



Fassung
Mai 2016

Tutorial

Weggrößenverfahren

RFEM 5 / RSTAB 8

Alle Rechte, auch das der Übersetzung, vorbehalten.

Ohne ausdrückliche Genehmigung der DLUBAL SOFTWARE GMBH ist es nicht gestattet, diese Programmbeschreibung oder Teile daraus auf jedwede Art zu vervielfältigen.



© Dlubal Software GmbH 2016
Am Zellweg 2
D-93464 Tiefenbach
Deutschland

Tel.: +49 9673 9203-0
Fax: +49 9673 9203-51
E-mail: info@dlubal.com
Web: www.dlubal.de



Inhalt

	Inhalt	Seite
1.	Einführung	2
2.	Eingabe	3
2.1	Anlegen eines neuen Projektes	3
2.2	Knoten erzeugen	4
2.3	Material festlegen	4
2.4	Querschnitte anlegen	5
2.5	Stäbe anschließen	5
2.6	Lager	6
2.7	Lastfall	7
2.8	Lasten	8
2.9	Berechnung und Ergebnisse	9
3.	Handrechnung	10
3.1	Weggrößenmethode	10
3.2	Aufgabenstellung	10
3.3	System mit Freiheitsgraden	11
3.4	Inzidenztabelle mit Stabwerten	11
3.5	Globale Knotenverschiebungen	12
3.6	Stabendschnittkräfte	14
A.	Matrizen	15
B.	Literatur	17

1 Einführung

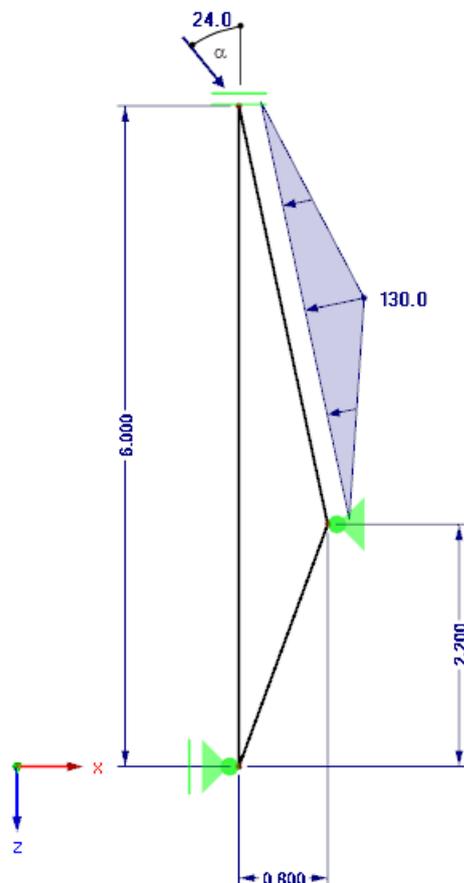
Das folgende Übungsbeispiel zeigt verschiedene Funktionen von RFEM und RSTAB. In Bild und Text wird nur auf RFEM verwiesen, gleiche Vorgehensweise gilt auch für RSTAB. Wie in jeder Software gibt es auch in RFEM mehrere Wege, die zum Ziel führen. Je nach Situation und persönlicher Vorliebe kann einmal der eine und einmal der andere Weg sinnvoll sein. Dieses Übungsbeispiel dient der Ermutigung, selbstständig die Möglichkeiten von RFEM zu erkunden.

Eine Besonderheit der Tutorials sind die Vergleichsrechnungen, die zum Vertiefen und Üben des Hochschulstoffes gedacht sind. In dem folgenden Beispiel wird ein System in RFEM eingegeben und berechnet. Die dort ermittelten Werte werden mit dem des Weggrößenverfahrens verglichen. Das Weggrößenverfahren dient dem grundlegenden Verständnis für die Finite-Elemente-Methode auf welchem das Programm RFEM basiert.

Während des Studiums werden unterschiedliche Systeme mit meist fiktiven Steifigkeiten berechnet. Der Schwerpunkt liegt in der Modellierung des Systems in RFEM und Auswertung der Rechnung.

Die Eingabe des Beispiels wird erleichtert, wenn zwei Bildschirme genutzt werden. Die Beschreibung kann ausgedruckt werden, um den ständigen Wechsel zwischen PDF-Anzeige und der Programmoberfläche zu vermeiden.

Das statische System ist in [Bild 1.1](#) dargestellt



Gegeben:

Stab 1 : $E = 2300 \text{ kN/cm}^2$
 $I_y = 2500 \text{ cm}^4$
 $A = 14,10 \text{ cm}^2$

Stab 2,3 : $E = 2300 \text{ kN/cm}^2$
 $I_y = 2000 \text{ cm}^4$
 $A = 12,41 \text{ cm}^2$

$\alpha = 38,94^\circ$

Bild 1.1: Statisches System

2 Eingabe

2.1 Anlegen eines neuen Projektes

Dieses Fenster öffnet sich automatisch bei dem Starten des Programmes RFEM. Zunächst wird der Modellname "Stabtragwerk" eingegeben. Danach wird ein neues Projekt angelegt, welches unter den Tutorials abgelegt wird.

