Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung in einer dynamischen Analyse

Gerlind Schubert | Dlubal Software GmbH

Forderungen der EN 1998-1

Die **EN 1998-1 Abschnitt 2.2.2** und **4.4.2.2** [1] fordert für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit die Berechnung unter Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung (P-Δ-Effekt). Dieser Einfluss darf nur vernachlässigt werden, wenn der Empfindlichkeitsbeiwert der gegenseitigen Stockwerksverschiebung θ kleiner 0.1 ist. Der Beiwert θ ist wie folgt definiert:

$$\theta = \frac{P_{tot} \cdot d_r}{V_{tot} \cdot h} \tag{1}$$

mit

θ	Empfindlichkeitsbeiwert der gegenseitigen Stockwerksverschiebung
P_{tot}	Gesamtgewichtskraft im und oberhalb des betrachteten Geschosses, betrachtet in der Bemessungssituation Erdbeben (siehe Gleichung 2)
d_r	Gegenseitige Stockwerksverschiebung ermittelt als Differenz der horizontalen Verschiebungen d_S oben und unten im betrachteten Geschoss, dabei werden die Verschiebungen mit Hilfe des linearen Bemessungsantwortspektrum mit $q = 1.0$ ermittelt
V_{tot}	Gesamterdbebenkraft des betrachteten Geschosses, ermittelt mit Hilfe des linearen Bemessungsantwortspektrums
h	Geschosshöhe

Der Einfluss der Theorie II.Ordnung darf näherungsweise mit einem Faktor $1/(1-\theta)$ berücksichtigt werden wenn $0.1 < \theta \leq 0.2$. Für $\theta > 0.2$ ist die geometrische Steifigkeitsmatrix bei der Berechnung der Eigenwerte und bei der Berechnung des multi-modalen Antwortspektrenverfahrens zu berücksichtigen.

Geometrische Steifigkeitsmatrix

Für dynamische Analysen sind iterative Berechnungen zur nichtlinearen Bestimmung der Theorie II.Ordnung nicht geeignet. Das Problem kann linearisiert werden und es ist hinreichend genau die geometrische Steifigkeitmatrix auf Basis der axialen Lasten zur Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung heranzuziehen. Dabei wird angenommen, dass die vertikalen Lasten sich aufgrund horizontaler Einwirkungen nicht ändern und die Verformungen klein sind verglichen mit den Gebäudeabmessungen [2]. Die zu berücksichtigenden Lasten sollten denen der Bemessungssituation für Erdbeben nach **EN 1990 Abschnitt 6.4.3.4** [3] entsprechen:

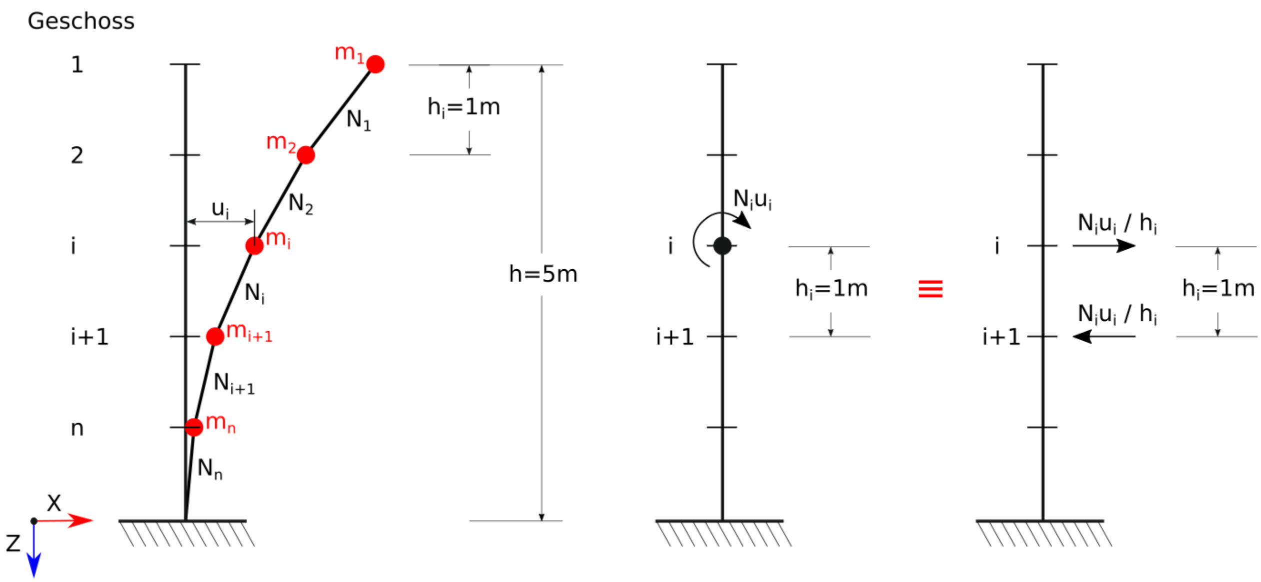
$$E_d = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2,i} Q_{k,i} \tag{2}$$

