstałe węzły muszą zostać rzutowane na powierzchnię docelowej sfery. Skrypt oblicza wektor kierunkowy od środka lokalnego układu do każdego nowego punktu, a następnie normalizuje go i mnoży przez wyliczony wcześniej promień referencyjny sfery, przesuwając go o wektor translacji układu. W efekcie powstaje gładka siatka idealnie wpisana w zadaną krzywiznę. Najbardziej złożonym aspektem algorytmu, odróżniającym go od standardowych generatorów geodezyjnych, jest precyzyjna obsługa strefy przyziemnej. Obiekty architektoniczne wymagają płaskiej i ciągłej podstawy, podczas gdy sferyczna siatka po rzutowaniu generuje poszarpany brzeg. Kod rozwiązuje ten problem dwuetapowo.

```

42 # --- 3. Podział ścian i WSTĘPNE PRZYCIĄGANIE (Pre-Snapping) ---
43 all_face_pts = []
44
45 for face in faces:
46     vA, vB, vC = verts[face[0]], verts[face[1]], verts[face[2]]
47     face_pts = {}
48     for i in range(freq + 1):
49         for j in range(freq + 1 - i):
50             k = freq - i - j
51             px = (vA.X*i + vB.X*j + vC.X*k) / float(freq)
52             py = (vA.Y*i + vB.Y*j + vC.Y*k) / float(freq)
53             pz = (vA.Z*i + vB.Z*j + vC.Z*k) / float(freq)
54             length = math.sqrt(px**2 + py**2 + pz**2)
55
56             sph_pt = rg.Point3d((px/length)*Rsph, (py/length)*Rsph, (pz/length)*Rsph + Zc)
57             face_pts[(i, j)] = sph_pt
58     all_face_pts.append(face_pts)

```

Rys. 42. Część kodu do generacji siatki geodezyjnej w. 42-58

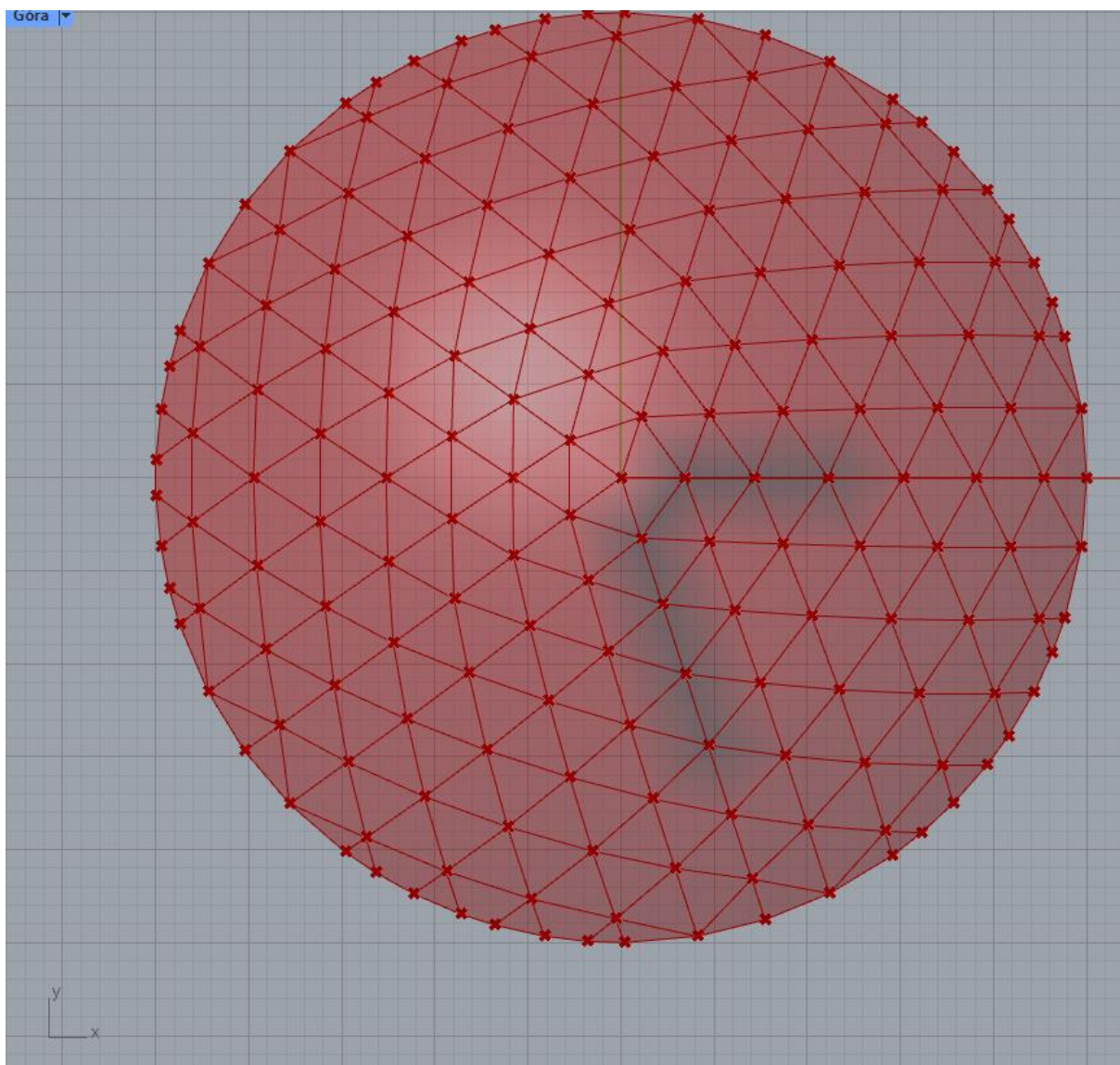
Węzły siatki, które w wyniku rzutowania znalazły się bardzo blisko zdefiniowanego promienia podstawy i płaszczyzny zerowej, są automatycznie przyciągane idealnego okręgu podstawy. Odbywa się to w ramach ustalonej tolerancji matematycznej, proporcjonalnej do średniej długości krawędzi siatki. Eliminuje to powstawanie mikroskopijnych, niekonstrukcyjnych segmentów u podstawy kopuły.

```

85 # --- 4. Precyzyjne docinanie (dla prętów, które nie złapały się na snap) ---
86 unique_lines = []
87 seen_lines = set()
88 output_nodes_dict = {}
89 base_points = []
90
91 def get_key(pt):
92     return "{:.4f},{:.4f},{:.4f}".format(pt.X, pt.Y, pt.Z)
93
94 tol = 1e-4

```

Rys. 43. Część kodu do generacji siatki geodezyjnej w. 85-94



Rys. 44. Widok z góry na wygenerowaną siatkę geodezyjną.

Odcinki siatki, które przecinają płaszczyznę fundamentu, są poddawane operacji docinania. Skrypt wykorzystuje interpolację liniową, stosunek głębokości do całkowitej różnicy wysokości punktów w celu znalezienia dokładnego punktu przebicia płaszczyzny zerowej przez dany pręt. Punkty znajdujące się całkowicie poniżej poziomu odniesienia są odrzucane. W ten sposób powstaje zamknięty zbiór unikalnych krawędzi, formujący czysty rzut struktury na grunt, zwieńczony wygenerowanym na końcu poziomym pierścieniem zamykającym.

```

136     # --- 5. Tworzenie poziomego pierścienia zamykającego ---
137     unique_base_points = []
138     seen_base_keys = set()
139
140     for pt in base_points:
141         k = get_key(pt)
142         if k not in seen_base_keys:
143             seen_base_keys.add(k)
144             unique_base_points.append(pt)
145
146     unique_base_points.sort(key=lambda pt: math.atan2(pt.Y, pt.X))
147 
```

Rys. 45. Część kodu do generacji konstrukcji parametrycznej 136-146

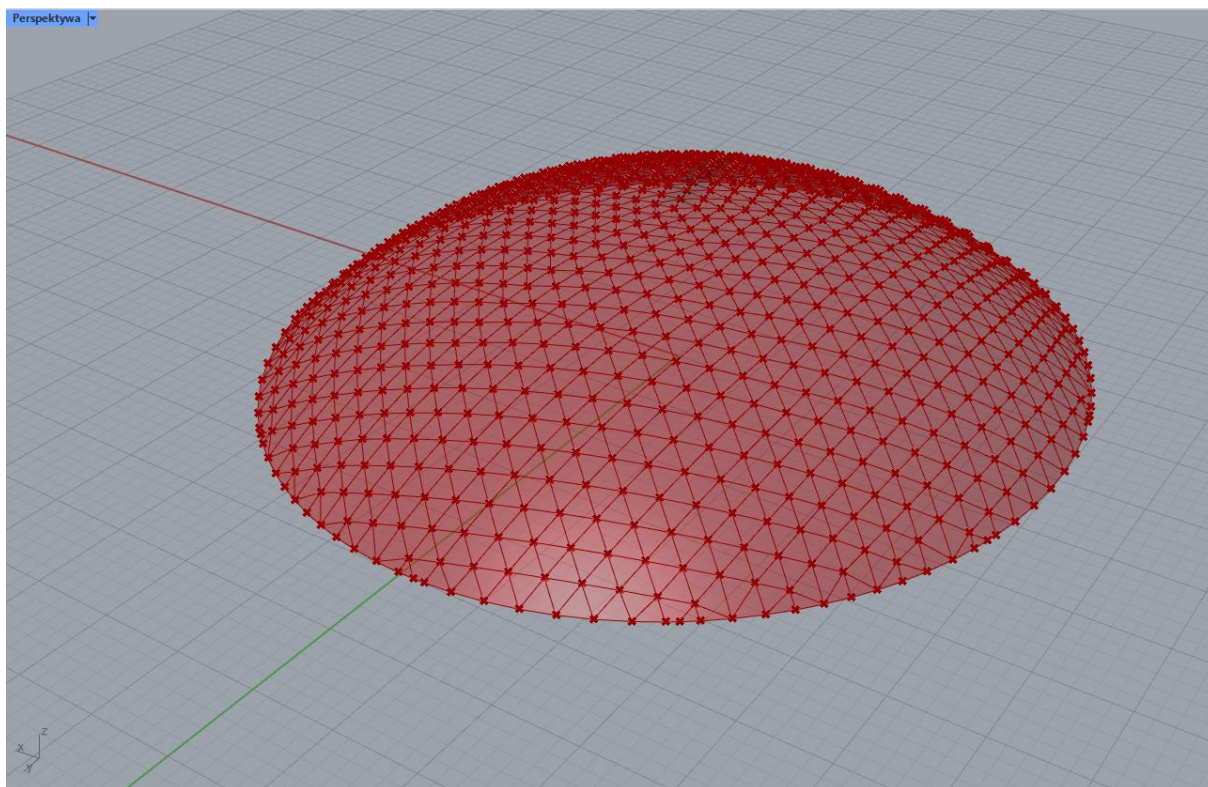
Finalnym krokiem jest przełożenie wygenerowanych analitycznie punktów i krawędzi na spójny, trójwymiarowy obiekt siatki wielokątnej. Jeżeli wszystkie wierzchołki danego trójkąta znajdują się powyżej płaszczyzny odniesienia, ściana jest dodawana bezpośrednio. Natomiast trójkąty przecinające podstawę są rozcinane analitycznie. W zależności od tego, ile wierzchołków znajduje się powyżej a ile poniżej płaszczyzny, oryginalny trójkąt jest zastępowany nowym, mniejszym trójkątem lub czworokątem, podzielonym wewnątrz na dwa trójkąty w celu zachowania planarności, których dolne krawędzie idealnie pokrywają się z okręgiem podstawy. Ostatnim działaniem jest unifikacja wektorów normalnych siatki, co zapewnia jej poprawną orientację przestrzenną gotową do dalszych analiz inżynierskich lub renderowania.

```

162     # --- 6. Generowanie siatki (Mesh) ---
163     c_mesh = rg.Mesh()
164     mesh_verts_dict = {}
165
166     def get_mesh_vert(pt):
167         k = get_key(pt)
168         if k not in mesh_verts_dict:
169             idx = c_mesh.Vertices.Add(pt)
170             mesh_verts_dict[k] = idx
171             return idx
172         return mesh_verts_dict[k]
173
174     def intersect_z0_mesh(p_above, p_below):
175         t = p_above.Z / (p_above.Z - p_below.Z)
176         px = p_above.X + t * (p_below.X - p_above.X)
177         py = p_above.Y + t * (p_below.Y - p_above.Y)
178         planar_r = math.sqrt(px**2 + py**2)
179         if planar_r > 1e-4:
180             px = (px / planar_r) * R
181             py = (py / planar_r) * R
182         return rg.Point3d(px, py, 0.0)

```

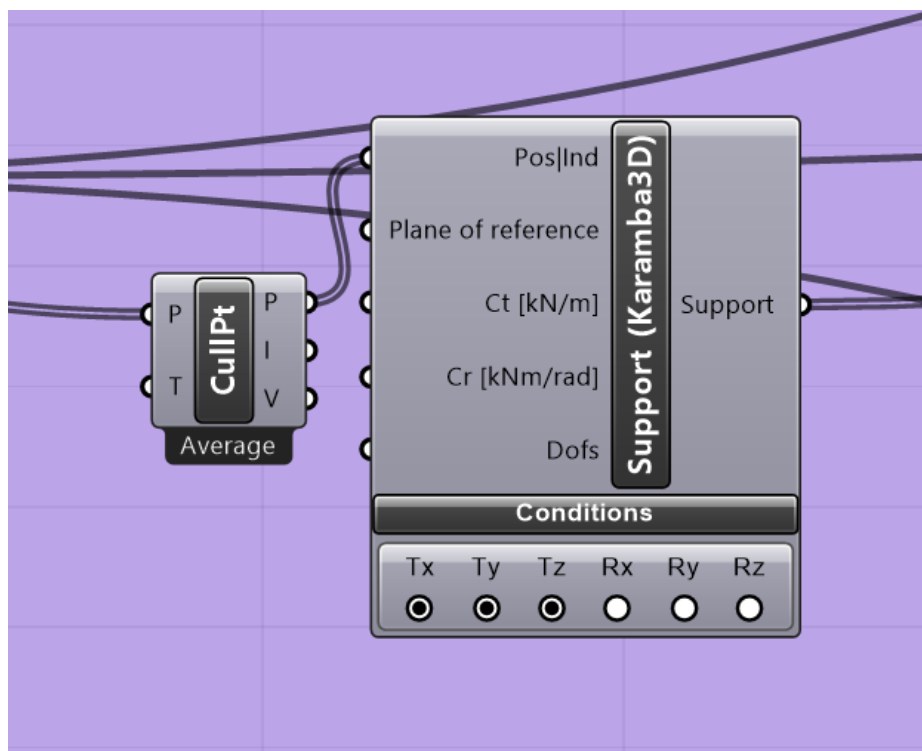
Rys. 46. Część kodu do generacji siatki geodezyjnej w. 162-182



Rys. 47. Część kodu do generacji konstrukcji parametrycznej

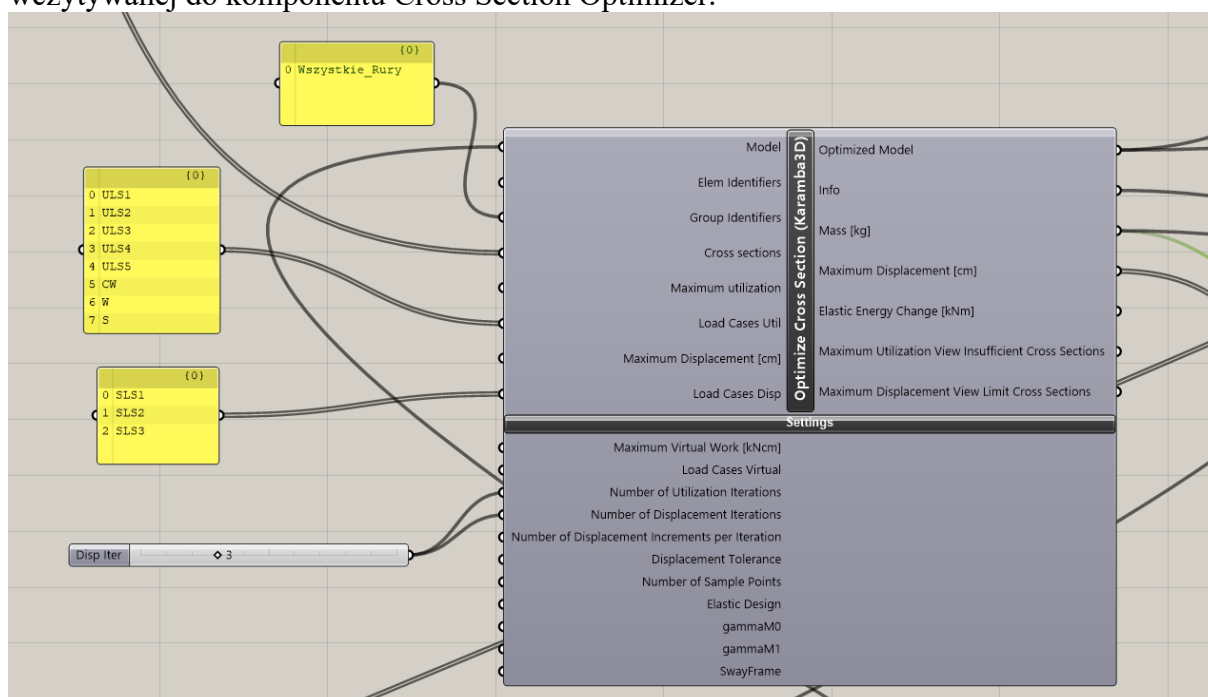
5.3 Budowa modelu obliczeniowego Karamba3D

Proces budowy modelu obliczeniowego w środowisku Grasshopper z wykorzystaniem wtyczki Karamba3D rozpoczyna się od precyzyjnego zdefiniowania warunków brzegowych, które determinują schemat statyczny konstrukcji. W analizowanym modelu wykorzystano komponent Support służący do opisu więzi w węzłach podpierających kopułę. Selekcja węzłów, które podlegają podparciu, realizowana jest w sposób dynamiczny poprzez komponent CullPt, który na podstawie kryterium geometrycznego - wyznaczenia punktów o najniższej rzędnej wysokościowej, automatycznie przypisuje warunki brzegowe do obwodu konstrukcji, niezależnie od stopnia zagęszczenia siatki wynikającego ze zmiany parametru rozmiaru prętów. W ramach przyjętych warunków brzegowych zdefiniowano pełną blokadę przesunięć w kierunkach głównych układu współrzędnych T_x , T_y , T_z , co w praktyce projektowej odpowiada modelowi idealnego przegubowego podparcia konstrukcji wzdłuż pierścienia podstawy. Jednocześnie pozostawiono swobodę rotacji w osiach R_x , R_y oraz R_z , co odzwierciedla typową dla struktur typu pręty elementów prętowych, w których dąży się do ograniczenia momentów zginających w węzłach podporowych, wymuszając dominację sił osiowych w ścieżce przekazywania obciążeń na fundament. Tak przygotowana definicja warunków brzegowych stanowi stabilną podstawę dla dalszej analizy statycznej, umożliwiając generację macierzy sztywności oraz rzetelną ocenę zachowania struktury pod wpływem założonych obciążeń.