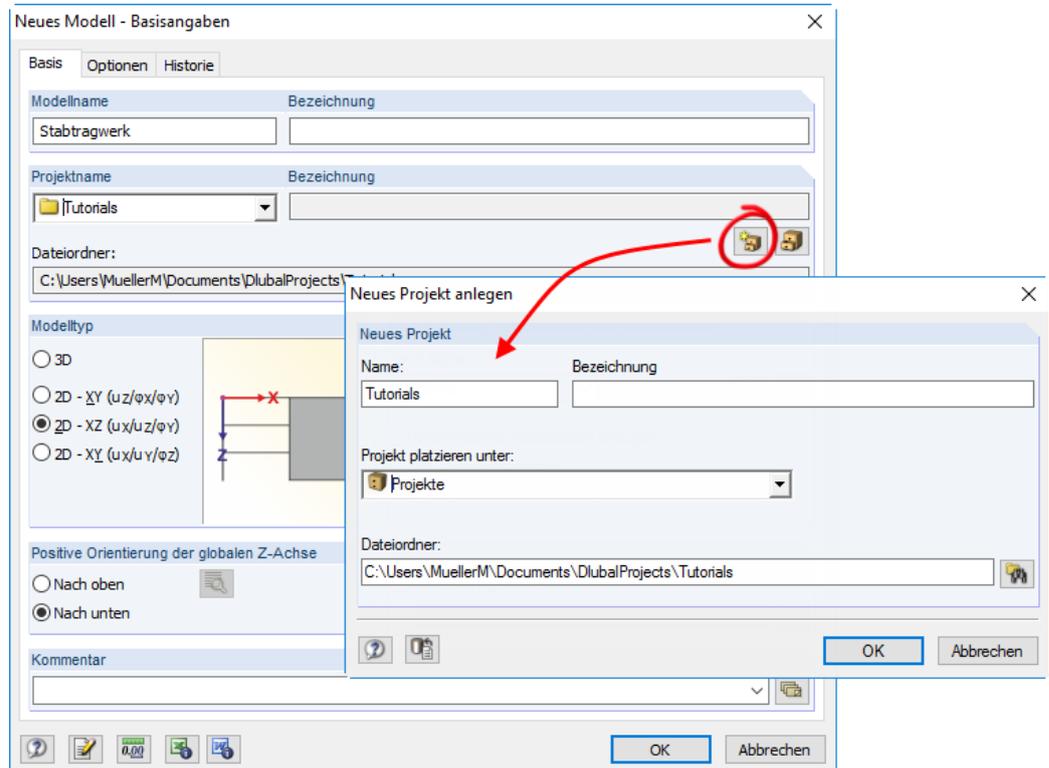


Bild 2.1: Modell-Basisangaben

2.2 Knoten erzeugen

Die Knoten werden dem statischen System entnommen und tabellarisch erstellt. Im Projekt-Navigator wird mit dem Klick der rechten Maustaste auf den Knoten das folgende Fenster aufgerufen.

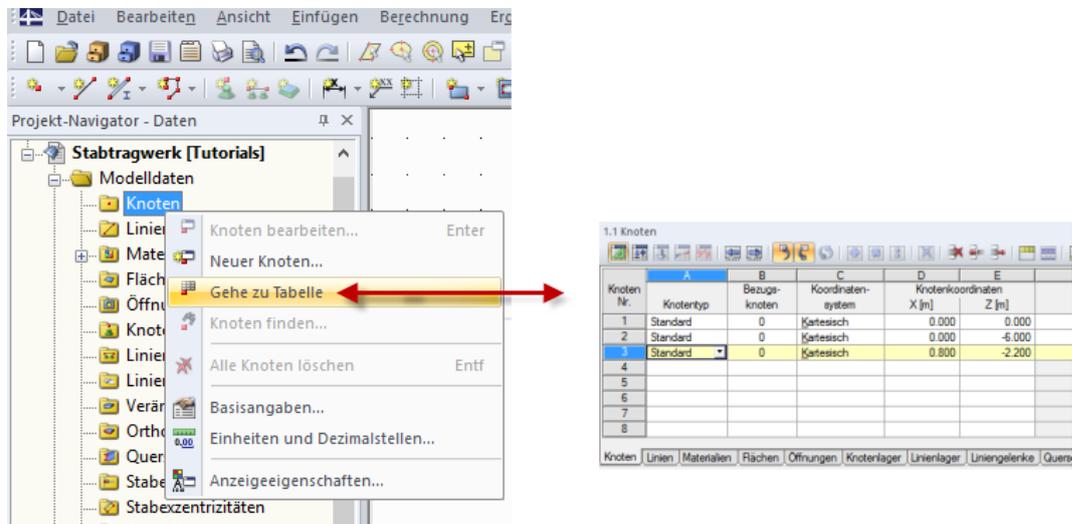


Bild 2.2: Knoten

2.3 Material festlegen

Unter dem Projekt-Navigator befindet sich ebenso das Material, das je nach Vorgabe auch individuell eingestellt werden kann. Die Querdehnzahl wird mit 0,2 eingetragen, der Schubmodul wird dann automatisch errechnet.