mit

E_d	Bemessungswert der Einwirkungen
$G_{k,j}$	Charakteristischer Wert einer ständigen Einwirkung j
$Q_{k,i}$	Charakteristischer Wert einer veränderlichen Einwirkung i
$\Psi_{2,i}$	Beiwert für quasi-ständige Werte der veränderlichen Einwirkungen i

Axiale Zugkräfte erhöhen die Steifigkeit, wie beispielsweise bei einem vorgespannten Seil. Druckkräfte setzen die Steifigkeit herab und können zu einer Singularität in der Steifigkeitsmatrix führen. Die geometrische Steifigkeit $\mathbf{K_g}$ ist nicht abhängig von den mechanischen Eigenschaften des Systems, sondern nur von Länge L und Normalkraft N im Stab.

Um das grundlegende Problem darzustellen, wird vereinfachend auf einen Kragarm zurückgegriffen, dieser ist in Bild 1 dargestellt. Die einzelnen Massepunkte des Kragarms stellen die einzelnen Geschosse eines Gebäudes dar. An diesem Gebäude soll eine dynamische Analyse unter Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung durchgeführt werden. Die Normalkräfte N_i in den einzelnen Geschossen $i = 1 \dots n$ ergeben sich aus den Vertikalkräften in der Bemessungssituation Erdbeben (siehe Gleichung 2). Die Geschosshöhe ist mit h_i definiert.



(a) Verformte Lage der Normalkräfte N_i (b) Hervorgerufene Versatzmomente / Querkräfte

Bild 1: Reduzierung eines Gebäudes auf eine Kragarmstruktur, die einzelnen Massepunkte stellen dabei die Geschosse dar. Die in (a) dargestellte Auslenkung aufgrund der Drucknormalkräfte wird (b) in äquivalente Versatzmomente bzw. Querkräfte umgerechnet [2].

Die geometrische Steifgkeitsmatrix $\mathbf{K_g}$ kann über die statischen Gleichgewichtsbedingungen hergeleitet werden:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{N_i}{h_i} \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K_g}} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Vereinfachend werden hier nur die Freiheitsgrade der horizontalen Verschiebungen dargestellt. Die gezeigte Herleitung beruht dem Ansatz des Versatzmomentes auf Basis eines linearen Verschiebungsansatzes. Dies ist für das Biegeelement eine Vereinfachung, beim Fachwerkelement eine exakte Annahme. Eine genauere Ermittlung der geometrischen Steifigkeitsmatrix für Biegebalken kann unter Verwendung eines kubischen Verschiebungsansatzes oder mit Hilfe der analytischen Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie erfolgen. Genauere Informationen und Herleitungen werden von *Werkle* [4] bereitgestellt.

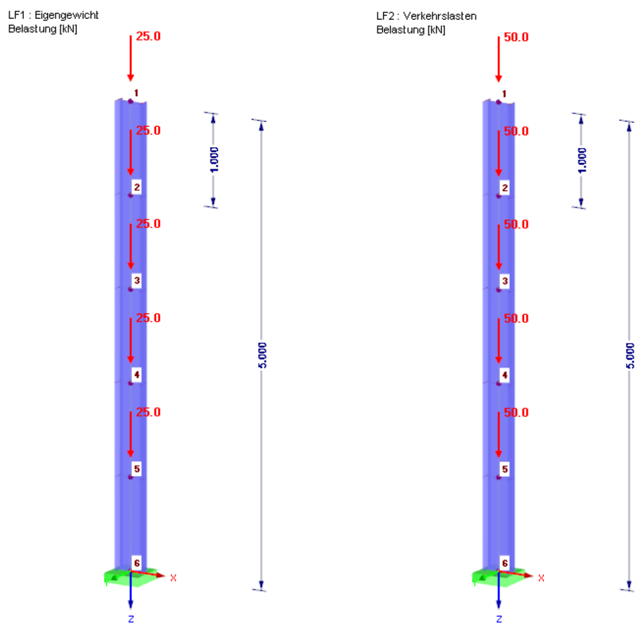
Die geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K_g}$ wird der Systemsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ hinzugefügt und ergibt die modifizierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K_{mod}}$.