Rys. 48. Komponent do zadawania warunków brzegowych Karamba3D

Proces wymiarowania elementów prętowych kopuły oparto na automatycznej iteracji w oparciu o zdefiniowaną listę dostępnych profili stalowych. W celu zapewnienia racjonalnego zużycia materiału przy zachowaniu wymogów nośności, zastosowano szereg profili prostokątnych zamkniętych typu RHS, które zostały zestawione w formie biblioteki Cross Section Table wczytywanej do komponentu Cross Section Optimizer.



Rys. 49. Komponent Optimize Cross Section Karamba3D

W procesie wymiarowania konstrukcji przyjęto założenie o jednorodności przekrojów poprzecznych, co oznacza, że wszystkie elementy prętowe kopuły charakteryzują się

identyczną geometrią. Do wymiarowania wykorzystano listę dostępnych profili zamkniętych typu RHS, z której algorytm optymalizacyjny Karamba3D wybiera przekrój optymalny dla całego układu. W tym podejściu optymalizacja nie jest prowadzona indywidualnie dla każdego pręta, lecz odbywa się w odniesieniu do najbardziej wyężonego elementu w konstrukcji.

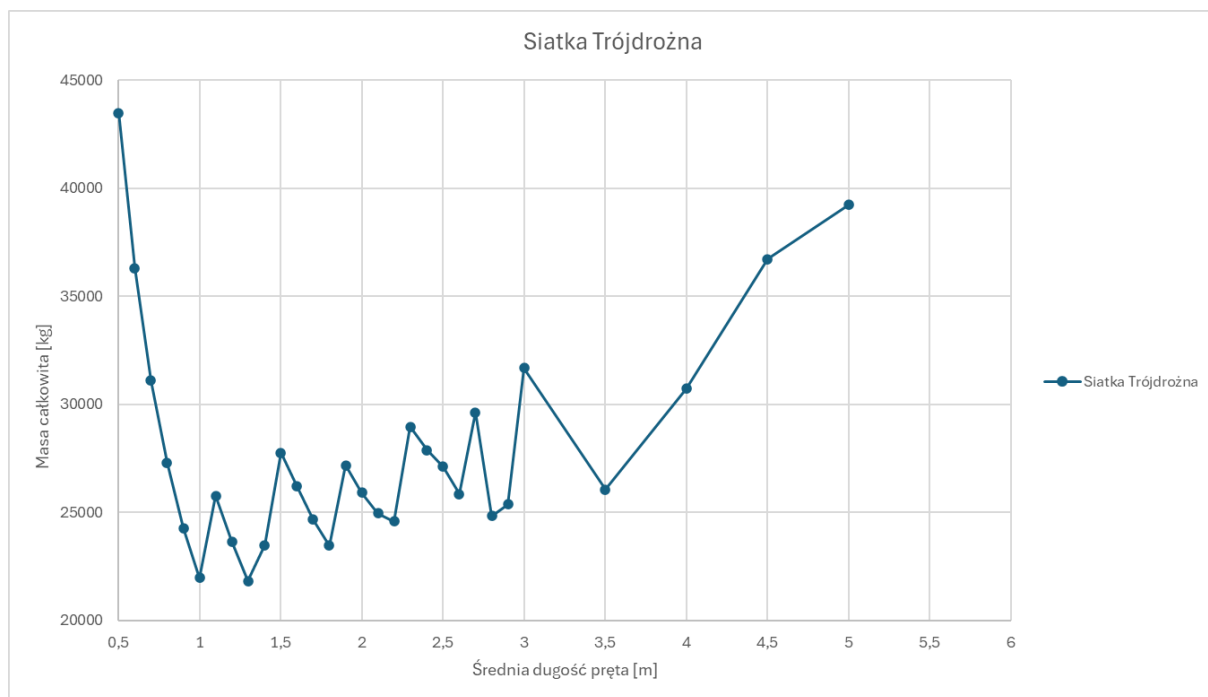
Algorytm weryfikuje wyężenie wszystkich prętów w modelu, a następnie dobiera z zdefiniowanej listy jeden, wspólny profil RHS, który spełnia warunki nośności SGN oraz użyteczności SGU dla całego ustroju. Takie podejście projektowe, wymuszające zastosowanie jednakowych profili w całej strukturze, posiada istotne uzasadnienie technologiczne i ekonomiczne, znacząco upraszcza prefabrykację elementów, standaryzuje detale połączeń węzłowych oraz redukuje koszty logistyczne i montażowe. Mimo iż jednorodność przekrojów może prowadzić do nieznacznego przewymiarowania elementów w strefach o mniejszym wyężeniu, zapewnia ona pożądaną powtarzalność geometryczną, która jest kluczowa dla estetyki i sprawniej realizacji wielkopowierzchniowych struktur typu kopułowego.

W procesie definiowania modelu obliczeniowego przyjęto parametry obciążeń klimatycznych właściwe dla lokalizacji w Gostyniu, zgodnie z wymaganiami norm PN-EN 1991-1-3 oraz PN-EN 1991-1-4. Wybór tej lokalizacji skutkuje przyjęciem I strefy obciążenia śniegiem oraz I strefy obciążenia wiatrem, co stanowi podstawę do wyznaczenia wartości charakterystycznych oddziaływań.

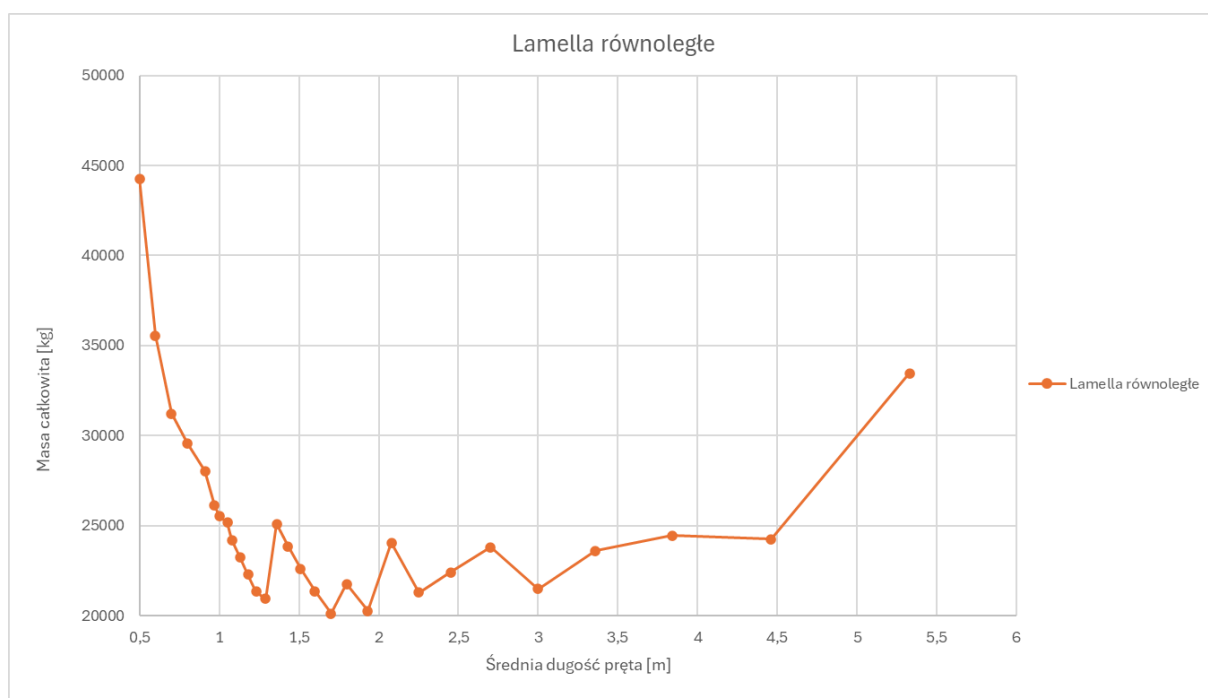
5.4 Wyniki optymalizacji generatywnej

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowa analiza efektywności materiałowej wybranych typów siatek strukturalnych, zaprojektowanych dla kopuły o promieniu bazowym 25 m oraz wyniosłości 10 m. Przyjęta geometria obiektu stanowi punkt wyjścia do parametrycznego badania wpływu topologii siatki na całkowitą masę konstrukcji stalowej. Obliczenia oraz proces optymalizacji parametrów modelu przeprowadzono przy użyciu środowiska Karamba3D, co pozwoliło na iteracyjne badanie wpływu rozpiętości prętów na sztywność i masę własną konstrukcji. Optymalizacja w programie Karamba3D opiera się na wyężeniu prętów, według ograniczeń normowych określonych w Eurokodzie PN-EN 1993-1-1 dla konstrukcji stalowych.

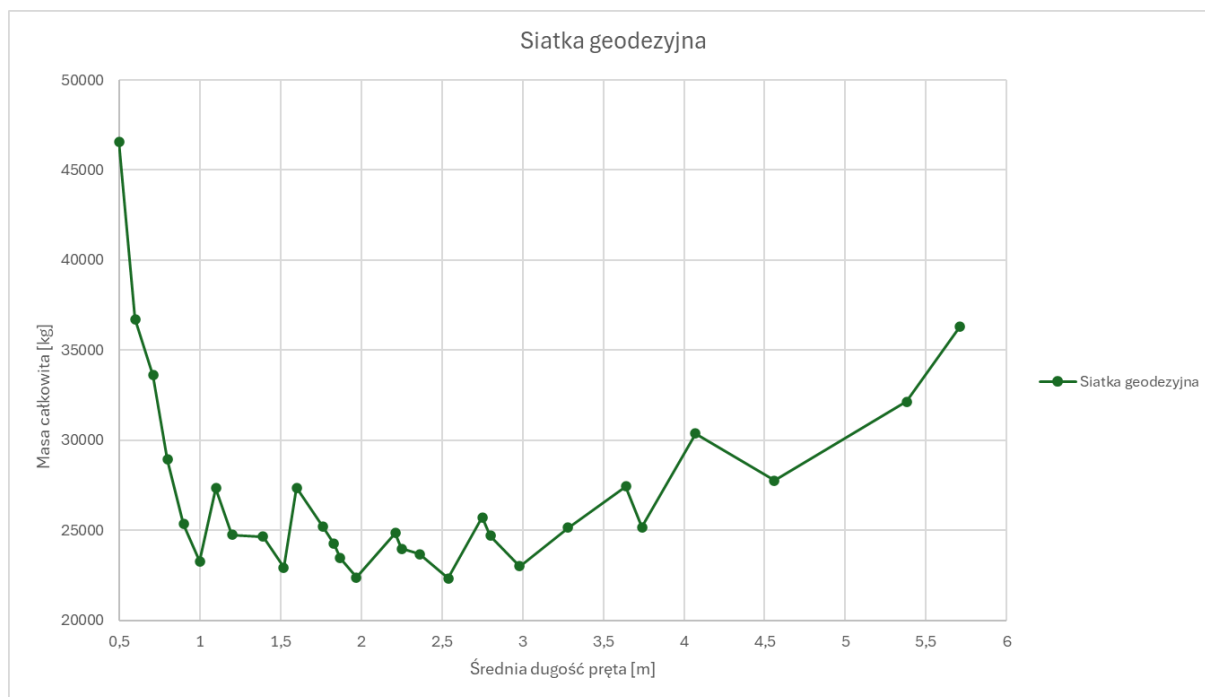
Aby najlepiej porównać wyniki dla różnych topologii, analiza skupia się na zidentyfikowaniu optymalnego zakresu średniej długości elementu, przy którym masa własna struktury osiąga wartość minimalną, takie założenie umożliwia nam zaobserwowanie zależności ciężaru konstrukcji od długości prętów przekrycia. Badanie to jest kluczowe z punktu widzenia projektowania konstrukcji tego typu, gdzie znalezienie balansu między liczbą węzłów, ich masą a sztywnością elementów prętowych determinuje ekonomię oraz wykonalność obiektu. Uzyskane charakterystyki pozwalają na ocenę wrażliwości każdego z typów siatek na zmiany parametrów geometrycznych oraz wyznaczenie obszarów optymalnych, w których konstrukcja wykazuje największe wykorzystanie przy zachowaniu założonych ograniczeń projektowych.



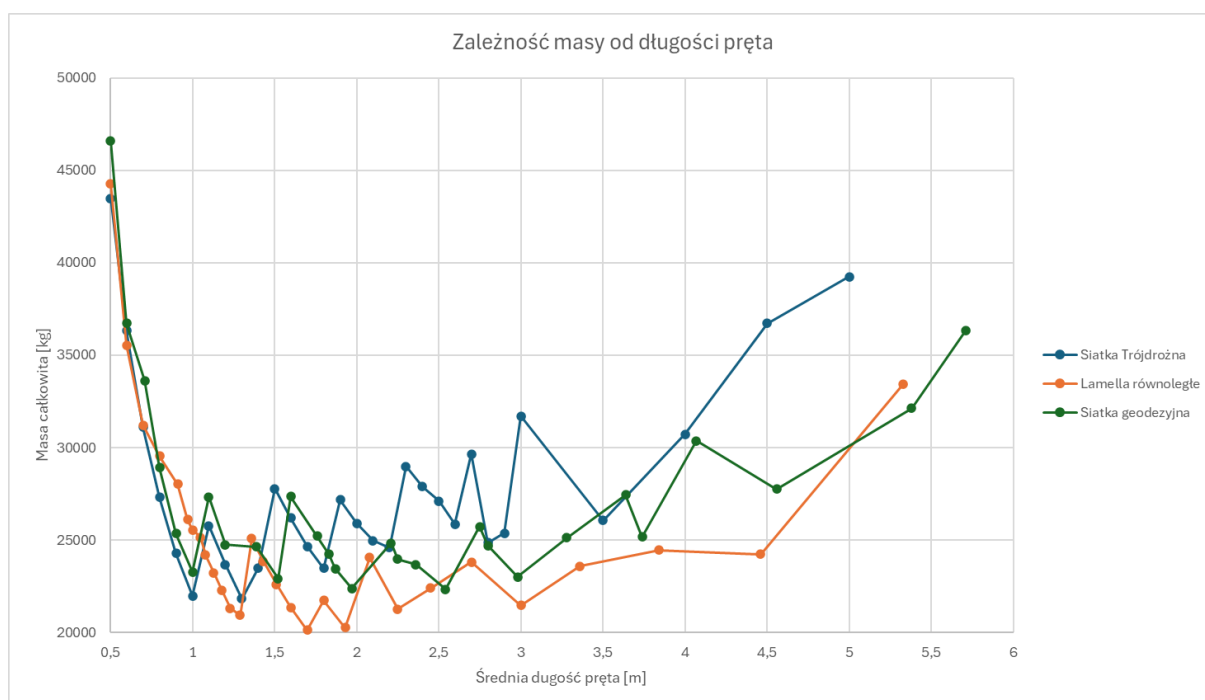
Rys. 50. Wykres zużycia stali dla siatki trójdrożnej



Rys. 51. Wykres zużycia stali dla siatki Lamella równoległe



Rys. 52. Wykres zużycia stali dla siatki geodezyjnej



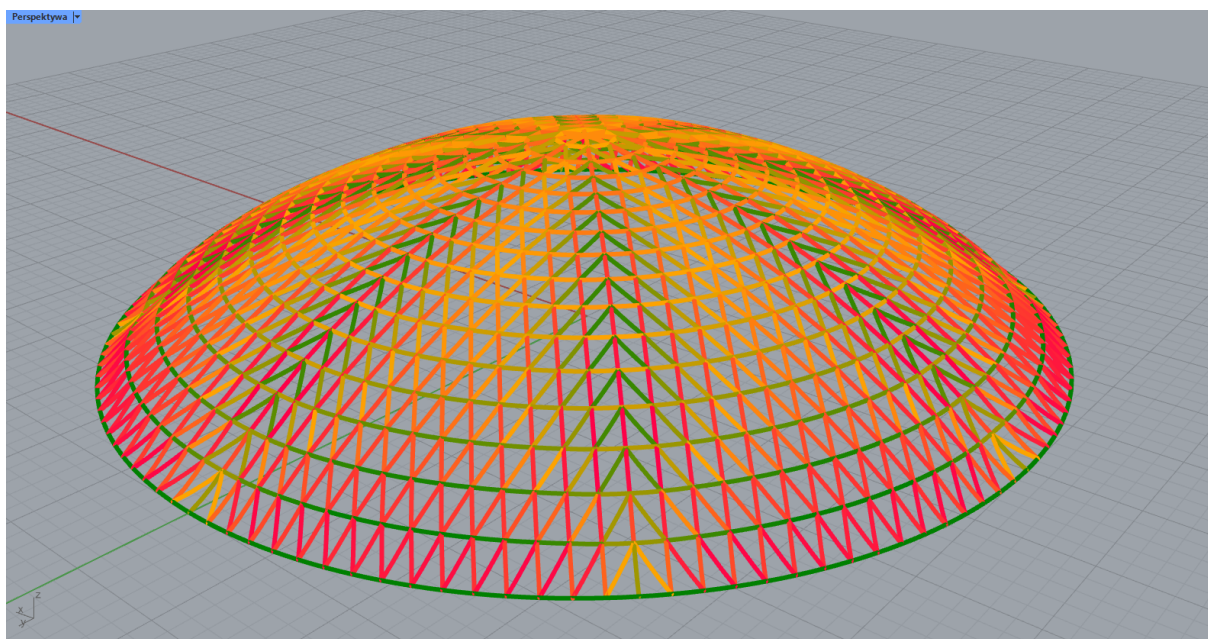
Rys. 53. Scalone wykresy zużycia stali

Analiza otrzymanych wyników pozwala na sformułowanie wniosków dotyczących optymalizacji materiałowej badanych typów siatek strukturalnych. Dla wszystkich analizowanych modeli siatki geodezyjnej, lamelli równoległych oraz siatki trójdrożnej, zaobserwowano nieliniową zależność między średnią długością pręta a całkowitą masą konstrukcji, charakteryzującą się występowaniem wyraźnego minimum globalnego.