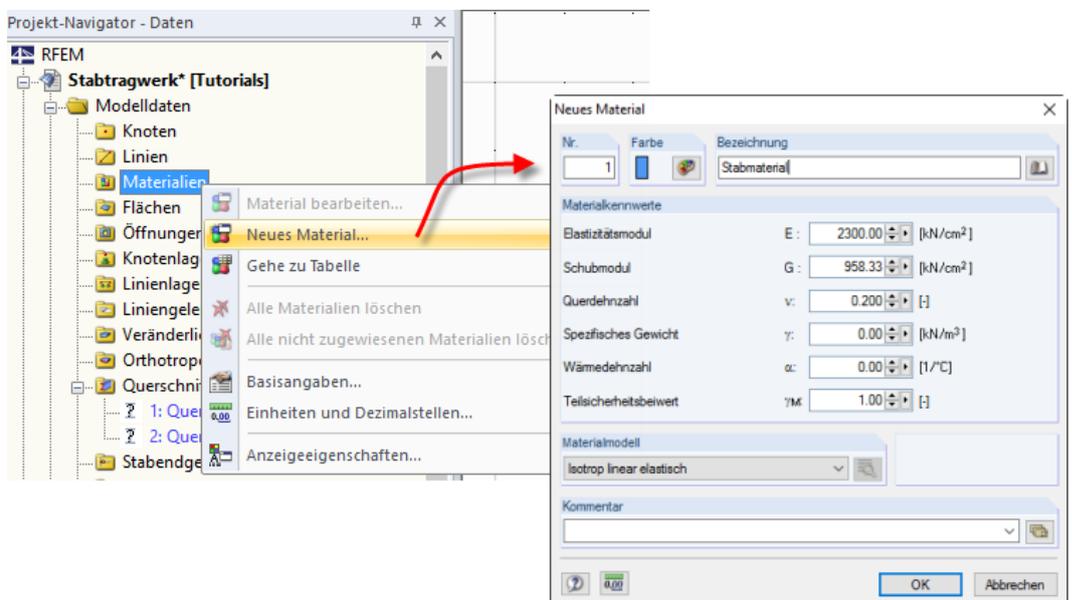


Bild 2.3: Material

2.4 Querschnitte anlegen

Die neuen Querschnitte sind im Projekt-Navigator mit der rechten Maustaste aufzurufen.

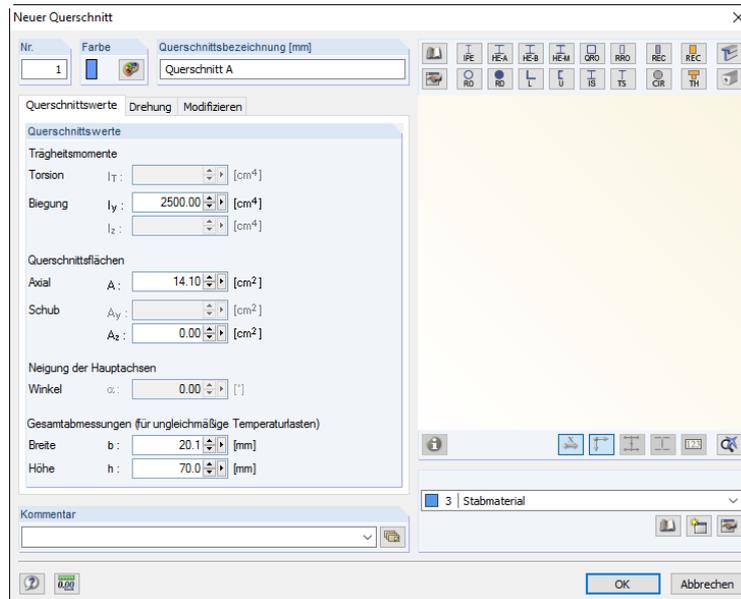


Bild 2.4: Querschnitt

2.5 Stäbe anschließen



In der Symbolleiste befindet sich der Button "Neue Stäbe einzeln". Dem Stab wird der Stabtyp "Balkenstab" und ein Querschnitt zugeordnet. Dieser kann je nach Bedarf in diesem Fenster bearbeitet oder neu angelegt werden.

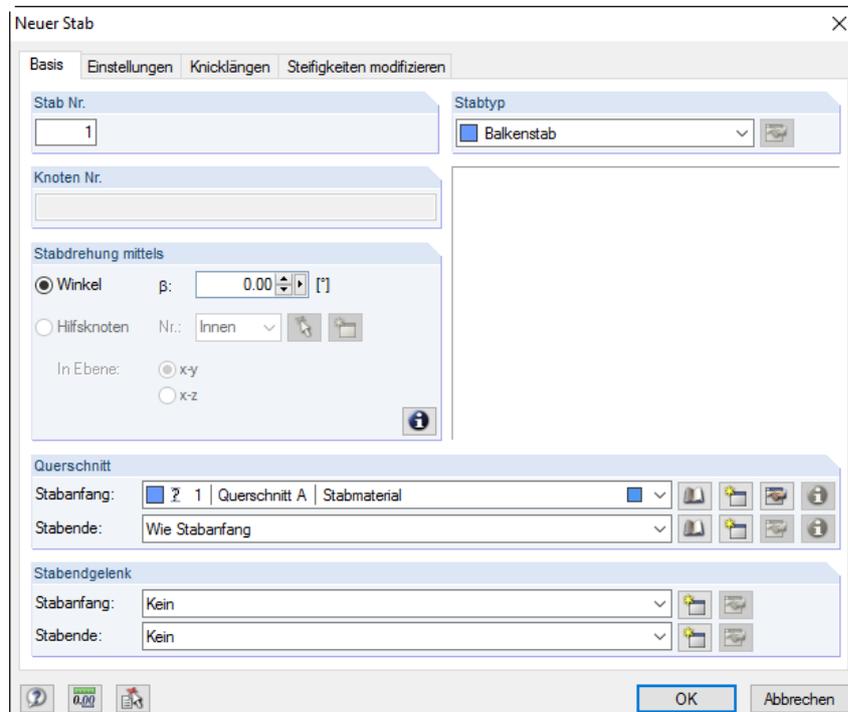


Bild 2.5: Stab

2.6 Lager



Die Lager können durch klicken auf den Button in der Symbolleiste erzeugt werden. Es ist im Bild 2.6 das Lager am Knoten 2 dargestellt. Bei den Lagerbedingungen wird das eingespannte Lager gewählt und die Verschiebung in u_x zugelassen. Das Lagerachsensystem wird der Skizze angepasst.