$$\mathbf{K_{mod}} = \mathbf{K} + \mathbf{K_g} \tag{4}$$

Im Falle von Drucknormalkräften führt dies folglich zu einer Verringerung der Steifigkeit.

Beispiel: Eigenfrequenzen und multi-modales Antwortspektrenverfahren unter Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt wie die geometrische Steifigkeitsmatrix in *RFEM* und den Zusatzmodulen *RF-DYNAM Pro* berücksichtigt werden kann. Als Beispiel wird der in Bild 1 dargestellte Kragarm verwendet. Der Kragarm besteht aus fünf konzentrierten Massepunkten, hier wirken jeweils $4000\ kg$ in die globale X-Richtung. Das Eigengewicht und die Verkehrslasten werden als Knotenlasten zusammengefasst und in zwei separaten Lastfällen definiert. Diese Lastfälle sind in Bild 2 gezeigt.



(a) Eigengewicht in LF1 (b) Verkehrslasten in LF2

Bild 2: Eigengewicht und Verkehrslasten sind als Knotenlasten zusammengefasst und in zwei separaten Lastfällen definiert.

Der Querschnitt ist ein IPE 300 mit einem Material *S 235* mit $I_y = 8.356 \times 10^{-5}\ m^4$ und $E = 2.1 \times 10^{11}\ N/m^2$.

Um die geometrische Steifigkeitsmatrix bei einer dynamischen Analyse berücksichtigen zu können, wird zunächst im Hauptprogramm *RFEM* eine *Lastkombination* für die Bemessungssituation Erdbeben (siehe Gleichung 2) definiert. Die Definition der *Lastkombination* und resultierende Normalkräfte sind in Bild 3 illustriert.
Mit dem Modul *RF-DYNAM Pro - Eigenschwingungen* werden Eigenfrequenzen, Eigenformen und effektive Modalmassen einer Struktur ermittelt, dies kann unter Berücksichtigung verschiedenster Steifigkeitsmodifikationen geschehen (siehe Kapitel 2.4.7 im *RF-DYNAM Pro* Handbuch [5] und im Knowledge Base [6]).
Zwei Eigenschwingungsfälle sind definiert. Im *ESF2* wird die *LK1* zur Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix und damit zur Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung, importiert. Zum Vergleich ist der *ESF1* definiert, dieser enthält keine Steifigkeitsmodifikationen. Die Definition der *Eigenschwingungsfälle* ist im Bild 4 dargestellt.