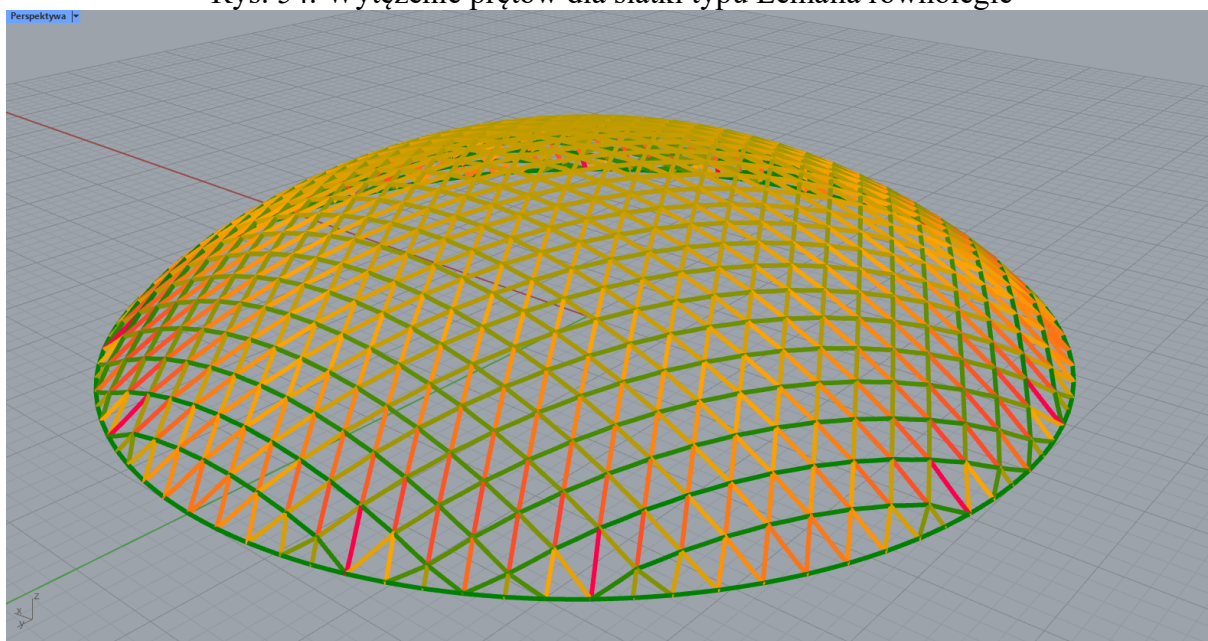
W początkowym zakresie badanych długości, dla wartości poniżej 1,0 m, odnotowano gwałtowny wzrost masy całkowitej, co jest wynikiem nadmiernego zagęszczenia węzłów konstrukcyjnych oraz zwiększonego udziału masy połączeń w ogólnym bilansie materiałowym. Wraz ze wzrostem średniej długości pręta, masa konstrukcji ulega systematycznej redukcji, osiągając wartości optymalne w przedziale od 1,2 m do 2,0 m. Powyżej tego zakresu trend ulega odwróceniu, a masa zaczyna ponownie rosnąć, jest to zjawisko typowe dla konstrukcji prętowych, wynikające z konieczności zwiększania przekrojów poprzecznych elementów w celu zapewnienia odpowiedniej sztywności oraz spełnienia warunków bezpieczeństwa w stanach granicznych nośności i użytkowości. Podczas optymalizacji nie zostały uwzględnione ugięcia lokalne prętów, z powodu braku takiej możliwości w programie Karamba3D. Głównym warunkiem decydującym o zwiększeniu przekroju było wyłączenie pręta ze względu na siłę osiową.

Porównując poszczególne typy układów geometrycznych, siatka geodezyjna oraz lamella równoległa wykazują najbardziej stabilne charakterystyki, co wskazuje na wyższą przewidywalność ich zachowania w procesie optymalizacji wymiarowej. Siatka trójdrożna, mimo zbliżonej wartości minimalnej masy, charakteryzuje się większą zmiennością wyników w funkcji długości pręta, co może być implikowane specyficznym sposobem dystrybucji sił wewnętrznych oraz geometrycznymi ograniczeniami wynikającymi z samej topologii układu. Podsumowując, w zakresie długości 1,25-2,0 m stanowi rekomendowany obszar projektowy, pozwalający na uzyskanie najniższego zużycia materiału przy zachowaniu ciągłości geometrycznej siatki. Dalsze prace badawcze będą koncentrować się na weryfikacji sztywności giętnej oraz analizie stanów granicznych użytkowości SGU dla wytypowanego wariantu, w programie RFEM.

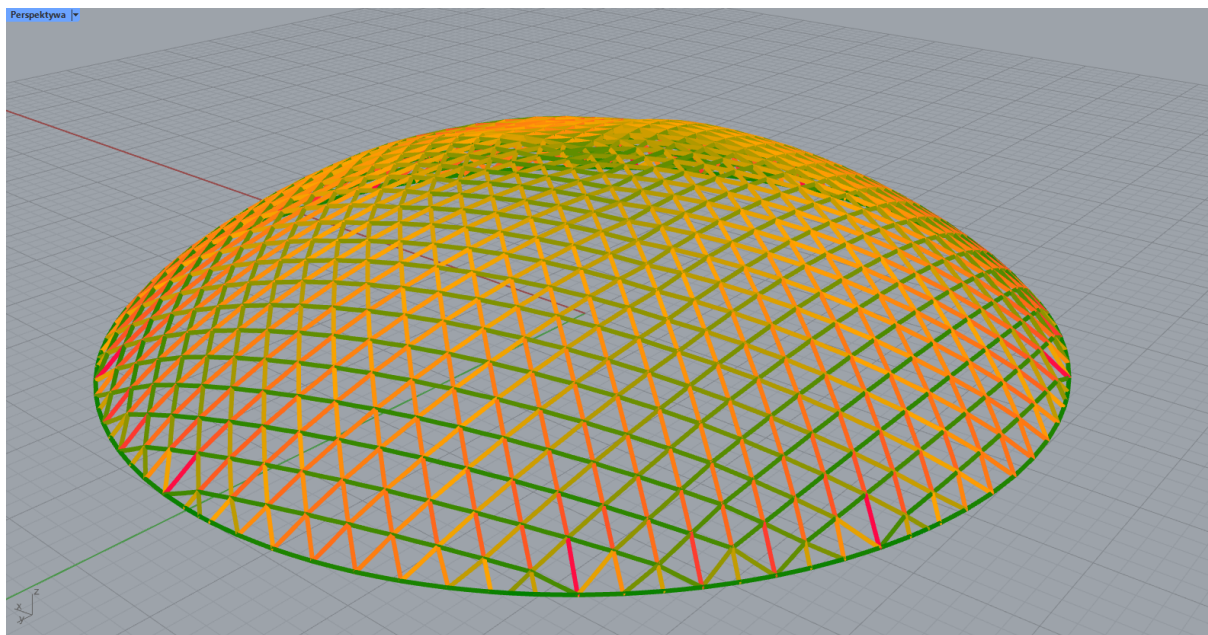
Do dalszej części obliczeń wybrano najbardziej korzystny wariant do wybudowania, siatkę typu Lamella o średniej długości pręta równej 1,7 m, gdzie masa całkowita wynosi 20 t. Decyzja o przyjęciu długości pręta z górnej granicy wskazanego przedziału projektowego jest podyktowana istotnymi względami technologicznymi oraz wykonawczymi. Zastosowanie dłuższych elementów liniowych skutkuje bezpośrednio redukcją całkowitej liczby węzłów konstrukcyjnych w układzie. W skali całego obiektu przekłada się to na znaczące zmniejszenie zakresu niezbędnych prac spawalniczych, co minimalizuje ryzyko powstawania imperfekcji montażowych i naprężeń resztkowych. Ponadto, mniejsza liczba elementów składowych oraz połączeń determinuje łatwiejszy i szybszy proces montażu konstrukcji na placu budowy, optymalizując tym samym koszty wykonawstwa oraz skracając całkowity czas realizacji inwestycji.



Rys. 54. Wytężenie prętów dla siatki typu Lemalla równoległe



Rys. 55. Wytężenie prętów dla siatki trójdrożnej



Rys. 56. Wytyżenie prętów dla siatki geodezyjnej

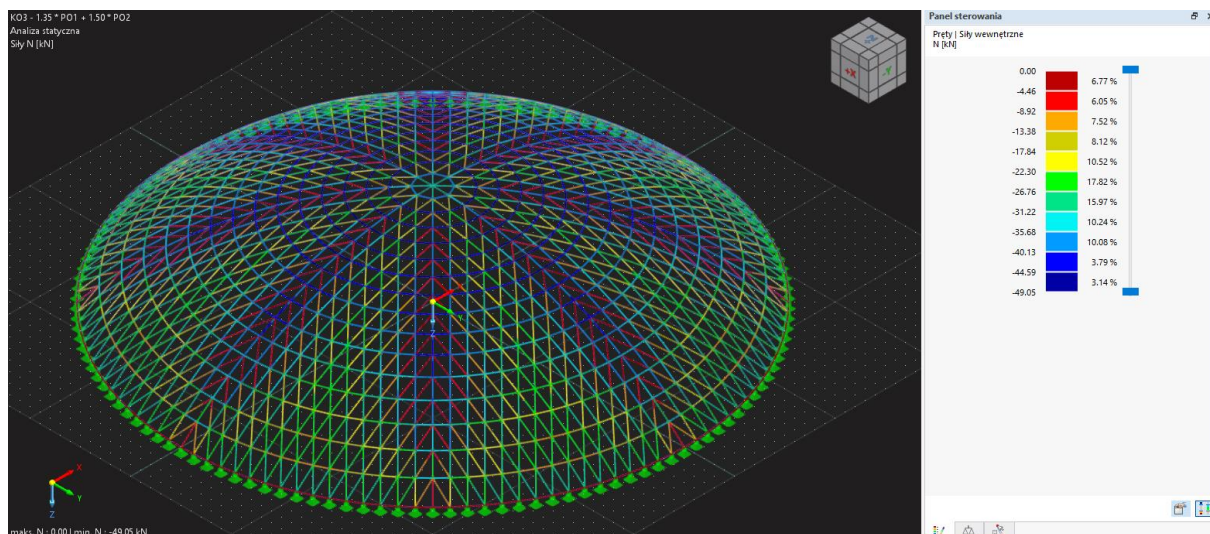
W kopułach trójdrożnej oraz geodezyjnej rozkład wytyżeń wykazuje znaczną nieregularność, objawiającą się występowaniem rozproszonych, pojedynczych prętów o skrajnie wysokim poziomie naprężeń w sąsiedztwie elementów niemal całkowicie niewytyżonych. Taka lokalna koncentracja naprężeń jest zjawiskiem niekorzystnym inżyniersko, ponieważ pojedyncze, przeciążone pręty determinują konieczność przewymiarowania całej rodziny profili, co prowadzi do drastycznego spadku efektywności ekonomicznej konstrukcji. Z kolei struktura typu Lamella wykazuje wysoce regularny, pasmowy rozkład wytyżeń. Obszary o wyższych naprężeniach układają się w sposób płynny wzdłuż południkowych żeber i pierścieni.

Najlepsza wydajność strukturalna kopuły typu Lamella wynika bezpośrednio z cech geometrycznych jej siatki prętowej. Struktura ta opiera się na wyraźnie zdefiniowanych, ciągłych żebrach południkowych oraz pierścieniach równoleżnikowych, które są spięte skratowaniami. Taki układ geometryczny idealnie wpisuje się w naturalny przepływ sił wewnętrznych w powłoce sferycznej poddanej obciążeniom grawitacyjnym, gdzie dominują siły południkowe oraz siły obwodowe. Ciągłość prętów głównych w kopule Lamella minimalizuje lokalne momenty zginające wynikające z mimośrodów węzłowych, przenosząc obciążenia głównie poprzez osiowe siły podłużne jako czysta praca powłokowa.

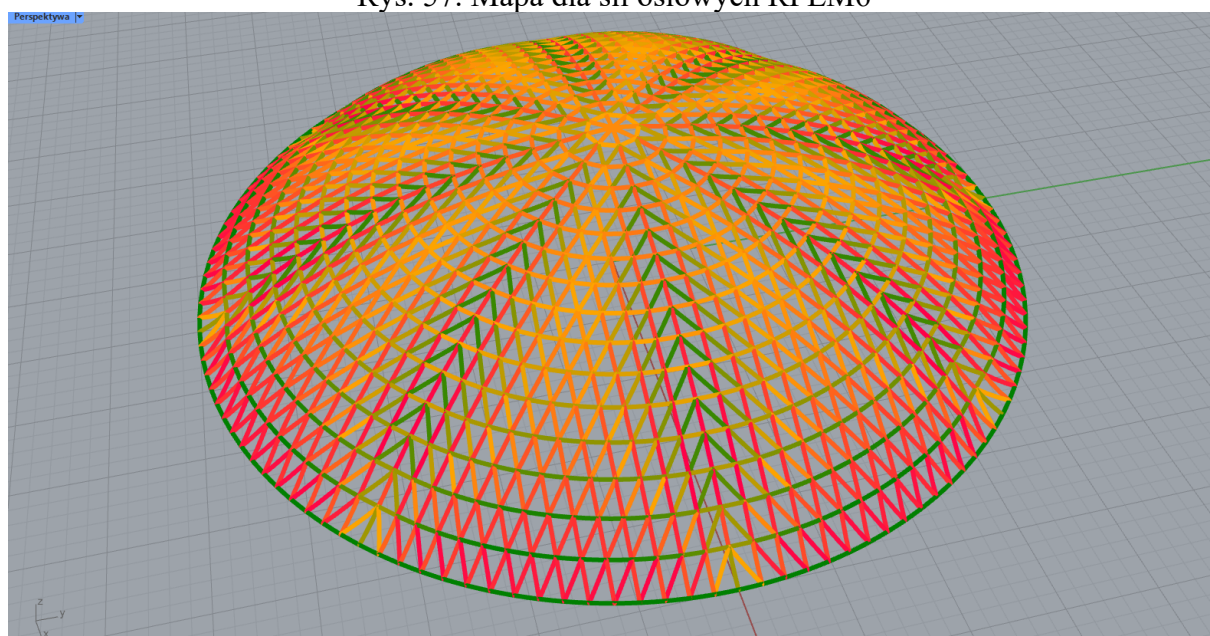
W przypadku siatki trójdrożnej i geodezyjnej, dążenie do uzyskania zbliżonych długości prętów trójkątnych wymusza lokalne zaburzenia ciągłości głównych linii przesyłu sił. Powoduje to, że geometryczna siatka nie pokrywa się optymalnie z liniami naprężeń głównych powłoki. W konsekwencji w wielu węzłach dochodzi do gwałtownej zmiany sztywności i kierunku przepływu sił, co indukuje dodatkowe, lokalne momenty zginające i skręcające w prętach. Te dodatkowe efekty drugorzędne, nakładając się na siły osiowe, generują lokalne piki wytyżenia widoczne w modelach trójdrożnym i geodezyjnym. Podsumowując, kopuła typu Lamella zapewnia najbardziej naturalną i bezpośrednią ścieżkę przekazywania obciążeń na podpory, co pozwala na optymalne i równomierne wykorzystanie nośności plastycznej materiału w całym ustroju, czyniąc ją pod względem mechanicznym najlepszym wariantem konstrukcyjnym.