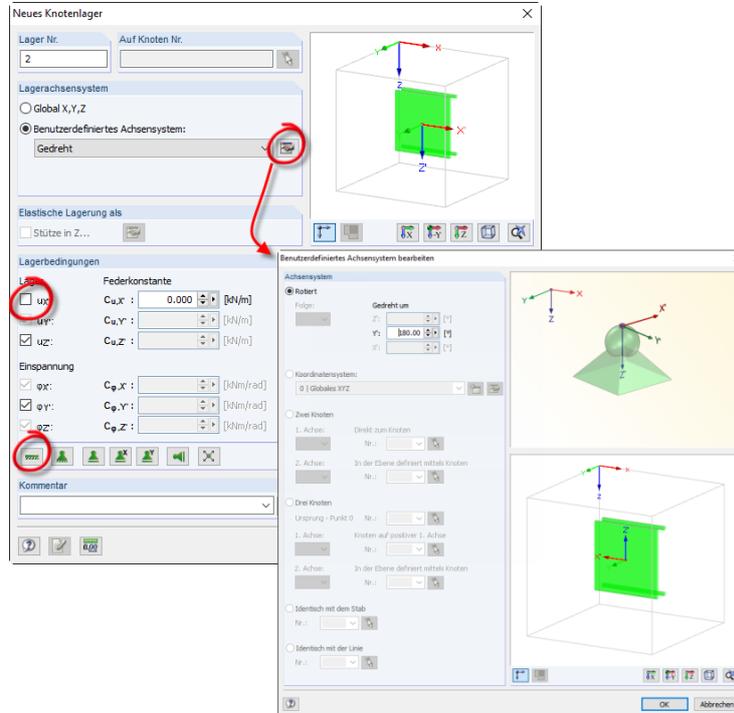
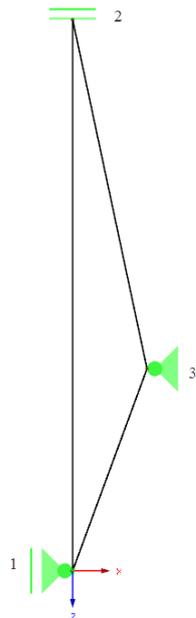


Bild 2.6: Neues Knotenlager

Zwischenblick



1.7 Knotenlager

Lager Nr.	An Knoten Nr.	Achsensystem	Lagerung bzw. Feder [kN/m] [kNm/rad]		
			u _x	u _z	φ _y
1	1	Global X,Y,Z	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	2	Benutzerdefiniertes X'	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3	3	Benutzerdefiniertes X'	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4					
5					
6					

Knoten Linien Materialien Flächen Öffnungen Knotenlager Linienlager Liniengelenke Querschnitte Stabendg

a) Zwischenblick b) Lagertabelle

Bild 2.7: System ohne Last und Lagerübersicht

2.7 Lastfall



Im Projekt-Navigator erzeugen wir einen neuen Lastfall unter Lastfälle und Kombinationen. Der Lastfall Systemlast wird erzeugt und bei dem Eigengewicht der Haken entfernt, da dieses nicht berücksichtigt werden soll.

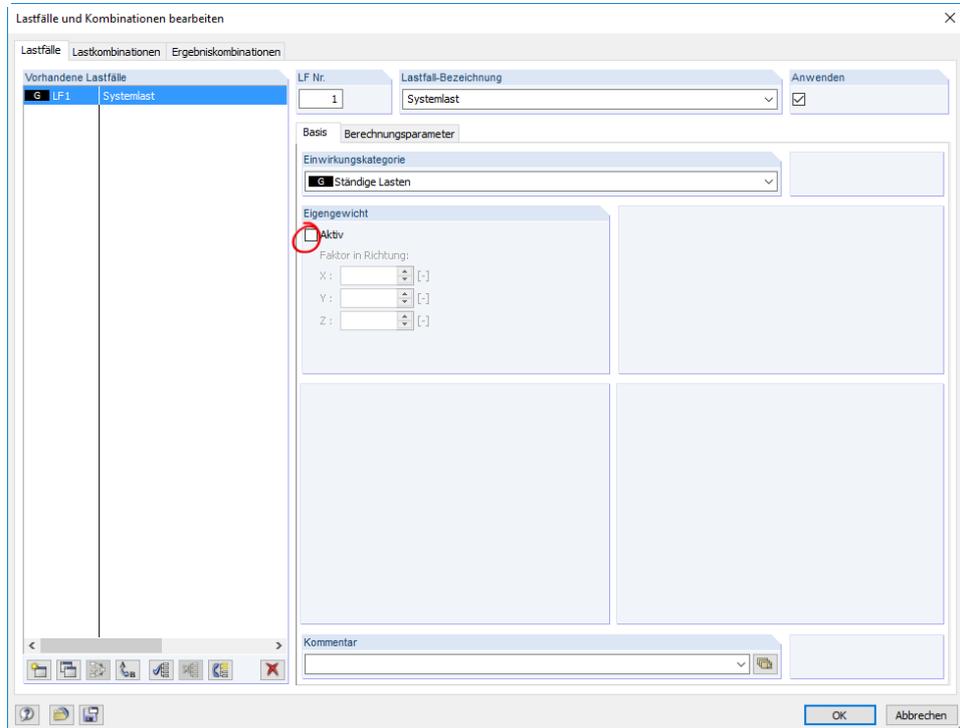


Bild 2.8: Lastfall

Die voreingestellten Berechnungsparameter werden beibehalten.