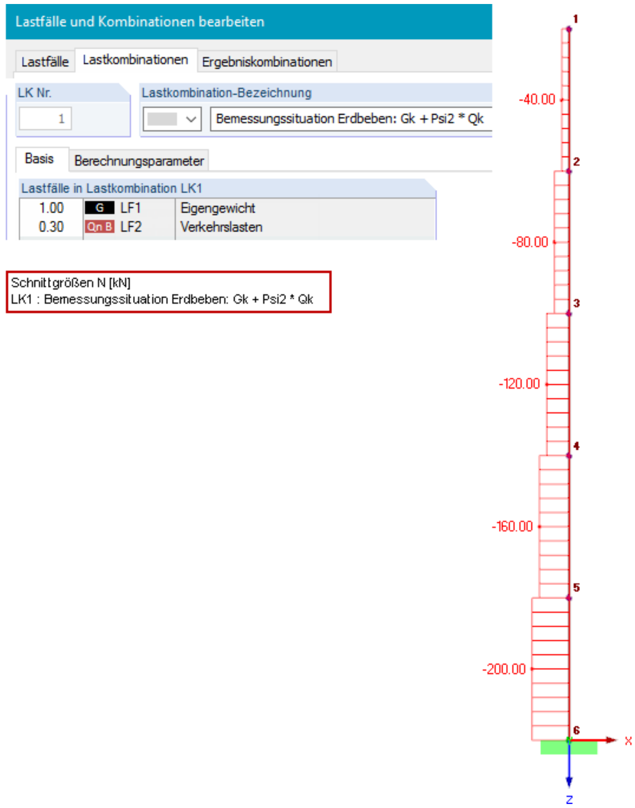


Bild 3: Definition einer *Lastkombination* für die Bemessungssituation Erdbeben (Gleichung 2) und die resultierenden Normalkräfte. Diese Normalkräfte werden zur Ermittlung der geometrischen Steifigkeitsmatrix verwendet.

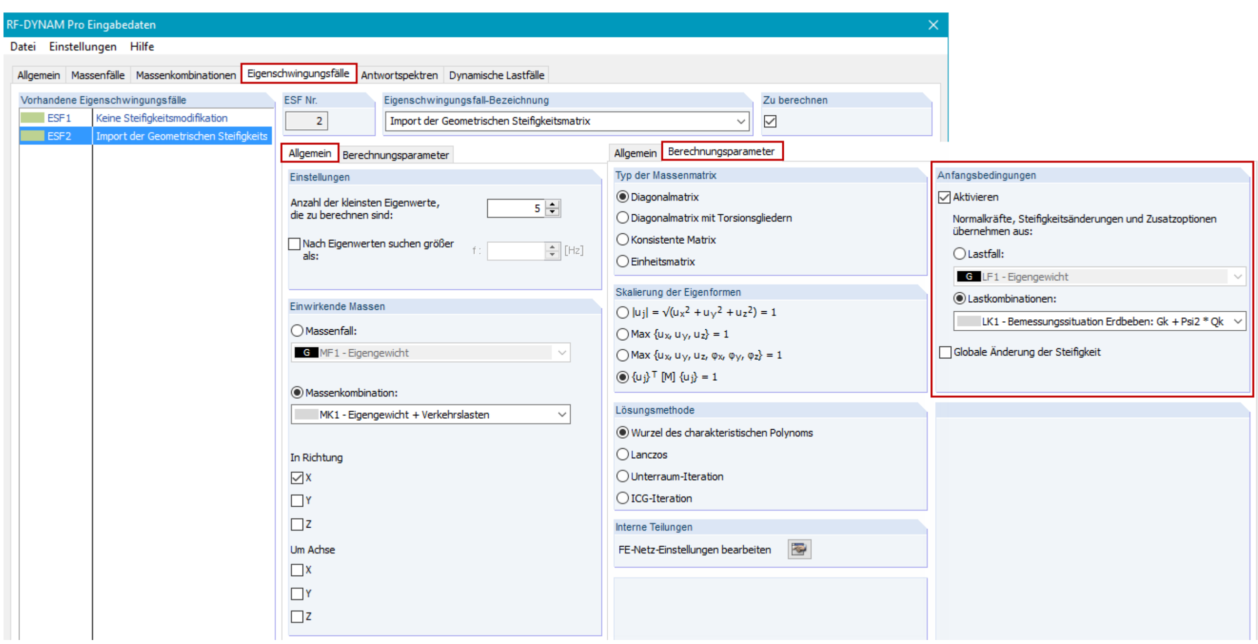


Bild 4: Parameter zur Eigenwertermittlung in *RF-DYNAM Pro - Eigenschwingungen*. Im Eigenschwingungsfall *ESF2* wird die *LK1* zur Berücksichtigung der Theorie II.Ordnung importiert. Zum Vergleich ist ein weiterer Eigenschwingungsfall, *ESF1*, definiert ohne Steifigkeitsmodifikationen.

In Tabelle 1 sind die ermittelten Eigenfrequenzen f $[Hz]$ und die Eigenperioden T $[sec]$, mit und ohne Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix, aufgelistet.