6 Obliczenia statyczno-wytrzymałościowe i wymiarowanie konstrukcji

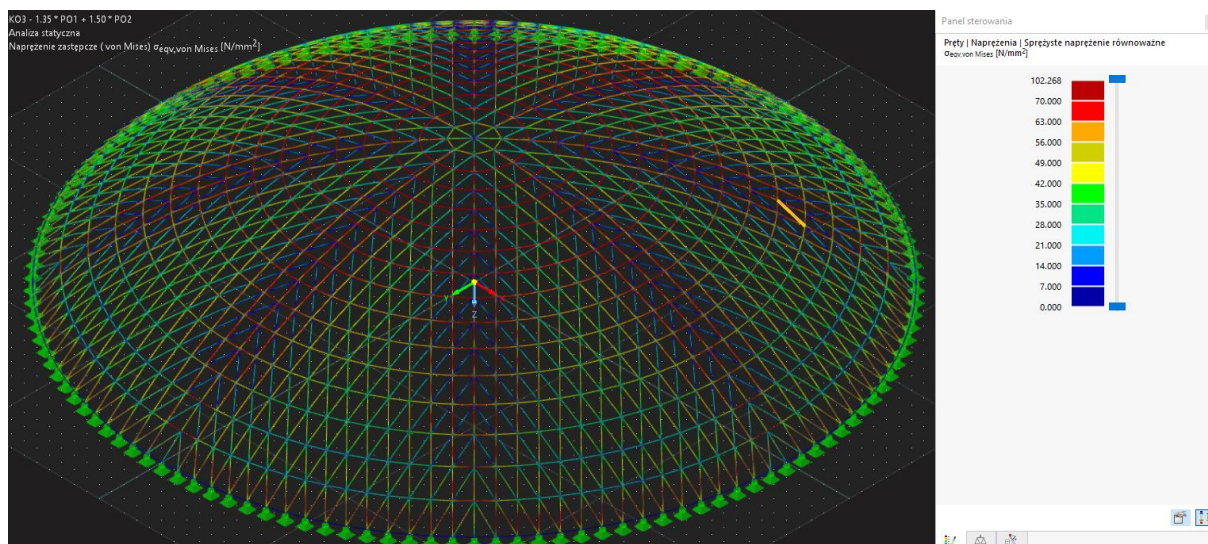
6.1 Porównanie wykresów sił osiowych



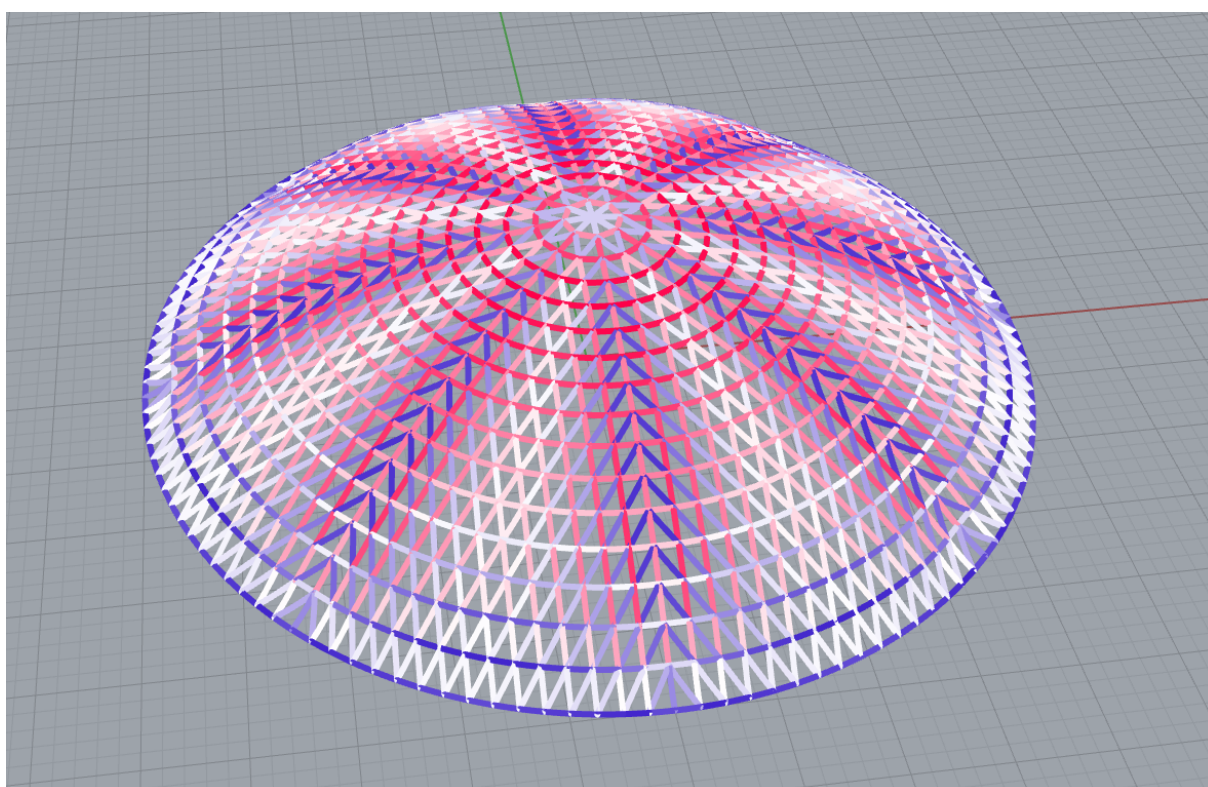
Rys. 57. Mapa dla sił osiowych RFEM6



Rys. 58. Mapa wyężenia prętów od sił osiowych Karamba3D



Rys. 59. Mapa naprężeń Misesa RFEM6



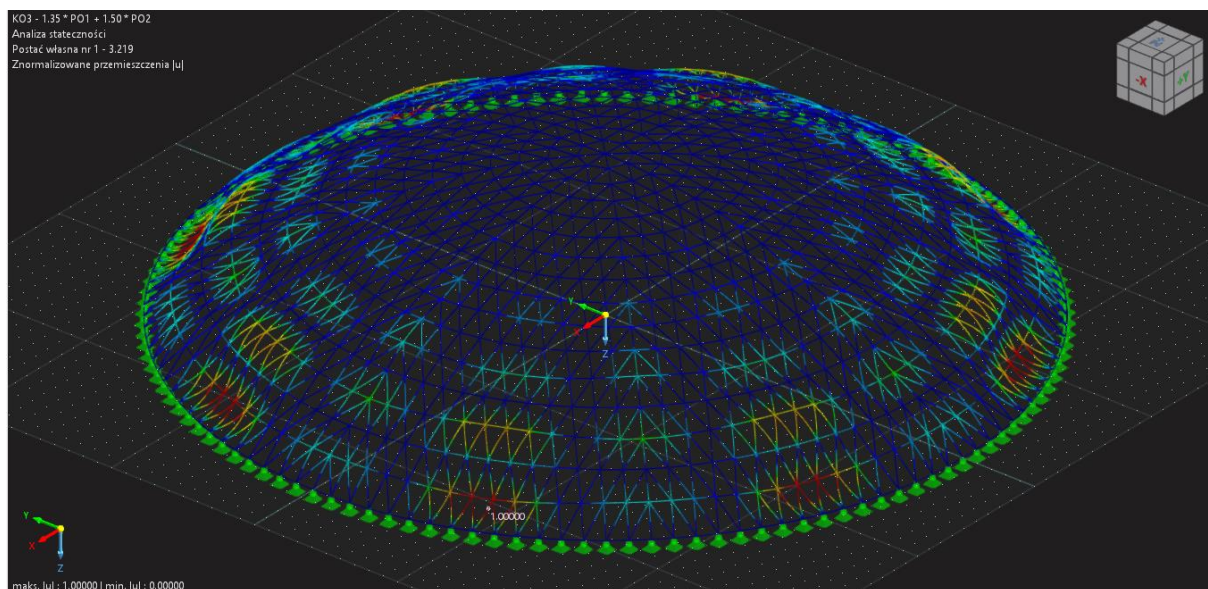
Rys. 60. Mapa naprężeń Misesa Karamba3D

Przeprowadzona analiza porównawcza wyników obliczeń uzyskanych w programach RFEM 6 oraz Karamba3D potwierdza poprawność przyjętego modelu numerycznego badanej kopuły siatkowej. Wygenerowane mapy konturowe wykazują bardzo wysoką zgodność topologiczną i jakościową w zakresie zidentyfikowanych ścieżek przekazywania obciążeń, a dystrybucja wyężenia materiału przyjmuje w obu przypadkach regularny, osiowosymetryczny charakter wynikający z geometrii układu. Zaobserwowano, że głównymi elementami nośnymi struktury są żebra południkowe, a najwyższe koncentracje sił i naprężeń lokalizują się w strefie przypodporowej, obejmując dolne pierścienie oraz pręty zbiegające się bezpośrednio w węzłach. W kierunku klucza kopuły widoczny jest płynny gradient spadkowy, gdzie elementy

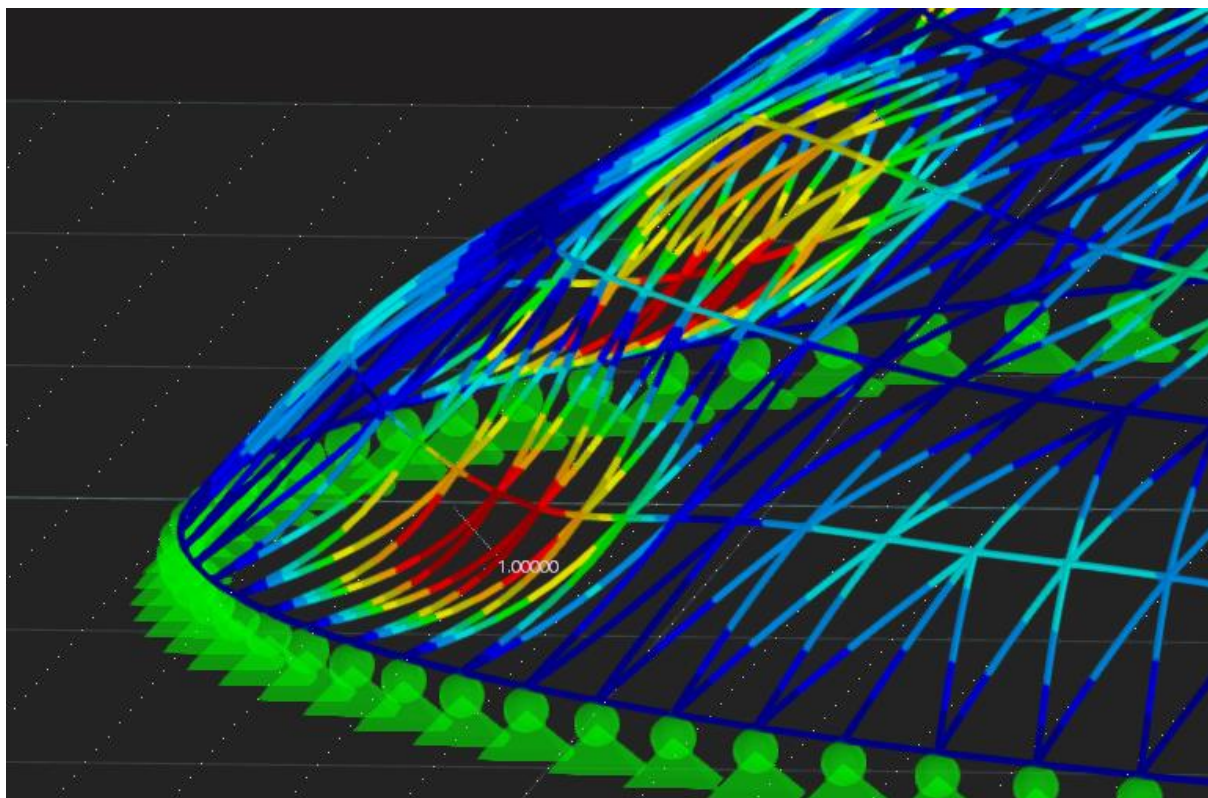
ukośne skratowania oraz wyższe partie pierścieni poziomych wykazują relatywnie niski poziom wyężenia statycznego.

Mimo spójności fizycznej obrazu pracy statycznej, oba programy stosują odmienną strategię prezentacji graficznej, co modyfikuje interpretację wizualną parametrów. Środowisko RFEM 6 obrazuje rozkład wartości sił osiowych na poszczególnych prętach za pomocą dyskretnej, wielobarwnej palety, gdzie dominacja wartości ujemnych jednoznacznie dowodzi, iż konstrukcja pracuje przede wszystkim na ściskanie. Z kolei model z programu Karamba3D przedstawia płynnie interpolowaną mapę wyężenia elementów, odzwierciedlającą stopień wykorzystania nośności ich przekrojów poprzez gradient kolorów, co optycznie upodabnia ustrój prętowy do ciągłej powłoki. Zarejestrowana zgodność rezultatów świadczy o poprawnym przetransferowaniu modelu parametrycznego z zachowaniem ciągłości prętów, topologii węzłów oraz właściwej aplikacji warunków brzegowych. Opisana spójność dwóch niezależnych narzędzi obliczeniowych stanowi istotny dowód poprawności założeń modelowych i strukturę referencyjną do dalszych procedur optymalizacyjnych.

6.2 Analiza stateczności



Rys. 61. Pierwsza postać utraty stateczności



Rys. 62. Pierwsza postać utraty stateczności

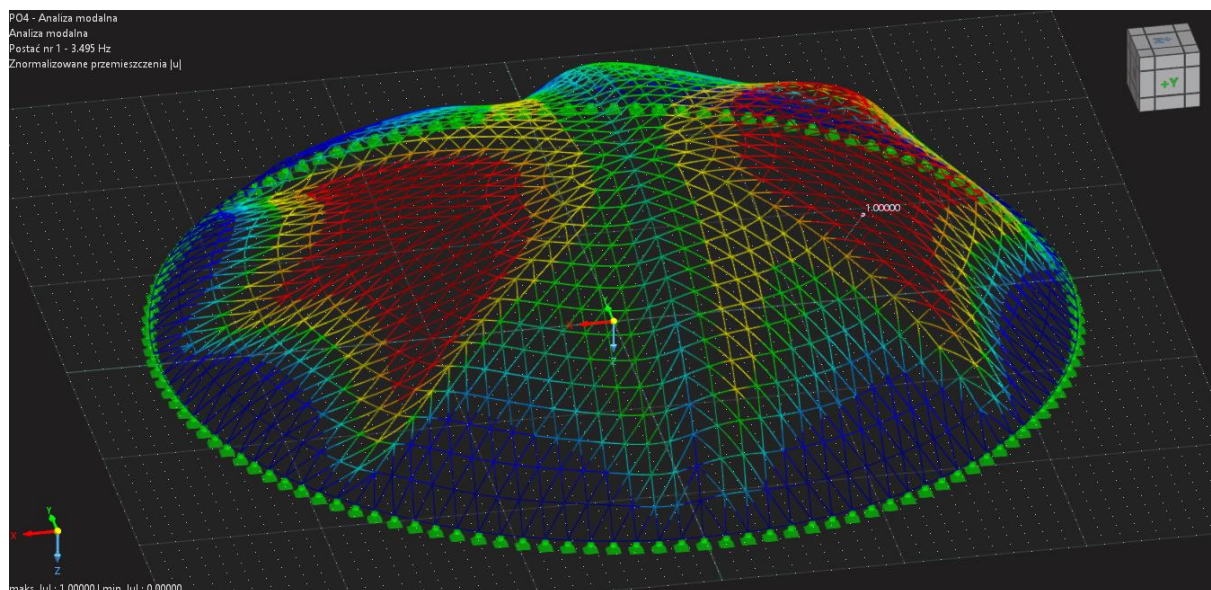
Postać nr	Współczynnik obciążenia krytycznego f [--]	Współczynnik powiększenia α [--]
1	3,219	1,451
2	3,224	1,450
3	3,224	1,450
4	3,238	1,447

Rys. 63. Wartość współczynnika krytycznego dla kolejnych form utraty stateczności

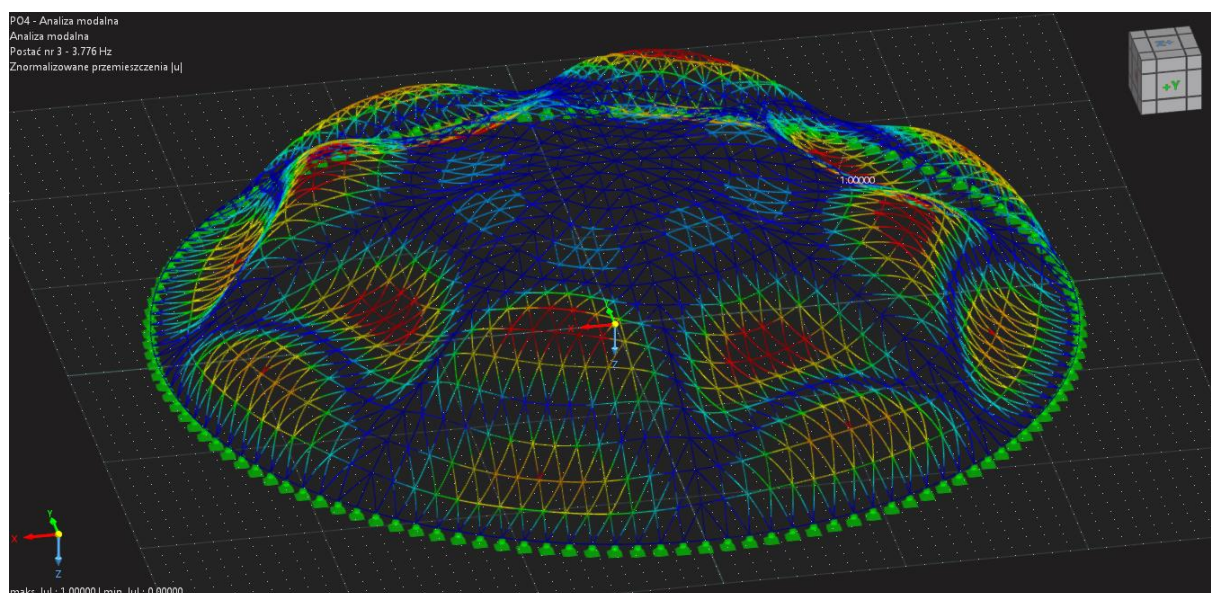
Analiza wizualna mapy przemieszczeń jednoznacznie wskazuje globalny, charakter utraty stateczności. Deformacje wyboczeniowe nie obejmują całej powłoki dachu, lecz koncentrują się w wyizolowanych panelach zlokalizowanych w strefie przypodporowej, w obrębie najniższych partii konstrukcji. Jest to w pełni spójne z wynikami wcześniejszej analizy sił osiowych, która zidentyfikowała ten właśnie obszar jako miejsce kumulacji większych sił ściskających, dodając do tego dłuższe pręty dochodzące do pierścienia zewnętrznego. Zdeformowany fragment powłoki ukazuje utratę początkowej geometrii i znaczne przestrzenne wygięcie krzyżujących się prętów ukośnych oraz fragmentów żeber południkowych, co może stanowić zapowiedź zjawiska lokalnego przeskoku węzła.

Zbieżność tych wyników z rozkładem sił wewnętrznych potwierdza prawidłową pracę modelu numerycznego. Otrzymany wynik współczynnika obciążenia krytycznego implikuje ważny wniosek projektowy przy ewentualnej dalszej optymalizacji materiałowej redukcji gabarytów profili w celu minimalizacji mas to właśnie kryterium stateczności lokalnej w węzłach przypodporowych, a nie przekroczenie granicy plastyczności przy prostym ściskaniu, może okazać się warunkiem decydującym i wymiarującym dla całej struktury kopuły.

6.3 Analiza modalna



Rys. 64. Pierwsza postać analizy modalnej



Rys. 65. Trzecia postać analizy modalnej

Postać nr	Wartość własna λ [1/s ²]	Częstotliwość kątowa ω [rad/s]	Częstotliwość drgań własnych f [Hz]	Okres własny T [s]
1	482.120	21.957	3.495	0.286
2	482.120	21.957	3.495	0.286
3	562.847	23.724	3.776	0.265
4	564.102	23.751	3.780	0.265
5	564.102	23.751	3.780	0.265
6	569.721	23.869	3.799	0.263

Rys. 66. Wartość drgań własnych konstrukcji

Zestawienie wyników numerycznych wskazuje, że podstawowa (pierwsza) częstotliwość drgań własnych układu wynosi $f=3,495$ Hz. Taka wartość świadczy o znacznej sztywności przestrzennej zoptymalizowanej powłoki. Polski Załącznik Krajowy podaje konkretny limit dla

stropów w pomieszczeniach użyteczności publicznej o rozpiętości powyżej 12 m wymagając częstotliwości co najmniej 5 Hz, jednak nie narzuca sztywnego limitu dla samych dachów. Zjawiskiem bardzo charakterystycznym, potwierdzającym prawidłowe zdefiniowanie modelu, jest identyczna wartość częstotliwości dla pierwszej i drugiej postaci drgań. Wynika to bezpośrednio z sferycznej symetrii zaprojektowanej geometrii na rzucie poziomym oraz równomiernego rozkładu sztywności i masy. W tego typu strukturach przestrzennych powstają ortogonalne postaci drgań, co w przestrzeni 3D objawia się takim samym kształtem deformacji, lecz obróconym względem osi pionowej układu.

Analiza wizualna znormalizowanych przemieszczeń uwidacznia różnice w charakterze pracy struktury. Pierwsza postać drgań własnych wykazuje globalny, niesymetryczny wzorec deformacji, masy ruszają się zgodnie w obrębie dużych wycinków powłoki. Z kolei aktywacja wyższych częstotliwości np. przedstawiona postać nr 3 wymusza znacznie bardziej złożony, wielofalowy i lokalny charakter deformacji wyraźne. Niewielki przyrost wartości częstotliwości pomiędzy pierwszą a czwartą postaci wskazuje na gęste pasmo drgań własnych, co jest typową cechą lekkich, wysoce zoptymalizowanych powłok siatkowych.

Uzyskana struktura modalna potwierdza, że przyjęty proces parametrycznego kształtowania geometrii doprowadził do powstania ustroju o optymalnych parametrach dynamicznych, niewrażliwego na standardowe wymuszenia eksploatacyjne i środowiskowe.

6.4 Wymiarowanie konstrukcji w RFEM6

W procesie wymiarowania elementów prętowych stalowego przekrycia strukturalnego nadrzędnym czynnikiem determinującym dobór przekrojów poprzecznych okazała się weryfikacja stateczności pręta w SGN. Przyjęto współczynnik długości wyboczeniowej $\mu = 1,0$ stanowi powszechne uproszczenie obliczeniowe, które utożsamia długość krytyczną elementu ściskanego z jego fizyczną długością geometryczną pomiędzy węzłami.