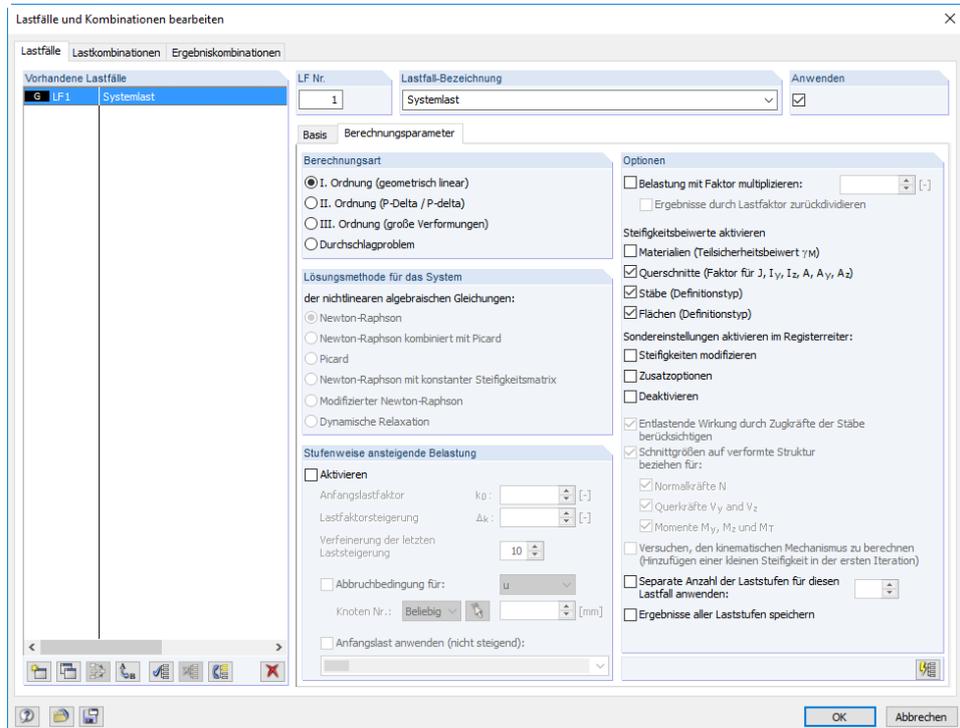


Bild 2.9: Berechnungsparameter

2.8 Lasten

Knotenlast



Die Knotenlasten werden über den Button der Symbolleiste entsprechend der Vorgabe erzeugt.

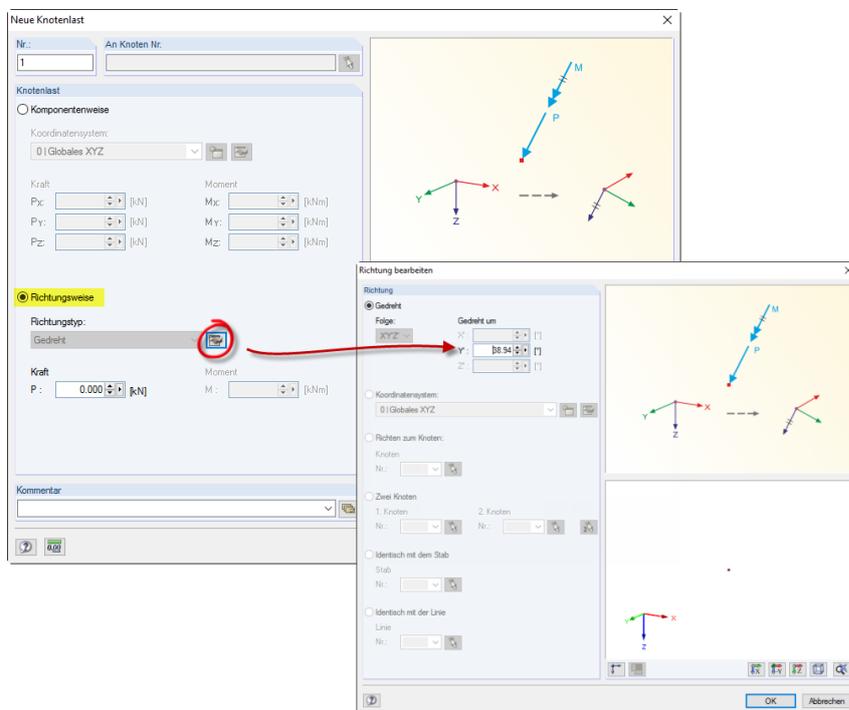


Bild 2.10: Richtungsbezogene Einzellast

Stablast



Die Dreieckslast auf dem Stab wird über den veränderlichen Lastverlauf erzeugt. Um die Länge des Stabes zu ermitteln, kann diese berechnet oder in dem Programm gemessen werden.