Eigen-form	Ohne Steifigkeitsmodifikationen (*ESF1*)			Mit geometrischer Steifigkeitsmatrix (*ESF2*)		
	Frequenz f $[Hz]$	Periode T $[sec]$	Spektrum S_a $[m/s^2]$	Frequenz f $[Hz]$	Periode T $[sec]$	Spektrum S_a $[m/s^2]$
1	1.235	0.810	0.738	1.205	0.830	0.712
2	7.882	0.127	2.692	7.855	0.127	2.697
3	22.323	0.045	1.597	22.295	0.045	1.598
4	43.108	0.023	1.309	43.080	0.023	1.310
5	64.147	0.016	1.208	64.119	0.016	1.208

Tabelle 1: Eigenfrequenzen f $[Hz]$, Eigenperioden T $[sec]$ und die aus dem Antwortspektrum abgelesenen Beschleunigungswerte S_a $[m/s^2]$, mit und ohne Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K_g}$ resultierend aus den Normalkräften aus *LK1*.

Beim multi-modalen Antwortspektrenverfahren werden mit Hilfe der Eigenfrequenzen die Beschleunigungswerte aus dem definierten Antwortspektrum abgelesen. Diese Beschleunigungswerte sind Grundlage für die Ermittlung der Ersatzlasten und Schnittgrößen des Antwortspektrenverfahrens. Die grafische Darstellung des benutzerdefinierten Antwortspektrums ist in Bild 5 gezeigt, die aus dem Antwortspektrum abgelesenen Beschleunigungswerte S_a $[m/s^2]$ für jeden Eigenwert sind in Tabelle 1 gelistet. Um eine richtige

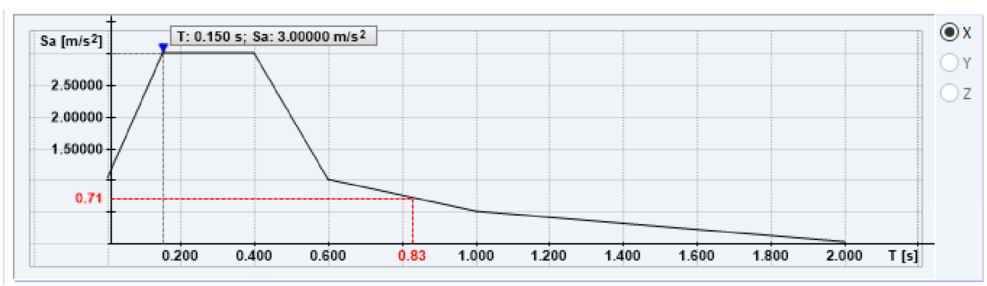


Bild 5: Benutzerdefiniertes Antwortspektrum.

Zuordnung der modifizierten Frequenzen sicherzustellen, muss der richtige Eigenschwingungsfall (*ESF*) im Dynamischen Lastfall (*DLF*) zugewiesen werden, diese Einstellung ist im Bild 6 gezeigt.

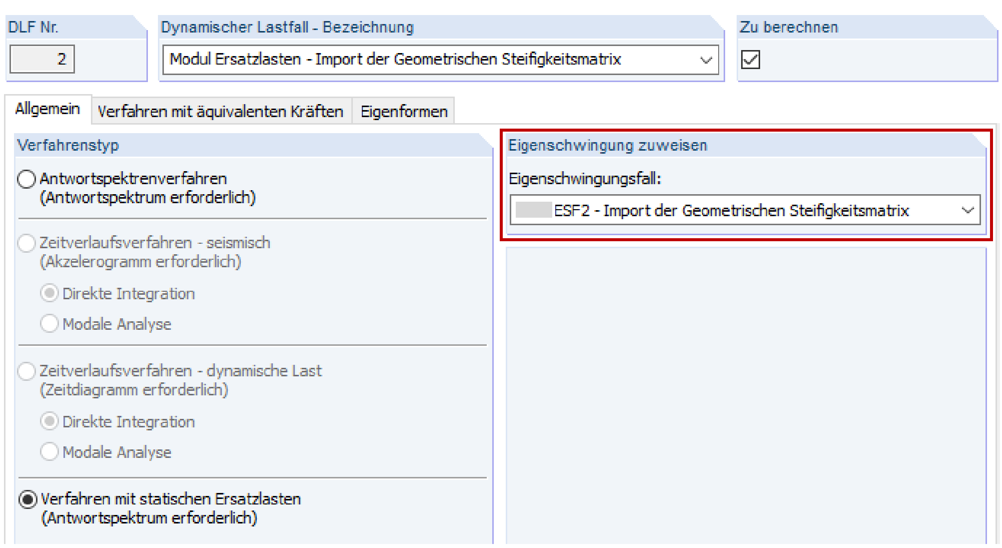
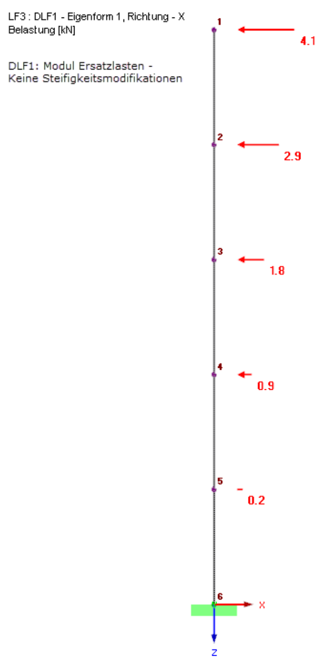
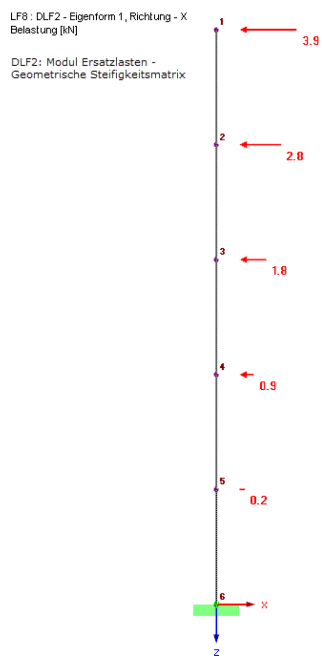