Sytuacja oblicz.	Pręt nr	Położenie x [m]	Punkt naprężenia r	Obciążenie nr	Stopień wykorzystania warunku projektowego	Warunek projektowy	Opis
SO1	SGN (STR/GEO) - Trwała i przejściowa - Równ. 6.10						
	2348	0.920 $\frac{1}{4}$		KO5	0.033 ✓	SP1100.00	Sprawdzenie przekroju Rozciąganie wg EN 1993-1-1, 6.2.3
	11	1.224 $\frac{1}{2}$		KO3	0.222 ✓	SP1200.00	Sprawdzenie przekroju Ściskanie wg EN 1993-1-1, 6.2.4
	1577	2.375 $\frac{3}{4}$	1	KO3	0.025 ✓	SP2100.00	Sprawdzenie przekroju Skracanie wg EN 1993-1-1, 6.2.6(4)
	61	2.413 $\frac{3}{4}$		KO3	0.012 ✓	SP3100.01	Sprawdzenie przekroju Ścinanie w osi z i skracanie wg EN 1993-1-1, 6.2.7(9) Projektowanie plastyczne
	626	1.985 $\frac{3}{4}$		KO3	0.012 ✓	SP3100.02	Sprawdzenie przekroju Ścinanie w osi z wg EN 1993-1-1, 6.2.6(2) Projektowanie plastyczne
	55	1.227 $\frac{1}{2}$		KO3	0.007 ✓	SP3200.01	Sprawdzenie przekroju Ścinanie w osi y i skracanie wg EN 1993-1-1, 6.2.7(9) Projektowanie plastyczne
	59	1.227 $\frac{1}{2}$		KO4	0.007 ✓	SP3200.02	Sprawdzenie przekroju Ścinanie w osi y wg EN 1993-1-1, 6.2.6(2) Projektowanie plastyczne
	1	0.000 $\frac{1}{4}$		KO3	0.000 ✓	SP3500.00	Sprawdzenie przekroju Wyboczenie przy ścinaniu wg EN 1993-1-5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.5
	1977	0.000 $\frac{1}{4}$		KO3	0.102 ✓	SP4100.03	Sprawdzenie przekroju Zginanie względem osi y wg EN 1993-1-1, 6.2.5 Projektowanie plastyczne
	797	0.000 $\frac{1}{4}$		KO4	0.051 ✓	SP5100.03	Sprawdzenie przekroju Zginanie względem osi z wg EN 1993-1-1, 6.2.5 Projektowanie plastyczne
	391	0.000 $\frac{1}{4}$	13	KO3	0.260 ✓	SP6100.00	Sprawdzenie przekroju Naprężenie osiowe i ścinające wg EN 1993-1-1, 6.2.1(5) Projektowanie sprężyste
	860	1.207 $\frac{1}{2}$		KO3	0.019 ✓	SP6500.01	Sprawdzenie przekroju Zginanie dwukierunkowe, siła osiowa i ścinanie wg EN 1993-1-1, 6.2.9.1, 6.2.10 Projektowanie plastyczne
	383	1.855 $\frac{3}{4}$		KO3	0.242 ✓	SP6500.02	Sprawdzenie przekroju Zginanie względem osi y, siła osiowa i ścinanie wg EN 1993-1-1, 6.2.9.1, 6.2.10 Projektowanie plastyczne
	422	0.919 $\frac{1}{4}$		KO3	0.230 ✓	SP6500.03	Sprawdzenie przekroju Zginanie względem osi z, siła osiowa i ścinanie wg EN 1993-1-1, 6.2.9.1, 6.2.10 Projektowanie plastyczne
	61	1.207 $\frac{1}{2}$		KO6	0.007 ✓	SP6500.04	Sprawdzenie przekroju Zginanie dwukierunkowe i ścinanie wg EN 1993-1-1, 6.2.9.1, 6.2.10 Projektowanie plastyczne
	1570	0.000 $\frac{1}{4}$		KO3	0.753 ✓	ST4100.03	Stateczność Ściskanie i/lub zginanie wg EN 1993-1-1, 6.3.4 Metoda ogólna - Johannes Naumes
	4	0.000 $\frac{1}{4}$		KO3	Ostrzeżenie ⚠	WA5001.00	Ostrzeżenie Skracanie jest pomijane dla warunków projektowych stateczności
SO2	SGU - Charakterystyczna						
	1	0.000 $\frac{1}{4}$		KO8	0.000 ✓	SE0100.00	Użytkowność Pomijalne ugięcia
	860	1.207 $\frac{1}{2}$		KO8	0.489 ✓	SE1100.00	Użytkowność Ugięcia w kierunku z
		1.207 $\frac{1}{2}$		KO8	0.154 ✓	SE1200.00	Użytkowność Ugięcia w kierunku y

Rys. 67. Wykorzystanie prętów RFEM6

$N_{Rk} = A \cdot f_y$ $= 6.95 \text{ cm}^2 \cdot 355.000 \text{ N/mm}^2$ $= 246.725 \text{ kN}$	[1], 6.3.3, Tab. 6.7
$M_{y,Rk} = W_{pl,y} \cdot f_y$ $= 13.20 \text{ cm}^3 \cdot 355.000 \text{ N/mm}^2$ $= 4.69 \text{ kNm}$	[1], 6.3.3, Tab. 6.7
$M_{z,Rk} = W_{pl,z} \cdot f_y$ $= 9.89 \text{ cm}^3 \cdot 355.000 \text{ N/mm}^2$ $= 3.51 \text{ kNm}$	[1], 6.3.3, Tab. 6.7
$\eta_{ult,k} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}}$ $= \frac{30.22 \text{ kN}}{246.725 \text{ kN}} + \frac{0.36 \text{ kNm}}{4.69 \text{ kNm}}$ $= 0.200$	[1], 6.3.4(4)
$\alpha_{ult,k} = \frac{1}{\eta_{ult,k}}$ $= \frac{1}{0.200}$ $= 5.01$	[1], 6.3.4(2)
$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}}$ $= \sqrt{\frac{5.01}{2.00}}$ $= 1.583$	[1], 6.3.4(3), Rozw. 6.64
$\alpha^* = \alpha_z$ $= 0.49$	
$\Phi_{op} = 0.5 \cdot \left[1 + \alpha^* \cdot (\bar{\lambda}_{op} - 0.2) + (\bar{\lambda}_{op})^2 \right]$ $= 0.5 \cdot \left[1 + 0.49 \cdot (1.583 - 0.2) + (1.583)^2 \right]$ $= 2.092$	[2], 5, Rys. 13
$\chi_{op} = \frac{1}{\Phi_{op} + \sqrt{(\Phi_{op})^2 - (\bar{\lambda}_{op})^2}}$ $= \frac{1}{2.092 + \sqrt{(2.092)^2 - (1.583)^2}}$ $= 0.29$	[1], 6.3.4(4)
$\eta_{Mz} = \frac{1}{\alpha_{cr,op}} \cdot \left(1 - (\pi)^2 \cdot E \cdot I_z \cdot \frac{ \delta_y }{(L_{eegm,y})^2 \cdot M_{z,Ed}} \right)$ $= \frac{1}{2.00} \cdot \left(1 - (\pi)^2 \cdot 210000.000 \text{ N/mm}^2 \cdot 16.30 \text{ cm}^4 \cdot \frac{[0.8 \text{ mm}]}{(2.339 \text{ m})^2 \cdot 0.15 \text{ kNm}} \right)$ $= 0.33$	[3], 3.3, Tab. 3.1
$\alpha_{Ed} = \chi_{op} \cdot \frac{\alpha_{ult,k}}{\eta_{M1}}$ $= 0.29 \cdot \frac{5.01}{1.00}$ $= 1.448$	[3], 3.4, Tab. 3.2

Rys. 68. Obliczenia stateczności RFEM6

$$\beta_z = \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}} \cdot (1 - \eta_{Mz})$$

$$= \frac{0.15 \text{ kNm}}{3.51 \text{ kNm}} \cdot (1 - 0.33)$$

$$= 0.029$$

[3], 3.4, Tab. 3.2

$$\Delta N_R = 1 - \frac{1}{\alpha_{Ed}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha_{Ed}}\right) \cdot (\chi_{op})^2 \cdot (\bar{\lambda}_{op})^2$$

$$= 1 - \frac{1}{1.448} \cdot \left(1 - \frac{1}{1.448}\right) \cdot (0.29)^2 \cdot (1.583)^2$$

$$= 0.955$$

[3], 3.4, Tab. 3.2

$$\eta = \frac{\frac{1}{\alpha_{Ed}} + \beta_z}{\Delta N_R}$$

$$= \frac{\frac{1}{1.448} + 0.029}{0.955}$$

$$= 0.753$$

[1], 6.3.4(2), Równ. 6.63

$$\eta = 0.753 \leq 1 \quad \checkmark$$

Rys. 69. Obliczenia stateczności RFEM6

Kombinacja: charakterystyczna

$$w_{lim,z} = \frac{L}{L/w_{lim}}$$

$$= \frac{2.413 \text{ m}}{500}$$

$$= 4.8 \text{ mm}$$

$$\eta = \frac{|w_{tot,z}|}{w_{lim,z}}$$

$$= \frac{|2.4 \text{ mm}|}{4.8 \text{ mm}}$$

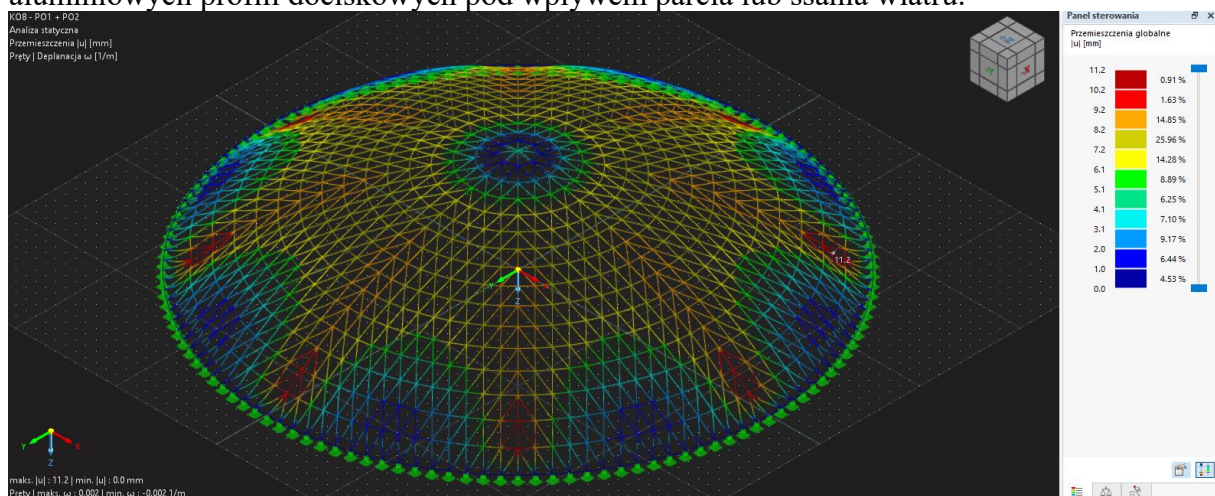
$$= 0.489$$

[1], 7.2

$$\eta = 0.489 \leq 1 \quad \checkmark$$

Rys. 70. Ugięcie w kierunku z RFEM6

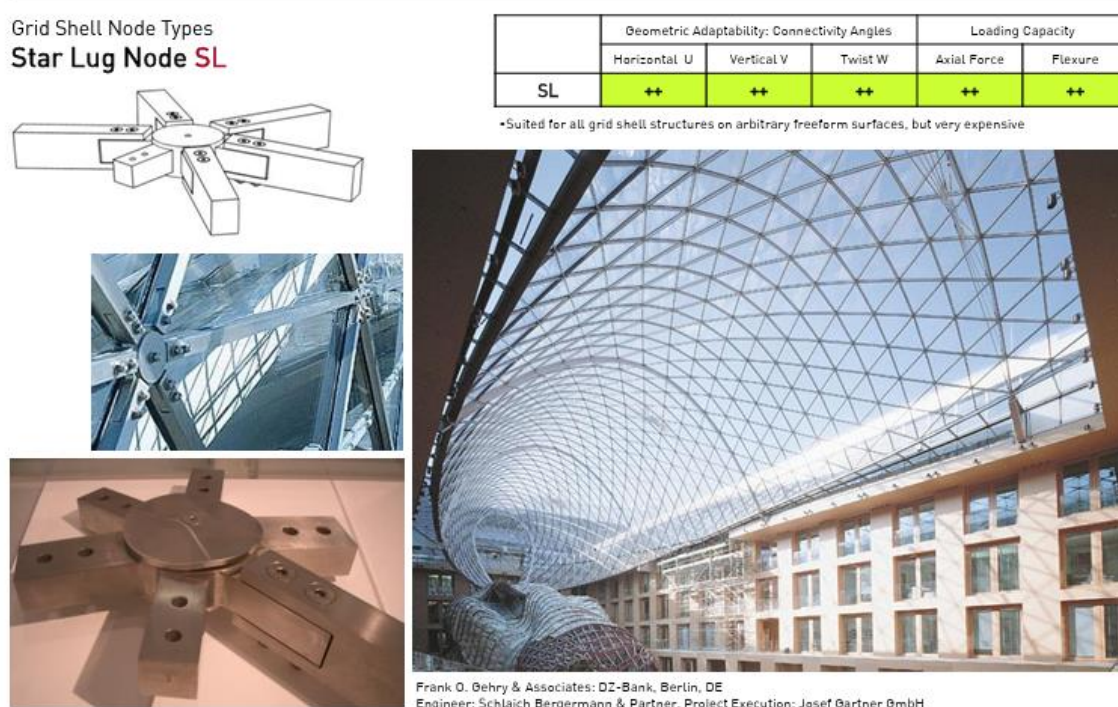
Dla ugięcia prętów w SGU założono $L/500$ z uwagi na szklane panele, które mogą ulec uszkodzeniu z uwagi na zbyt duże deformacje. Wprowadzenie tak wąskiego przedziału tolerancji było niezbędne w celu eliminacji ryzyka powstawania destrukcyjnych koncentracji naprężeń w kruchych, zespolonych pakietach szklanych, zabezpieczenia ciągłości uszczelnienia strukturalnego oraz uniemożliwienia geometrycznego wypięcia się tafli szkła z aluminiowych profili dociskowych pod wpływem parcia lub ssania wiatru.



Rys. 71. Globalne przemieszczenie prętów

6.5 Analiza wyężenia wężła

Projektowanie współczesnych, wieloprzestrzennych przekryć dachowych w architekturze tzw. form swobodnych wymaga zastosowania systemów strukturalnych zdolnych do jednoczesnego przenoszenia złożonych stanów obciążeń oraz ciągłej adaptacji do skomplikowanej topologii powierzchni. W analizowanym przypadku konstrukcyjnym, charakteryzującym się nieregularną krzywizną dachu i zróżnicowanymi kątami zbiegu osi prętów w przestrzeni trójwymiarowej, optymalnym i merytorycznie uzasadnionym rozwiązaniem jest zastosowanie zaawansowanego wężła typu Star Lug Node SL będącego komponentem systemów Novum Structures. Głównym kryterium warunkującym wybór tego typu wężła jest jego podatność geometryczna, definiowana jako zdolność do pełnej, trójosiowej adaptacji kątowej połączeń prętowych. W strukturach siatkowych realizowanych na powierzchniach nieanalitycznych, każdy węzeł geometryczny charakteryzuje się odmienną konfiguracją przestrzenną. Węzeł Star Lug wykazuje wysoką sprawność parametryczną w zakresie trzech kluczowych stopni swobody obrotowej komponentów łączących. [17].



NOVUM

Novum Structures | www.novumstructures.com

Rys. 72. Węzeł typu Star Lug Node SL Novum [17]

Oprócz właściwości adaptacyjnych, węzeł Star Lug Node SL charakteryzuje się parametrami mechaniczno-strukturalnymi w obszarze nośności granicznej oraz sztywności węzłowej. W wielkoformatowych przekryciach dachowych poddanych asymetrycznym obciążeniom klimatycznym, takim jak ssanie wiatru czy nierównomierne zaleganie pokrywy śnieżnej, w elementach prętowych generowane są znaczne siły osiowe oraz momenty zginające. Konstrukcja węzła SL, oparta na monolitycznym rdzeniu centralnym z promieniście rozmieszczonymi, precyzyjnie frezowanymi wypustami, gwarantuje optymalny przepływ strumienia naprężeń [17]. Połączenie to skutecznie przenosi ekstremalne siły osiowe zarówno rozciągające, jak i ściskające oraz wykazuje wysoką sztywność na zginanie w obu płaszczyznach głównych. Redukuje to podatność węzła na obrót plastyczny, co bezpośrednio przekłada się na zwiększenie stateczności ogólnej całej powłoki strukturalnej i zapobiega

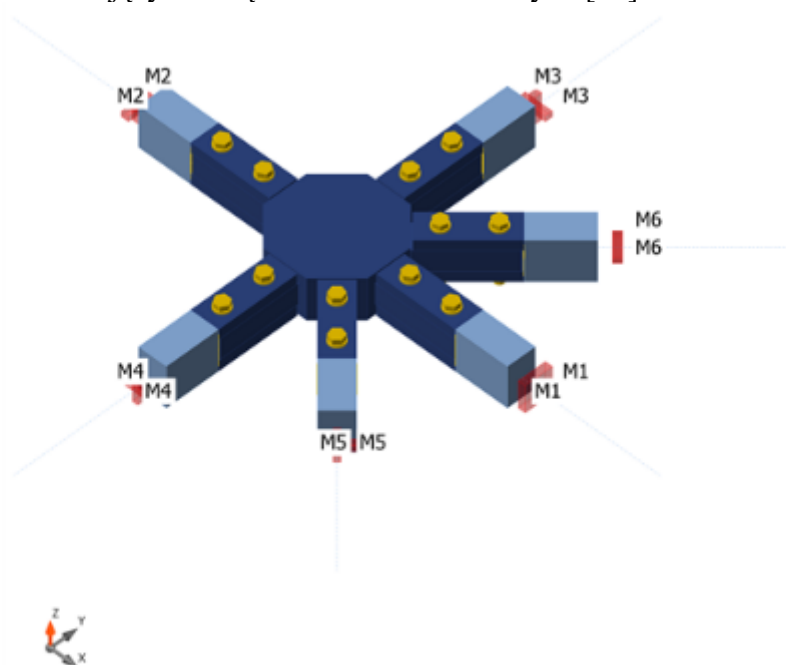
zjawiskom lokalnego wyboczenia ustroju. Choć węzeł typu Star Lug cechuje się wyższym jednostkowym kosztem produkcji w porównaniu do klasycznych węzłów kulistych, wynikającym z zaawansowanej obróbki skrawaniem CNC oraz rygorystycznej kontroli tolerancji wymiarowych, to z makroekonomicznego punktu widzenia inwestycji wydatek ten jest w pełni kompensowany przez drastyczne skrócenie czasu montażu na placu budowy. Połączenia pasowe i prętowe realizowane są za pomocą śrub o wysokiej klasie wytrzymałości, instalowanych w fabrycznie przygotowanych gniazdach [17]. Eliminuje to całkowicie pracochłonne, podatne na błędy i generujące niekorzystne naprężenia spawalnicze procesy scalania konstrukcji na wysokości. Ponadto, wysoka precyzja wykonania fabrycznego redukuje ryzyko powstawania luzów w strukturze, co ma kluczowe znaczenie dla redukcji deformacji kinematycznych dachu. Istotną wadą strukturalną tego węzła jest brak możliwości prowadzenia lokalnej rektyfikacji geometrycznej bezpośrednio w miejscu połączenia, co w przypadku wystąpienia odchyłek wykonawczych wymusza stosowanie skomplikowanej procedury rektyfikacji globalnej poprzez luzowanie sąsiednich sekcji konstrukcyjnych. Ta ograniczona podatność na korekty nakłada rygorystyczne wymagania w zakresie zapewnienia nadzwyczajnej precyzji zarówno na etapie projektowania parametrycznego, jak i w trakcie prefabrykacji oraz montażu scalającego. Ponieważ węzły te charakteryzują się bardzo niską tolerancją na błędy pasowania, wszelkie niedokładności realizacyjne mogą prowadzić do kumulacji imperfekcji i blokowania montażu kolejnych segmentów powłoki, co determinuje konieczność ciągłej kontroli geodezyjnej i zaawansowanego planowania sekwencji wznoszenia konstrukcji.