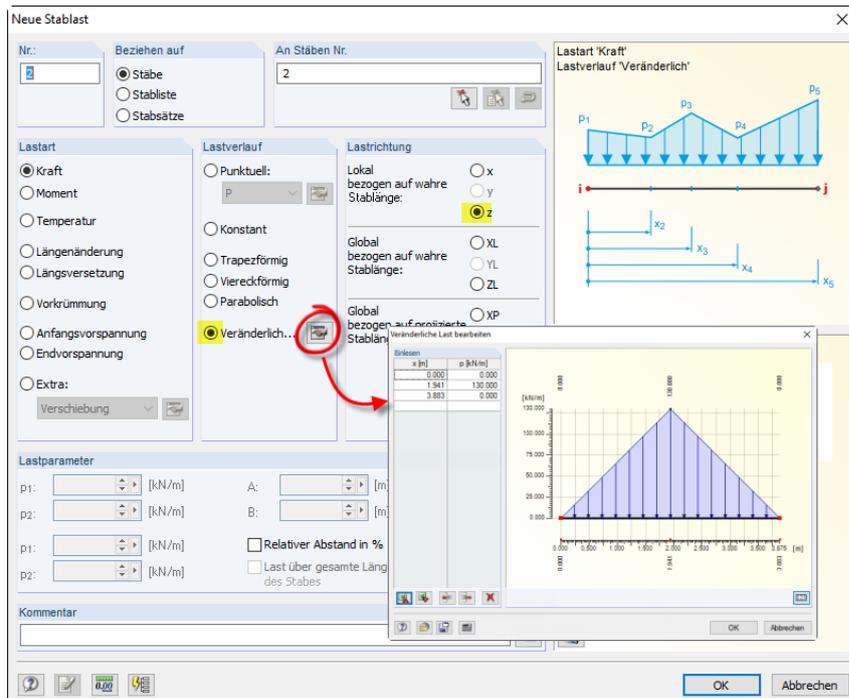


Bild 2.11: Veränderliche Stablast

2.9 Berechnung und Ergebnisse



Nach der Berechnung erscheinen in den unteren Tabellen die Ergebnisse für alle Knoten und Stäbe. Die Verformungen an den Knoten sind in Bild 2.12 gezeigt.

4.2 Knoten - Verformungen

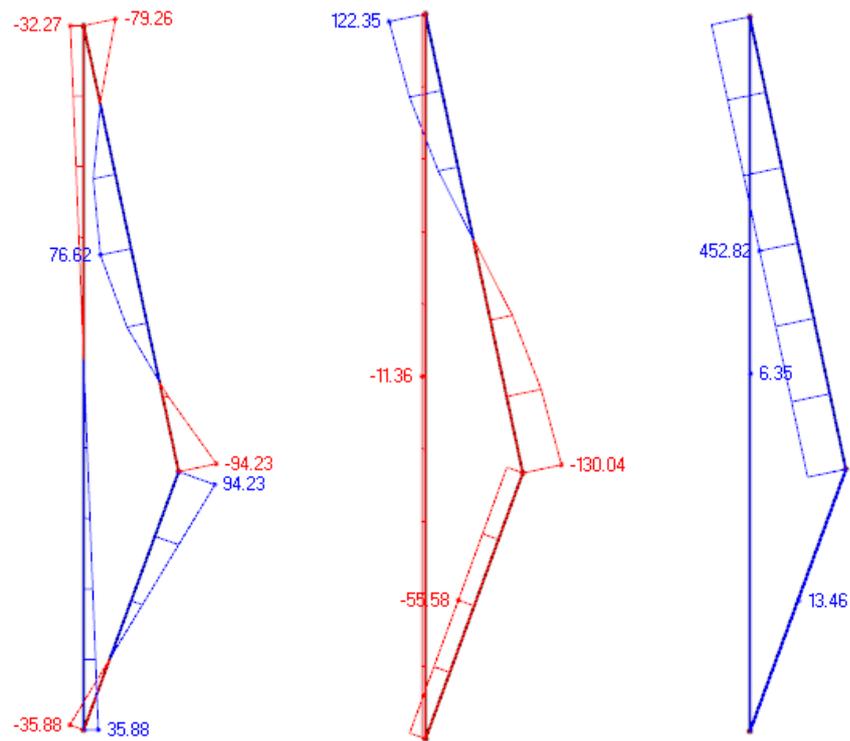
LF1 - Stablast

Knoten Nr.	Verschiebungen [mm]			Verdrehung φ_y [mrad]
	u _y	u _x	u _z	
1	1.174	0.000	1.174	-18.844
2	299.049	-299.049	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.000	129.632
Max	299.049	0.000	1.174	129.632
Min	0.000	-299.049	0.000	-18.844

Ergebnisse - Zusammenfassung | Knoten - Lagerkräfte | Knoten - Verformungen

Bild 2.12: Globale Verformungen an den Knoten

In der Grafik im Hauptfenster werden die Schnittkraftverläufe angezeigt.



c) Biegemoment M_y

d) Querkraft V_z

e) Normalkraft N

Bild 2.13: Ergebnisse der Knoten und Stäbe

3 Handrechnung

3.1 Weggrößenmethode

- | | | |
|---|--|---|
| 1) | Freiheitsgrade an das System antragen | |
| 2) | Inzidenztabelle mit dazugehörigen Stabwerten | |
| 3) | Lokale Elementsteifigkeitsmatrix | $K_{e,lok,i}$ |
| 4) | Transformationsmatrix | C und C^T |
| 4.1) | Transformation lokal \rightarrow global | C^T |
| 4.2) | Transformation global \rightarrow lokal | C |
| 5) | Globale Elementsteifigkeitsmatrix | $K_{e,i} = C^T \cdot K_{e,lok,i} \cdot C$ |
| 6) | reduzierte globalen Gesamtsteifigkeitsmatrix | $K_{e,red} = \sum K_{e,i}$ |
| (Hinweis: nur die jeweiligen Freiheitsgrade zuordnen) | | |
| 7) | Inverse globale Gesamtsteifigkeitsmatrix | $\sum K_e^{-1}$ |
| 8) | Knotenlastvektor | P |
| 9) | Lokale Stablast-Endschnittkraftvektoren | $S_{lok,i}^0$ |
| 10) | Globale Stablast-Endschnittkraftvektoren | $S_i^0 = C^T \cdot S_{lok,i}^0$ |
| 11) | Gesamtlastvektor | $F = P - \sum S_i^0$ |
| 12) | Globaler Verschiebungsvektor | $v = \sum K_e^{-1} \cdot F$ |
| 13) | Lokale Verschiebungen | $v_{lok,i} = C \cdot v_i$ |
| 14) | Lokale Stabschnittkräfte | $S_{lok,i} = K_{e,lok,i} \cdot v_{lok,i} + S_{lok,i}^0$ |
| 15) | Vorzeichenkonvention (VK) II zu Vorzeichenkonvention I | |