W celu weryfikacji poprawności pracy statyczno-wytrzymałościowej projektowanego węzła przekrycia dachowego typu Star Lug Node SL, przeprowadzono zaawansowaną analizę numeryczną przy użyciu metody elementów skończonych w środowisku oprogramowania IDEA StatiCa. Program ten, bazując na zintegrowanej metodzie CBFEM pozwala na precyzyjne mapowanie rozkładu naprężeń plastycznych, odkształceń granicznych oraz sił w łącznikach śrubowych w obrębie skomplikowanych topologicznie połączeń stalowych. Kluczowym etapem poprzedzającym zasadnicze obliczenia statyczne było prawidłowe odwzorowanie skomplikowanej geometrii węzła SL w środowisku numerycznym. Ze względu na uwarunkowania algorytmiczne oraz specyfikę definiowania brył nieanalitycznych w programie IDEA StatiCa, implementacja idealnie cylindrycznego rdzenia centralnego napotyka ograniczenia systemowe w zakresie precyzyjnego generowania siatki elementów skończonych na powierzchniach o krzywiznie kołowej. W związku z tym, na potrzeby budowy modelu obliczeniowego, dokonano celowego i w pełni uzasadnionego inżyniersko uproszczenia geometrycznego. Monolityczny rdzeń okrągły zastąpiono bryłą o przekroju wielokątnym wielobocznym, dostosowując liczbę i układ jego ścian bezpośrednio do liczby, kierunków oraz rzeczywistych osi zbiegu dochodzących elementów prętowych oznaczonych w modelu jako segmenty od M1 do M6. Zastosowanie geometrii wielokątnej pozwala na zachowanie ortogonalności płaszczyzn styku na granicy rdzeń-wypust, co eliminuje błędy numeryczne związane z lokalną osobliwością siatki oraz gwarantuje wysoką zbieżność procesu iteracyjnego podczas rozwiązywania nieliniowych zadań fizycznych i geometrycznych. Jednocześnie uproszczenie to nie wpływa w sposób istotny na globalną sztywność przestrzenną węzła ani na trajektorie głównych strumieni naprężeń, zachowując pełną miarodajność wyników w odniesieniu do rzeczywistego elementu konstrukcyjnego [39].

Przedmiotem analizy numerycznej jest węzeł zespalający sześć niezależnych elementów prętowych o przekrojach prostokątnych, przenoszących zróżnicowane układy sił wewnętrznych wyznaczonych w globalnej analizie statycznej ustroju siatkowego. Modelowanie połączeń poszczególnych odczepów z rdzeniem wielokątnym zrealizowano poprzez wprowadzenie elementów blach węzłowych i pasowanych śrub o wysokiej klasie wytrzymałości, co odpowiada rzeczywistej mechanice pracy systemu Star Lug. W ramach procedury

obliczeniowej zdefiniowano nieliniowy model materiałowy stali sprężysto-plastyczny z umocnieniem, przyjmując graniczne odkształcenie plastyczne na poziomie 5% jako kryterium osiągnięcia stanu granicznego nośności połączenia wg EN 1993-1-5 Załącznik C.8.

Przedstawione w dalszej części pracy symulacje numeryczne dla krytycznych kombinacji obciążeń obejmują weryfikację stopnia wyężenia płyt stalowych, analizę porównawczą naprężeń zastępczych według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky’ego oraz ocenę sił rozciągających i ścinających w łącznikach mechanicznych [39].



Przekroje

Nazwa	Material
2 - FLA40/60	S 355

Śruby

Nazwa	Średnica [mm]	f_y [MPa]	f_u [MPa]	Pole brutto [mm ²]
M12 10.9	12	900,0	1000,0	113

Efekty obciążenia (siły w równowadze)

Nazwa	Element	N [kN]	Vy [kN]	Vz [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
LE1	M1 / koniec	-55,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	M2 / koniec	-55,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	M3 / koniec	-45,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	M4 / koniec	-45,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	M5 / koniec	-4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	M6 / koniec	-4,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Niezerównoważone siły

Nazwa	X [kN]	Y [kN]	Z [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]
LE1	-5,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Rys. 73. Dane wyjściowe IDEA StatiCa

Podsumowanie

Nazwa	Wartość	Status sprawdzenia
Analiza	100,0%	OK
Płyty	0,0 < 5,0%	OK
Śruby	88,6 < 100%	OK
Spoiny	0,0 < 100%	OK
Stateczność	16,18	

Płyty

Nazwa	Materiał	t_p [mm]	Obciążenia	σ_{Ed} [MPa]	ϵ_{pl} [%]	$\sigma_{c,Ed}$ [MPa]	Status
M1-bfil 1	S 355	60,0	LE1	57,5	0,0	0,0	OK
M2-bfil 1	S 355	60,0	LE1	64,0	0,0	0,0	OK
M3-bfil 1	S 355	60,0	LE1	52,4	0,0	0,0	OK
M4-bfil 1	S 355	60,0	LE1	52,4	0,0	0,0	OK
M5-bfil 1	S 355	60,0	LE1	4,6	0,0	0,0	OK
M6-bfil 1	S 355	60,0	LE1	4,6	0,0	0,0	OK
SP1	S 355	60,0	LE1	61,6	0,0	0,0	OK
SP2	S 355 - 1	30,0	LE1	177,1	0,0	18,5	OK
SP4	S 355 - 1	15,0	LE1	283,2	0,0	23,7	OK
SP5	S 355 - 1	15,0	LE1	24,9	0,0	8,2	OK
SP6	S 355 - 1	30,0	LE1	197,1	0,0	20,6	OK
SP8	S 355 - 1	15,0	LE1	316,1	0,0	26,4	OK
SP9	S 355 - 1	15,0	LE1	27,7	0,0	9,1	OK
SP10	S 355 - 1	30,0	LE1	161,6	0,0	16,9	OK
SP11	S 355 - 1	15,0	LE1	257,9	0,0	21,6	OK
SP12	S 355 - 1	15,0	LE1	22,7	0,0	7,4	OK
SP13	S 355 - 1	30,0	LE1	161,5	0,0	16,9	OK
SP14	S 355 - 1	15,0	LE1	258,2	0,0	21,6	OK
SP15	S 355 - 1	15,0	LE1	22,7	0,0	7,4	OK
SP16	S 355 - 1	30,0	LE1	14,6	0,0	1,6	OK
SP17	S 355 - 1	15,0	LE1	23,4	0,0	1,8	OK
SP19	S 355 - 1	15,0	LE1	2,0	0,0	0,7	OK
SP18	S 355 - 1	30,0	LE1	14,6	0,0	1,4	OK
SP20	S 355 - 1	15,0	LE1	23,5	0,0	1,8	OK
SP21	S 355 - 1	15,0	LE1	2,0	0,0	0,7	OK

Dane projektowe

Materiał	f_y [MPa]	ϵ_{lim} [%]
S 355	335,0	5,0
S 355 - 1	355,0	5,0

Rys. 74. Płyty sprawdzenie IDEA StatiCa

Objaśnienie symbolu

t_p	Grubość płyty
σ_{Ed}	Równoważne naprężenie
ε_{pl}	Odształcenie plastyczne
$\sigma_{c,Ed}$	Naprężenie dociskowe
f_y	Wytrzymałość na rozciąganie
ε_{lim}	Limit odkształceń plastycznych

Szczegółowe wyniki dla M1-bfl 1

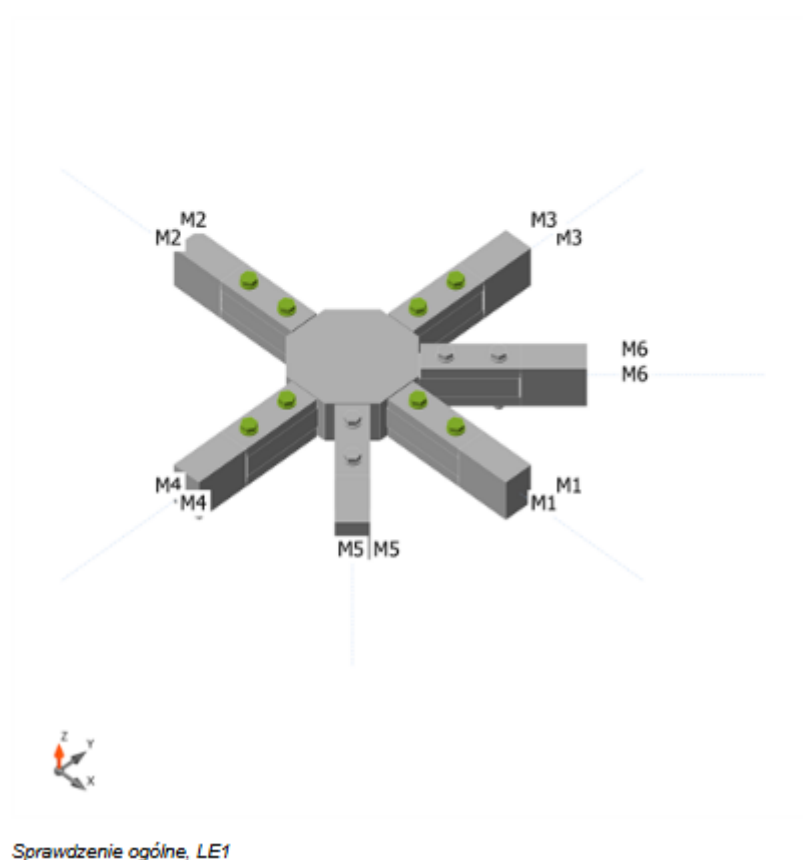
Wartości obliczeniowe użyte w analizie

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}} = 335,0 \text{ MPa}$$

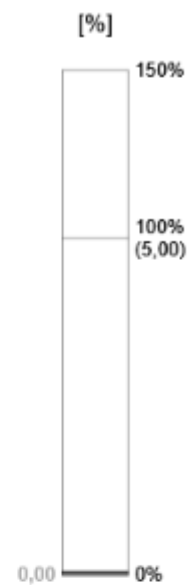
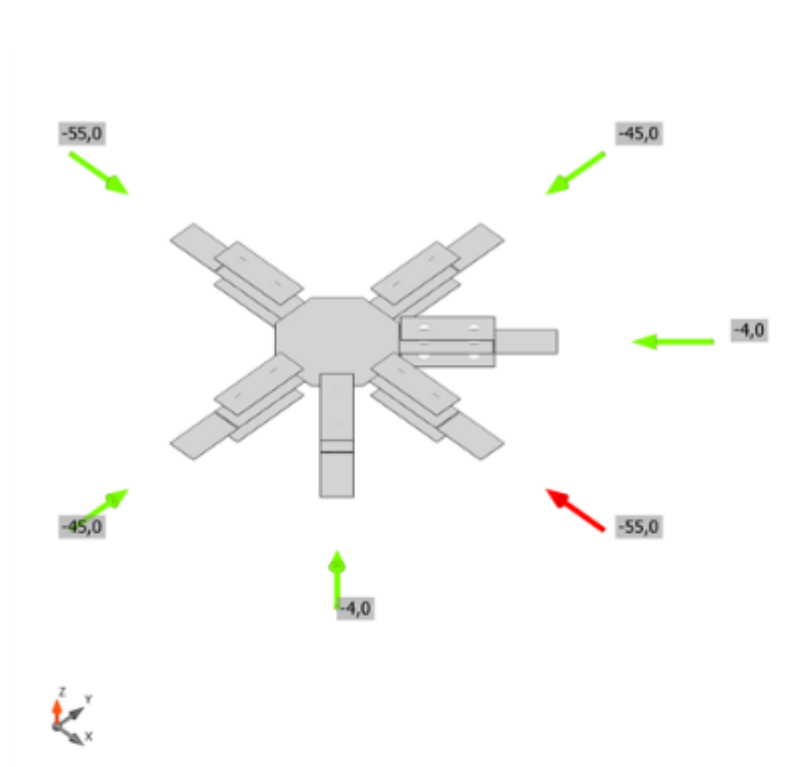
Gdzie:

$f_{yk} = 335,0 \text{ MPa}$ – charakterystyczna granica plastyczności

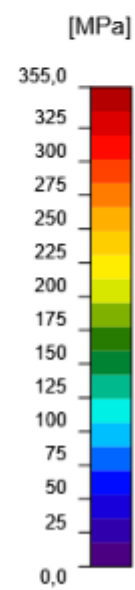
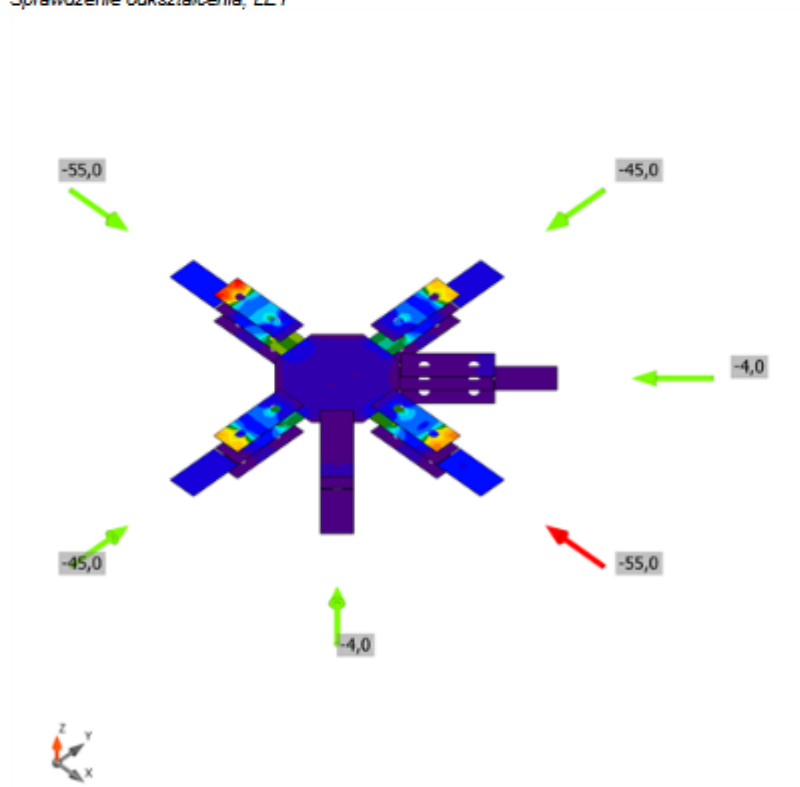
$\gamma_{M0} = 1,00$ – częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla materiału stalowego EN 1993-1-1 – 6.1



Rys. 75. Obliczenia węzła IDEA StatiCa



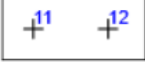
Sprawdzenie odkształcenia, LE1



Równoważne napężenie, LE1

Rys. 76. Sprawdzenie odkształcenia i naprężeń IDEA StatiCa

Bolts

Shape	Item	Grade	Loads	$F_{t,Ed}$ [kN]	$F_{v,Ed}$ [kN]	$F_{b,Rd}$ [kN]	U_{t_t} [%]	U_{t_s} [%]	$U_{t_{ts}}$ [%]	Detailing	Status
	B1	M16 10.9 - 1	LE1	7.7	17.9	236.4	6.8	28.5	33.4	OK	OK
	B2	M16 10.9 - 1	LE1	11.5	24.9	152.5	10.2	39.6	46.8	OK	OK
	B3	M16 8.8 - 2	LE1	9.0	20.9	236.4	9.9	34.7	41.8	OK	OK
	B4	M16 8.8 - 2	LE1	15.0	28.1	152.5	16.6	46.6	58.4	OK	OK
	B5	M16 8.8 - 2	LE1	8.8	20.9	236.4	9.8	34.7	41.6	OK	OK
	B6	M16 8.8 - 2	LE1	15.0	28.1	152.5	16.6	46.6	58.5	OK	OK
	B7	M16 8.8 - 2	LE1	8.8	20.9	236.4	9.8	34.7	41.6	OK	OK
	B8	M16 8.8 - 2	LE1	15.0	28.1	152.5	16.6	46.6	58.5	OK	OK
	B9	M16 8.8 - 2	LE1	0.7	1.7	236.4	0.8	2.9	3.4	OK	OK
	B10	M16 8.8 - 2	LE1	1.0	2.3	152.5	1.2	3.8	4.6	OK	OK
	B11	M16 8.8 - 2	LE1	0.7	1.7	236.4	0.8	2.9	3.4	OK	OK
	B12	M16 8.8 - 2	LE1	1.0	2.3	152.5	1.1	3.8	4.6	OK	OK

Design data

Grade	$F_{t,Rd}$ [kN]	$B_{p,Rd}$ [kN]	$F_{v,Rd}$ [kN]
M16 10.9 - 1	113.0	375.0	62.8
M16 8.8 - 2	90.4	375.0	60.3

Rys. 77. Obliczenia śrub IDEA StatiCa

Objaśnienie symbolu

$F_{t,Ed}$	Siła rozciągająca
$F_{v,Ed}$	Wypadkowa sił ścinających w śrubie V_y i V_z w płaszczyznach ścinania
$F_{b,Rd}$	Nośność blachy na docisk EN 1993-1-8 — Tabela 3.4
U_{t_i}	Wyężenie w rozciąganiu
U_{t_s}	Wyężenie w ścinaniu
$U_{t,s}$	Interakcja rozciągania i ścinania EN 1993-1-8 — Tabela 3.4
$F_{t,Rd}$	Nośność śruby na rozciąganie EN 1993-1-8 — Tabela 3.4
$B_{p,Rd}$	Nośność na przebicie EN 1993-1-8 — Tabela 3.4
$F_{v,Rd}$	Nośność śruby na ścinanie EN 1993-1-8 — Tabela 3.4

Szczegółowe wyniki dla B4

Sprawdzenie wytrzymałości na rozciąganie (EN 1993-1-8 — Tabela 3.4)

$$F_{t,Rd} = \frac{k_2 f_{ub} A_s}{\gamma_{M2}} = 60,7 \text{ kN} \geq F_{t,Ed} = 5,2 \text{ kN}$$

Gdzie:

$k_2 = 0,90$	– Współczynnik
$f_{ub} = 1000,0 \text{ MPa}$	– Wytrzymałość śruby na rozciąganie
$A_s = 84 \text{ mm}^2$	– Pole przekroju czynnego śruby
$\gamma_{M2} = 1,25$	– Współczynnik bezpieczeństwa

Sprawdzenie nośności na przeciąganie (EN 1993-1-8 — Tabela 3.4)

$$B_{p,Rd} = \frac{0,6 \pi d_m t_p f_u}{\gamma_{M2}} = 210,8 \text{ kN} \geq F_{t,Ed} = 5,2 \text{ kN}$$

Gdzie:

$d_m = 19,0 \text{ mm}$	– Średnia ze średnic wpisanej i opisanej na łbie śruby lub nakrętki (przyjmuje się mniejszą wartość średnią)
$t_p = 15,0 \text{ mm}$	– Grubość płyty
$f_u = 490,0 \text{ MPa}$	– Wytrzymałość na rozciąganie
$\gamma_{M2} = 1,25$	– Współczynnik bezpieczeństwa

Sprawdzenie nośności ścinania (EN 1993-1-8 — Tabela 3.4)

$$F_{v,Rd} = \frac{\beta_p \alpha_v f_{ub} A}{\gamma_{M2}} = 33,7 \text{ kN} \geq F_{v,Ed} = 27,8 \text{ kN}$$

Gdzie:

$\beta_p = 1,00$	– Współczynnik redukcyjny dla przekładek
$\alpha_v = 0,50$	– Współczynnik redukcyjny dla naprężeń ścinających
$f_{ub} = 1000,0 \text{ MPa}$	– Wytrzymałość śruby na rozciąganie
$A = 84 \text{ mm}^2$	– Pole przekroju czynnego śruby
$\gamma_{M2} = 1,25$	– Współczynnik bezpieczeństwa

Rys. 78. Sprawdzeni śrub węzła IDEA StatiCa

Nośność śruby na docisk (EN 1993-1-8 – Tabela 3.4)

$$F_{b,Rd} = \frac{k_1 \alpha_b f_u d t}{\gamma_{M2}} = 113,1 \text{ kN} \geq F_{b,Ed} = 27,8 \text{ kN}$$

Gdzie:

$$k_1 = \min\left(2,8 \frac{e_2}{d_0} - 1,7, 1,4 \frac{p_2}{d_0} - 1,7, 2,5\right) = 2,50$$

– Współczynnik odległości krawędzi i rozstawu śrub prostopadłej do kierunku przenoszenia obciążenia - EN 1993-1-8 - Tabela 3.4

$$\alpha_b = \min\left(\frac{e_1}{3d_0}, \frac{p_1}{3d_0} - \frac{1}{4}, \frac{f_{ub}}{f_u}, 1\right) = 0,64$$

– Współczynnik odległości końcowej i rozstawu śrub w kierunku działania obciążenia

$$e_2 = 20 \text{ mm}$$

– Odległość do krawędzi blachy prostopadła do kierunku siły ścinającej

$$p_2 = \infty \text{ mm}$$

– Odległość między śrubami prostopadłe do kierunku siły ścinającej

$$d_0 = 13,0 \text{ mm}$$

– Średnica otworu na śrubę

$$e_1 = 25 \text{ mm}$$

– Odległość do krawędzi blachy w kierunku siły ścinającej

$$p_1 = \infty \text{ mm}$$

– Odległość między śrubami w kierunku siły ścinającej

$$f_{ub} = 1000,0 \text{ MPa}$$

– Wytrzymałość śruby na rozciąganie

$$f_u = 490,0 \text{ MPa}$$

– Maksymalna wytrzymałość płyty

$$d = 12,0 \text{ mm}$$

– Nominalna średnica łącznika

$$t = 15,0 \text{ mm}$$

– Grubość blachy

$$\gamma_{M2} = 1,25$$

– Współczynnik bezpieczeństwa

Wykorzystanie w rozciąganiu

$$\frac{F_{t,Ed}}{\min(F_{t,Rd}; B_{p,Rd})} = 0,08 \leq 1,0$$

Gdzie:

$$F_{t,Ed} = 5,2 \text{ kN} \quad \text{– Siła rozciągająca}$$

$$F_{t,Rd} = 60,7 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na rozciąganie}$$

$$B_{p,Rd} = 210,8 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na przeciąganie}$$

Wykorzystanie ścinania

$$\max\left(\frac{F_{v,Ed}}{F_{v,Rd}}, \frac{F_{b,Ed}}{F_{b,Rd}}\right) = 0,83 \leq 1,0$$

Gdzie:

$$F_{v,Ed} = 27,8 \text{ kN} \quad \text{– Siła ścinająca (w decydującej płaszczyźnie ścinania)}$$

$$F_{v,Rd} = 33,7 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na ścinanie}$$

$$F_{b,Ed} = 27,8 \text{ kN} \quad \text{– Siła docisku (dla płyty decydującej)}$$

$$F_{b,Rd} = 113,1 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na docisk}$$

Interakcja rozciągania i ścinania (EN 1993-1-8 – Tabela 3.4)

$$\frac{F_{v,Ed}}{F_{v,Rd}} + \frac{F_{t,Ed}}{1,4 F_{t,Rd}} = 0,89 \leq 1,0$$

Gdzie:

$$F_{v,Ed} = 27,8 \text{ kN} \quad \text{– Siła ścinająca (w decydującej płaszczyźnie ścinania)}$$

$$F_{v,Rd} = 33,7 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na ścinanie}$$

$$F_{t,Ed} = 5,2 \text{ kN} \quad \text{– Siła rozciągająca}$$

$$F_{t,Rd} = 60,7 \text{ kN} \quad \text{– Nośność na rozciąganie}$$

Rys. 79. Sprawdzeni śrub węzła IDEA StatiCa

Spoiny

Pozycja	Krawędź	T_w [mm]	L [mm]	Obciążenia	$\sigma_{w,Ed}$ [MPa]	ϵ_{pl} [%]	$\sigma_{\perp}$ [MPa]	$\tau_{\perp}$ [MPa]	$\tau_{\parallel}$ [MPa]	Ut [%]	Ut _c [%]	Reguły konstrukcyjne	Status
SP2	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP4	M1-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP5	M1-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP6	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP8	M2-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP9	M2-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP10	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP11	M3-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP12	M3-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP13	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP14	M4-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP15	M4-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP16	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP17	M5-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP19	M5-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP18	SP1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP20	M6-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK
SP21	M6-bfil 1	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	OK	OK

Dane projektowe

Materiał	f_u [MPa]	β_w [-]	$\sigma_{w,Rd}$ [MPa]	0.9σ [MPa]
S 355	0,0	-	-	-

Objaśnienie symbolu

T_w	Grubość efektywna a
L	Długość
$\sigma_{w,Ed}$	Równoważne naprężenie
ϵ_{pl}	Odształcenie
$\sigma_{\perp}$	Naprężenie prostopadłe
$\tau_{\perp}$	Naprężenia ścinające prostopadłe do osi spoiny
$\tau_{\parallel}$	Naprężenia ścinające równoległe do osi spoiny
Ut	Wykorzystanie
Ut _c	Oszacowanie nośności spoiny
f_u	Maksymalna wytrzymałość spoiny
β_w	Współczynnik korelacji EN 1993-1-8 – Tabela 4.1
$\sigma_{w,Rd}$	Ekwiwalentna wytrzymałość naprężeniowa
0.9σ	Prostopadła wytrzymałość naprężeniowa - $0,9 \cdot f_u / \gamma_{M2}$

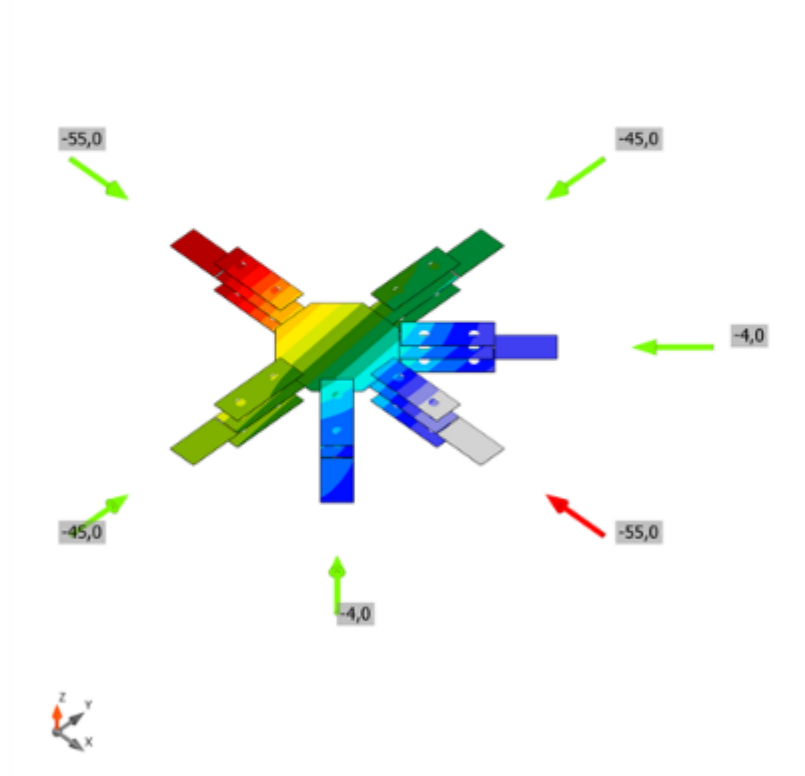
Szczegółowe wyniki dla SP2 / SP1

Spoiny całkowitej penetracji (CJP - Complete Joint Penetration) nie są sprawdzane. Zakłada się, że ich wytrzymałość jest taka sama jak wytrzymałość łączonej płyty.

Rys. 80. Sprawdzeni spoin węzła IDEA StatiCa

Stateczność

Obciążenia	Kształt	Współczynnik [-]
LE1	1	16,18
	2	18,67
	3	29,63
	4	110,26
	5	111,62
	6	128,22



Pierwszy kształt postaci wyboczeniowej, LE1

Rys. 81. Stateczność IDEA StatiCa

Code settings

Item	Value	Unit	Reference
Safety factor γ_{M0}	1.00	-	EN 1993-1-1 – 6.1
Safety factor γ_{M1}	1.00	-	EN 1993-1-1 – 6.1
Safety factor γ_{M2}	1.25	-	EN 1993-1-1 – 6.1, EN 1993-1-8 – Table 2.1
Safety factor γ_{M3}	1.25	-	EN 1993-1-8 – Table 2.1
Safety factor γ_C	1.50	-	EN 1992-1-1 – 2.4.2.4
Safety factor γ_{Inst}	1.20	-	EN 1992-4 – Table 4.1
Joint coefficient β_j	0.67	-	EN 1993-1-8 – 6.2.5(7)
Effective area - influence of mesh size	0.10	-	
Friction coefficient - concrete	0.25	-	EN 1993-1-8
Friction coefficient in slip-resistance	0.30	-	EN 1993-1-8 – Table 3.7
Limit plastic strain	0.05	-	EN 1993-1-5
Detailing	Yes		
Distance between bolts [d0]	2.20	-	EN 1993-1-8 – Table 3.3
Distance between bolts and edge [d0]	1.20	-	EN 1993-1-8 – Table 3.3
Concrete breakout resistance check	Both		
Use calculated α_b in bearing check.	Yes		EN 1993-1-8 – Table 3.4
Cracked concrete	Yes		EN 1992-4
Local deformation check	Yes		
Local deformation limit	0.03	-	CIDECT DG 1, 3 – 1.1
Geometrical nonlinearity (GMNA)	Yes		Analysis with large deformations for hollow section joints
Braced system	No		EN 1993-1-8 – 5.2.2.5

Rys. 82. Ustawienia normy IDEA StatiCa

7 Wnioski

Wykorzystanie algorytmów parametrycznych i skryptów Python w środowisku Grasshopper umożliwia precyzyjne i powtarzalne modelowanie złożonych, przestrzennych struktur siatkowych. Podejście programistyczne zapewnia idealną dokładność matematyczną oraz automatycznie eliminuje błędy topologiczne, zapobiegając powstawaniu osobliwości numerycznych w analizach MES.

Zastąpienie manualnego rysowania struktur zautomatyzowaną pętlą algorytmiczną drastycznie ogranicza nakład pracy projektowej. Zmiana kluczowych parametrów geometrycznych za pomocą suwaków odbywa się w czasie rzeczywistym. Bezpośrednia integracja środowiska BIM z wtyczką obliczeniową Karamba3D eliminuje czasochłonny proces wielokrotnego importu i eksportu danych między programami.

Środowisko parametryczne pozwala na błyskawiczne wygenerowanie oraz jednoczesne przeanalizowanie setek alternatywnych wariantów projektowych. Dzięki temu możliwe stało się sprawne porównanie zachowania statycznego różnych typów siatek oraz precyzyjne wyznaczenie globalnego minimum masy konstrukcji. Przeprowadzenie tak szerokich analiz porównawczych tradycyjnymi metodami inżynierskimi byłoby niewykonalne ze względu na ograniczenia czasowe.

Zintegrowane środowisko Karamba3D w pełni sprawdza się na etapie generatywnego poszukiwania formy oraz wstępnej optymalizacji tonażu materiału, natomiast finalna weryfikacja stanów granicznych nośności SGN struktur nieliniowych wymaga przeprowadzenia dokładnych obliczeń sprawdzających w zaawansowanym programie MES, jakim jest RFEM6.

8 Literatura

- [1] Ajouz, R. (2021) Parametric design of steel structures: Fundamentals of parametric design using Grasshopper. *Steel Construction* 14, No. 3, pp. 185-195.
- [2] Bródka J. (1985). *Przekrycia strukturalne*. Arkady. Warszawa 1985.
- [3] Chodor L. (2016). *Przekrycia hal i galerii*, Katowice, 2016.
- [4] Gerrits J. M., (1995). Morphology of space frame connections. W: G. C. Giuliani (Red.), *Proceedings of the IASS International Symposium Spatial Structures: Heritage, Present and Future*, Padova 5-9 June 1995 (str. 171-178). SG Editoriali. Padova 1995.
- [5] Goldberg D. E., *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [6] Helbig T., (2016) Curved directly glazed steel structure New departure station, E-Line, The Hague. *Steel Construction* 9, No. 4, pp. 363-368.
- [7] Jalili S, Hosseinzadeh Y. Design optimization of truss structures with continuous and discrete variables by hybrid of biogeography-based optimization and differential evolution methods. *Struct Design Tall Spec Build*. 2018;27:e1495.
- [8] Jalili S, Husseinzadeh Kashan A. An optics inspired optimization method for optimal design of truss structures. *Struct Design Tall Spec Build*. 2019;28:e1598.
- [9] Kaczmarek J., Polimex Mostostal Siedlce. (2010). *Projekt warsztatowy konstrukcji. Rozbudowa Targów Kielce- hala G*. Siedlce 2010.
- [10] Kicinger, R., Arciszewski, T., and De Jong, K. A. (2005). "Evolutionary computation and structural design: a survey of the state of the art." *Computers & Structures*, 83(23-24), 1943-1978.
- [11] Klimke, H.: Zum Stand der Entwicklung der Stabwerkskuppeln, *Der Stahlbau* 9, 1983, S. 257-262.
- [12] Kowal Z. (1975a). *Struktury przestrzenne z węzłami tloczonymi* (Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej Nr 15, Monografie 5). Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1975.
- [13] Lan T. T., (2005). Space Frame Structures. W: Chen W. F., Lui E. M. (Red.), *Handbook of Structural Engineering*, Wydanie 2. CRC Press 2005.
- [14] Leonhardt, F., Schlaich, J.: Vorgespannte Seilnetzkonstruktionen Das Olympiaden in München, *Heft* 9, 10, 12/1972 und Heft 2, 3, 4, 6/1973.
- [15] Makowski Z. S., (2006). *Analysis, Design and Construction of Braced Barrel Vaults*. London: Taylor & Francis, Elsevier Applied Science Publishers Ltd, Chapman & Hall Publishers 2006.
- [16] Motro R. (2013). Nodes and Structures - A tribute to Stephane Du Chateau, Tom 8, str. 1-5. Zaprezentowany na *(IASS) Symposium 2013 Beyond the limits of Man*, Wroclaw, Poland 2013.
- [17] Novum_GRID_SHELL_STRUCTURES_on_Freeform_Surfaces
- [18] PN-EN 1990:2004 - Eurokod: Podstawy projektowania konstrukcji.
- [19] PN-EN 1991-1-1:2004 - Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje - Część 1-1.
- [20] PN-EN 1991-1-3:2005 - Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje - Część 1-3.
- [21] PN-EN 1991-1-4:2008 - Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje - Część 1-4.
- [22] PN-EN 1993-1-1:2006 - Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych - Część 1-1.
- [23] PN-EN 1993-1-8:2006 - Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych - Część 1-8.
- [24] Schlaich, J., Bergermann, R.: *Leicht weit - light structures*, Prestel Verlag, 2003, Herausgeber A. Bögle, P. C. Schmal, I. Flagge.
- [25] Schlaich, J., Schober, H.: Transparente Netztragwerke, *Stahl und Form*, Stahl-Informations-Zentrum, Düsseldorf.
- [26] Schlaich, J., Schober, H.: Verglaste Netzkuppeln, *Bautechnik* 69 (1992), S. 3-10.