Für die Kontrolle der eigenen Rechnung sind die wichtigen Zwischen- und Endergebnisse angegeben. Im Anhang sind die maßgebenden Matrizen dargestellt.

3.2 Aufgabenstellung

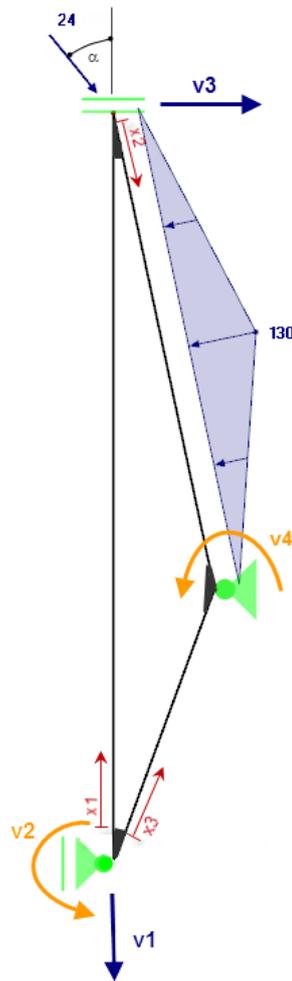
Die Handrechnung ist in zwei Teilaufgaben gegliedert und ermöglicht so einen schnellen Vergleich mit den ermittelten Ergebnissen in RFEM.

- Berechnung der globalen Knotenverschiebungen mit der reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix
- Ermittlung der Stabendschnittkräfte



Die folgenden Berechnungen beziehen sich auf die eingezeichneten Stabrichtungen und der Zuordnung der lokalen Freiheitsgrade.

3.3 System mit Freiheitsgraden



Gegeben:

Stab 1 : $E = 2300 \text{ kN/cm}^2$
 $I_y = 2500 \text{ cm}^4$
 $A = 14,10 \text{ cm}^2$

Stab 2,3 : $E = 2300 \text{ kN/cm}^2$
 $I_y = 2000 \text{ cm}^4$
 $A = 12,41 \text{ cm}^2$

$\alpha = 38,94^\circ$

Bild 3.1: System mit Verschiebungsrichtungen

3.4 Inzidenztabelle mit Stabwerten

	u_l	w_l	φ_l	u_r	w_r	φ_r	l [m]	sin	cos	EI [kNm ²]	EA [kN]
Stab 1	-	v_1	v_2	v_3	-	-	6,000	1	0	575	32 430
Stab 2	v_3	-	-	-	-	v_4	3,883	-0,9785	0,2060	460	28 543
Stab 3	-	v_1	v_2	-	-	v_4	2,341	-0,9397	0,3417	460	28 543

Tabelle 3.1: Kennwerte der einzelnen Stäbe

3.5 Globale Knotenverschiebungen

$$v = \sum K_e^{-1} \cdot F \quad (3.1)$$

Für das Ermitteln der Knotenverschiebungen werden die Freiheitsgrade der Steifigkeitsmatrix zugeordnet und diese dann zu einer reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix addiert.

Globale Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$K_{e,i} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Globale reduzierte Steifigkeitsmatrizen

$$K_{e,1,red} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$K_{e,2,red} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} & K_{14} \\ 0 & 0 & K_{41} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$K_{e,3,red} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & 0 & K_{26} \\ K_{32} & K_{33} & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{62} & K_{63} & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Globale reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$K_{e,ges} = \begin{bmatrix} 16\,224,4 & -172,1\,246 & 0 & -172,1\,246 \\ -172,1\,246 & 1\,169,3\,558 & 95,8\,333 & 393,0\,112 \\ 0 & 95,8\,333 & 434,1\,489 & 179,0\,978 \\ -172,1\,246 & 393,0\,112 & 179,0\,978 & 1\,259,85 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Lokale Stabendschnittkräfte $S_{\text{lok},2}^0$

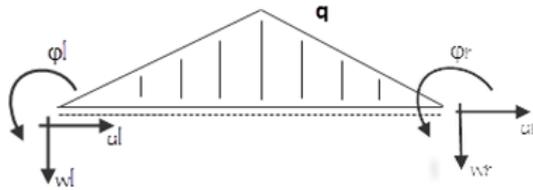


Bild 3.2: Lokale Stabendschnittkräfte

$$S_{\text{lok},2}^0 = \begin{bmatrix} N_l^0 \\ Q_l^0 \\ M_l^0 \\ N_r^0 \\ Q_r^0 \\ M_r^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \cdot l/4 \\ q \cdot 5l^2/96 \\ 0 \\ -q \cdot l/4 \\ -q \cdot 5l^2/96 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Danach wird S_2^0 berechnet und anschließend dem Vektor die Freiheitsgrade zugeordnet.

Gesamlastvektor F [kN]



Kraftanteile in der Einzellast beachten!

$$F = P - \sum S_i^0 \quad (3.8)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ -108,416 \\ 102,104 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Globaler Verschiebungsvektor v

$$v = \sum K_e^{-1} \cdot F \quad (3.10)$$

$$v = \begin{bmatrix} 0,00117 \\ -0,01888 \\ -0,29902 \\ 0,12960 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.6 Stabendschnittkräfte

$$S_{lok,i} = K_{e,lok,i} \cdot v_{lok,i} + S_{lok,i}^0 \quad (3.12)$$

Da sechs Schnittgrößen im Stab vorhanden sind, müssen die vollständigen Elementsteifigkeitsmatrizen benutzt werden.

Lokale Verschiebungen $v_{lok,i}$

$$v_{lok,i} = c \cdot v \quad (3.13)$$



Dem zugehörigen Verschiebungsvektor v müssen die jeweiligen Freiheitsgrade zugeordnet werden, die anderen sind null.

Beispiel $v_{lok,1}$

$$v_{lok,1} = c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Schnittgrößen VK_{II}

$$S_{lok,1} = \begin{bmatrix} -6,35 \\ 11,36 \\ -35,89 \\ 6,35 \\ -11,36 \\ -32,27 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$S_{lok,2} = \begin{bmatrix} -452,75 \\ -122,35 \\ 79,26 \\ 452,75 \\ -130,07 \\ -94,24 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$S_{lok,3} = \begin{bmatrix} -13,46 \\ -55,64 \\ 35,69 \\ 13,45 \\ 55,64 \\ 94,28 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Der Vergleich zu den berechneten Schnittgrößen von RFEM zeigt nur kleine Unterschiede, die durch Aufrundungsunterschiede entstehen. Damit wird gezeigt, dass ein Tragwerk auch mit unüblichen Bauteilabmessungen berechnet werden kann. Diese Möglichkeit bietet die Kontrolle sämtlicher statischer Systeme, die einem im Studium begegnen. Auf die nichtlineare Betrachtung wird in diesem Tutorial nicht weiter eingegangen.

Matrizen

Lokale Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{e,lok,i} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

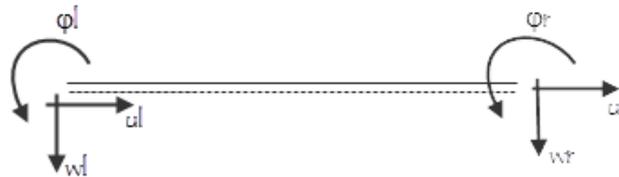


Bild 1.1: Gerader Stab

Transformationsmatrizen C und C^T

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Globale Elementsteifigkeitsmatrix

$K_{e,i} =$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{c^2EA}{L} + q\frac{5}{96} & -\frac{cEAs}{L} + \frac{12sEIc}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{c^2EA}{L} - \frac{12s^2EI}{L^3} & \frac{cEAs}{L} - \frac{12sEIc}{L^3} & -\frac{6sEI}{L^2} \\
 -\frac{cEAs}{L} + \frac{12sEIc}{L^3} & s^2EA + \frac{12c^2EI}{L^3} & -\frac{6cEI}{L^2} & \frac{cEAs}{L} - \frac{12s^2EIc}{L^3} & -s^2EA - \frac{12c^2EI}{L^3} & -\frac{6cEI}{L^2} \\
 -\frac{6sEI}{L^2} & -\frac{6cEI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6sEI}{L^2} & \frac{6cEI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 -\frac{c^2EA}{L} - \frac{12s^2EI}{L^3} & \frac{cEAs}{L} - \frac{12sEIc}{L^3} & \frac{6sEI}{L^2} & \frac{c^2EA}{L} + \frac{12s^2EI}{L^3} & -\frac{cEAs}{L} + \frac{12sEIc}{L^3} & \frac{6sEI}{L^2} \\
 \frac{cEAs}{L} - \frac{12sEIc}{L^3} & -s^2EA - \frac{12c^2EI}{L^3} & \frac{6cEI}{L^2} & -\frac{cEAs}{L} + \frac{12s^2EIc}{L^3} & s^2EA + \frac{12c^2EI}{L^3} & \frac{6cEI}{L^2} \\
 -\frac{6sEI}{L^2} & -\frac{6cEI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6sEI}{L^2} & \frac{6cEI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

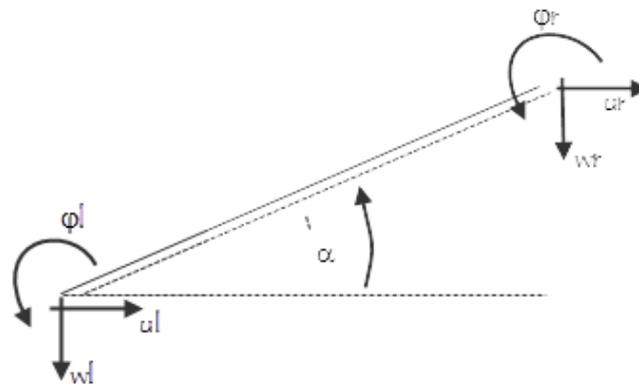


Bild 1.2: Gedrehter Stab

Literatur

- [1] *Programmbeschreibung RSTAB/RFEM*. DLUBAL GmbH, 2016.
- [2] Prof.Dr.-Ing.habil. Könke. *Vorlesungsreihe Statik I, II*. Bauhaus-Universität Weimar, 2015.
- [3] W.B. Krätzig, R. Harte, K. Meskouris und U. Wittek. *Tragwerke 2: Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke*. Springer Verlag, 3. Auflage, 1998.