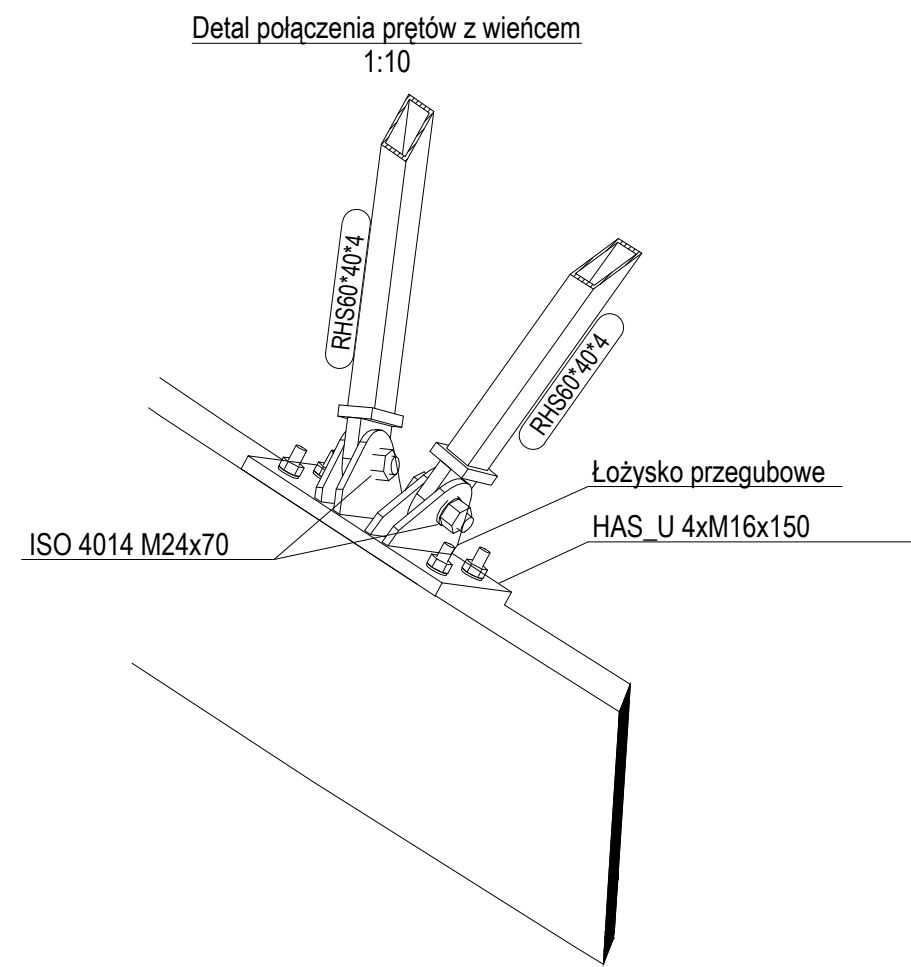
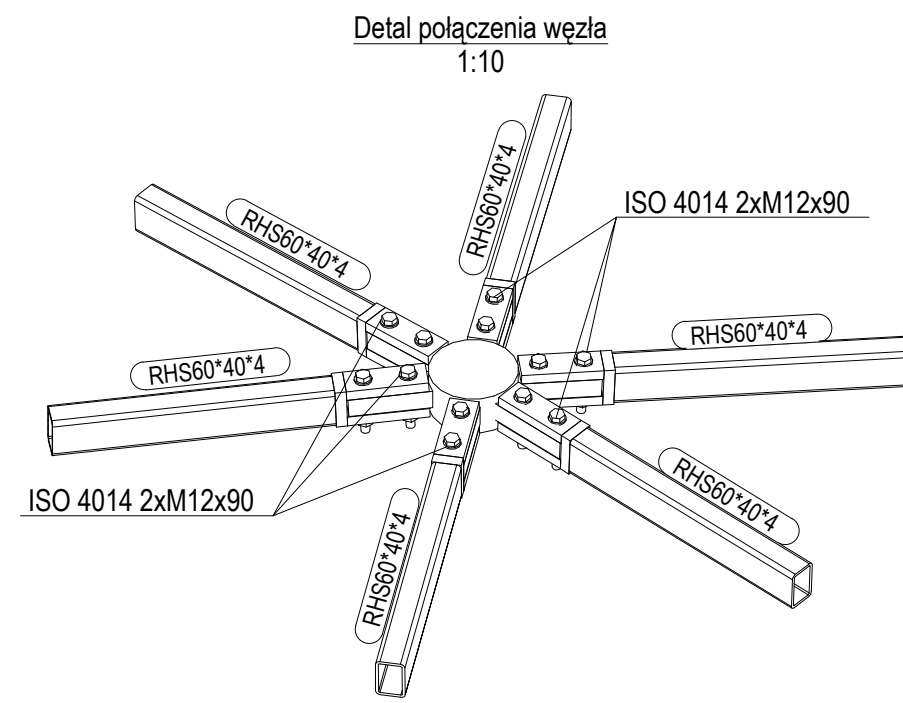
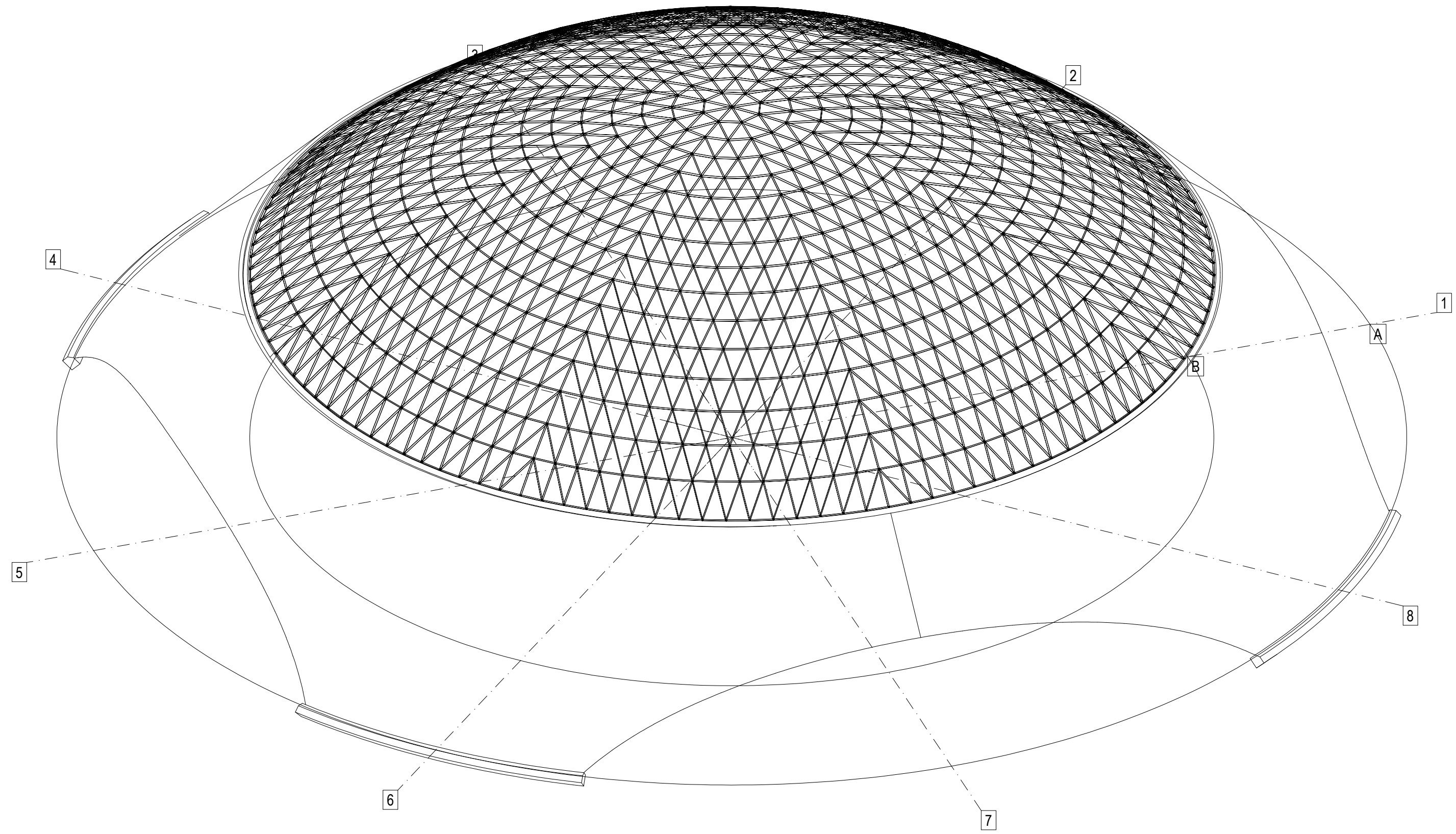
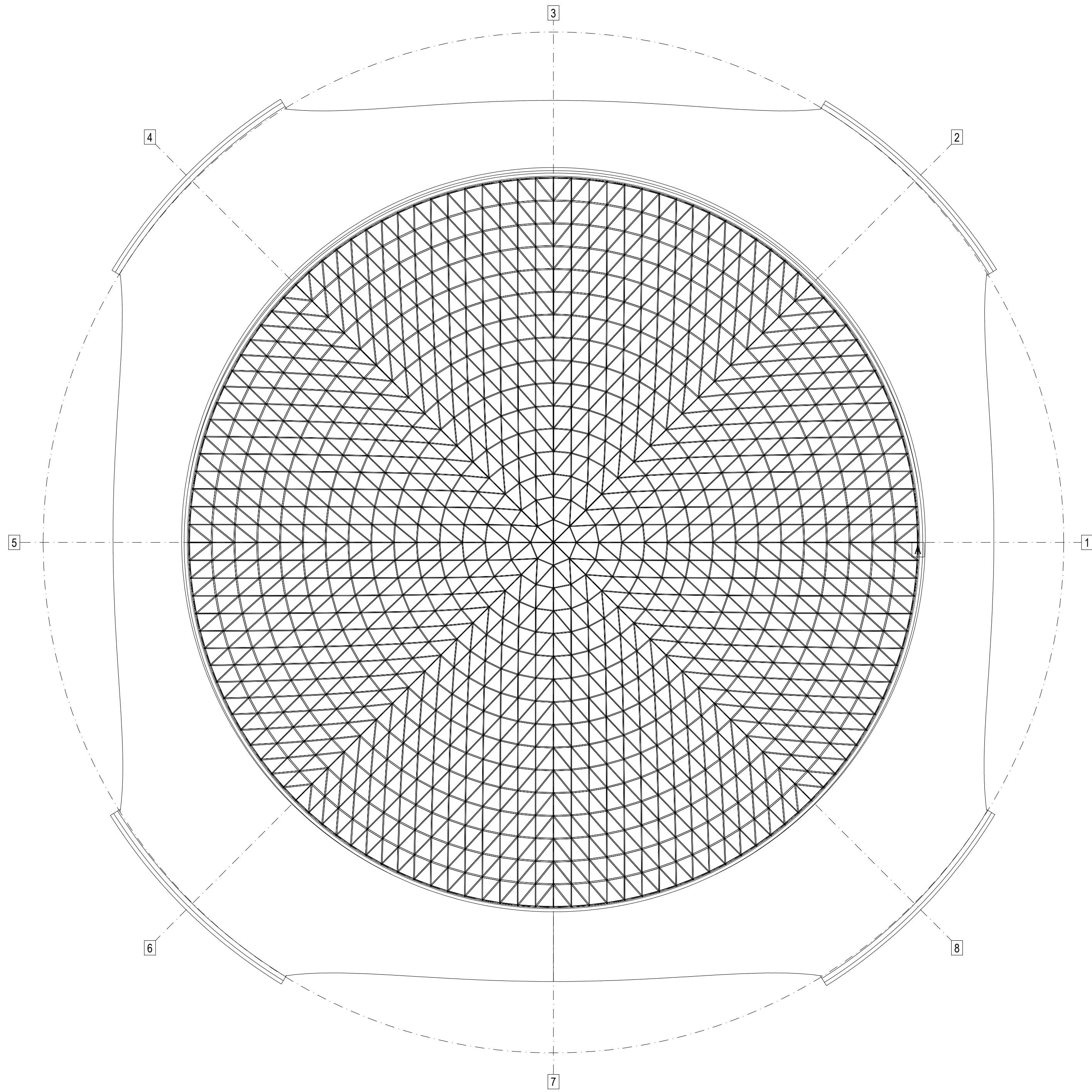
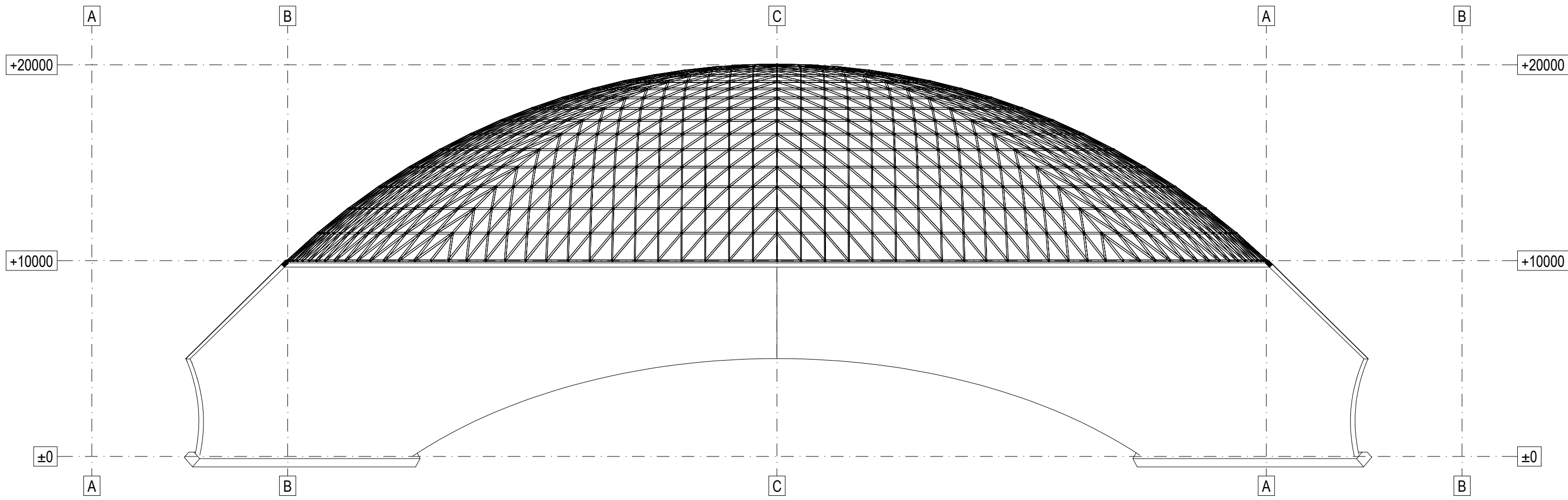
[27] Schober H., *Transparent Shells Form Topology Structure*, 2015, ISBN: 978-3-433-03120-9

Źródła internetowe

- [28] <http://www.google.com/patents/US2914074>
- [29] <https://aroundus.com/p/10446174-halle-aux-bles>
- [30] <https://en.granma.cu/mundo/2020-08-07/the-largest-field-hospital-in-venezuelan-history-can-count-on-cubas-solidarity>
- [31] <https://en.wikipedia.org/wiki/Astrodome>
- [32] https://en.wikipedia.org/wiki/Leipzig_Panometer
- [33] <https://karamba3d.com/get-started/>
- [34] <https://novumstructures.com/eu/systems/>
- [35] https://pl.wikipedia.org/wiki/Pa%C5%82ac_Kryszta%C5%82owy
- [36] <https://www.dlubal.com/en/solutions/application-areas/building-information-modeling-bim/rfem-and-rhinoceros-grasshopper>
- [37] <https://www.enr.com/articles/59858-reviving-the-astrodome-architect-gensler-helps-preservationists-take-another-swing>
- [38] <https://www.youtube.com/watch?v=339gbdnZKUM>
- [39] <https://www.ideastatica.com/pl/support-center-knowledge-base>

9 Załączniki

- [1] Oddziaływanie śniegiem SPECBUD
- [2] Oddziaływanie wiatrem SPECBUD

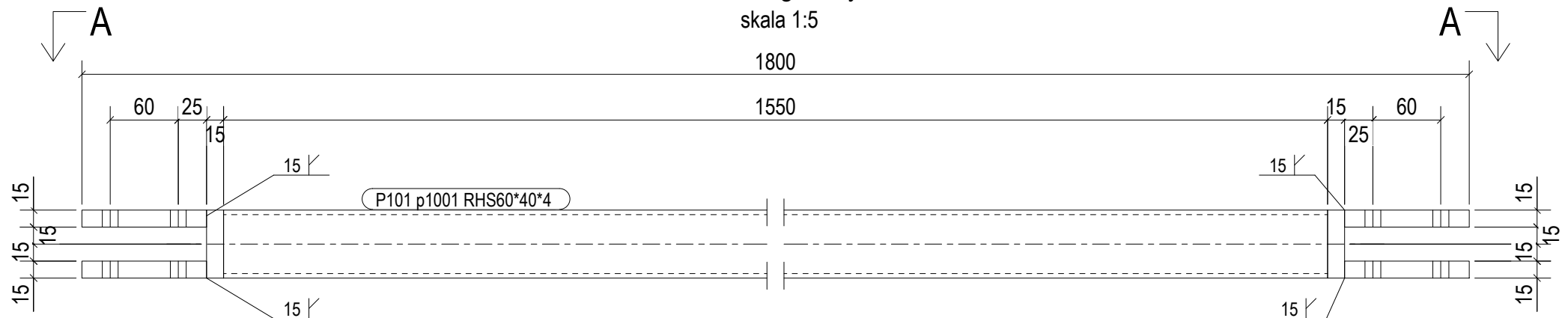


Technologia montażu

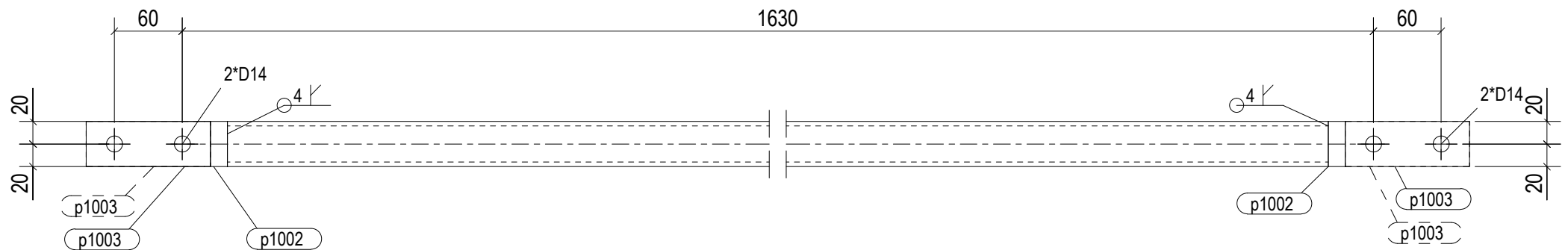
- Zaleca się zastosowanie systemowego rusztowania modułowego typu Layher, rozłożonego na całej powierzchni kortu w rzucie poziomym kopuły. Wierzech rusztowania musi zostać uformowany schodkowo lub odwzorowując krzywiznę dolnego pasa kopuły. Rusztowanie musi być wyposażone w wieże podparcia punktowego, głowice śrubowe zlokalizowane bezpośrednio pod węzłami zwornikowymi struktury. Głowice te umożliwiają precyzyjną regulację wysokościową w celu idealnego spasowania geometrii kopuły przed dokręceniem węzłów
- Montaż rozpoczyna się od pierścienia wsporczego.
- Sukcesywne układanie prętów i węzłów SL warstwami i ku górze, opierając tymczasowo konstrukcję na głowicach rusztowania.
- Dokręcenie ostateczne śrub w węzłach zgodnie z instrukcją systemową.
- Proces demontażu podparcia, opuszczania głowic śrubowych, można rozpocząć dopiero po pełnym zmontowaniu i skróceniu całej geometrii stalowej zamknięciu zwornika, co pozwoli konstrukcji na prawidłowe podjęcie pracy powłokowej.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA					
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA LĄDOWEGO I WODNEGO					
PROJEKT:	Projekt przekrycia stalowego nad kortem tenisowym				
NAZWA RYS:	Rysunek montażowy				
RYSOWAŁ:	Szymon Saczko	Podpis:		SKALA	NR
PROMOTOR:	dr inż. Piotr Kozioł	Podpis:		1:200	1

skala 1:5



skala 1:5



Ilość: 60

Element	Profil	Materiał	Ilość	Długość (mm)	Ciepłota (kg)
p1001	RHS60*40*4	S355JR	1	1550	8.7
p1002	BL15*40	S355JR	2	60	0.6
p1003	BL15*40	S355JR	4	110	2.1
Ogółem na zespół					11.4

2