Bild 6: Zuweisung des Eigenschwingungsfalles im Dynamischen Lastfall zur Ermittlung der Ersatzlasten.

Die Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix führt im Falle von Drucknormalkräften zu einer Verringerung der Eigenfrequenz und kann, wie in diesem Beispiel, zu geringeren zugehörigen Beschleunigungswerten S_a führen. Die Modifikation der Eigenfrequenzen alleine reicht nicht aus um die Theorie II.Ordnung zu berücksichtigen, vielmehr kann dies sogar zu kleineren Ergebnissen führen, und damit auf der unsicheren Seite liegen. Es ist sehr wichtig, die modifizierte Steifigkeitsmatrix auch für die Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen zu verwenden.
Im Modul *RF-DYNAM Pro - Erzwungene Schwingungen* wird die modifizierte Steifigkeit automatisch zur Ermittlung der Ergebnisse des Antwortspektrenverfahrens verwendet, da hier die Berechnung innerhalb des Moduls *RF-DYNAM Pro* stattfindet.
Im Modul *RF-DYNAM Pro - Ersatzlasten* werden Ersatzlasten ermittelt und in Lastfälle ins Hauptprogramm *RFEM* exportiert. Die Berechnung findet damit teilweise in *RF-DYNAM Pro* und teilweise in *RFEM* statt. Theoretische Hintergründe zur Berechnung der Ersatzlasten befinden sich im RF-DYNAM Pro Handbuch [5]. Ein Verifikationsbeispiel zeigt die Berechnung an einem konkreten Beispiel [7]. Die ermittelten Ersatzlasten, mit und ohne Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix, sind in Bild 7 dargestellt.



(a) Ohne Steifigkeitmodifikationen



(b) Mit geometrischer Steifigkeitsmatrix

Bild 7: Die Ersatzlasten für die erste Eigenform (a) ohne Steifigkeitsmodifikationen aus dem *DLF1* und (b) unter Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix aus dem *DLF2*.

Der Export der Ersatzlasten hat viele Vorteile, aber eine korrekte Übernahme der Steifigkeitsmodifikation in die Lastfälle ist wichtig. Die Berechnungsparameter der exportierten Lastfälle müssen, wie im Bild 8 gezeigt, modifiziert werden.
Die einzelnen Lastfälle werden mit der *SRSS* oder *CQC*-Regel überlagert. Dies wird automatisch vom Modul *RF-DYNAM Pro* gesteuert und in Ergebniskombinationen exportiert. Die Ergebnisse, mit und ohne Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix, sind in Bild 9 dargestellt.
Die Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix führt zu größeren Verformungen und Schnittgrößen. Die angreifenden Ersatzlasten und resultierenden Auflagerlasten hingegen sind etwas kleiner unter Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix.

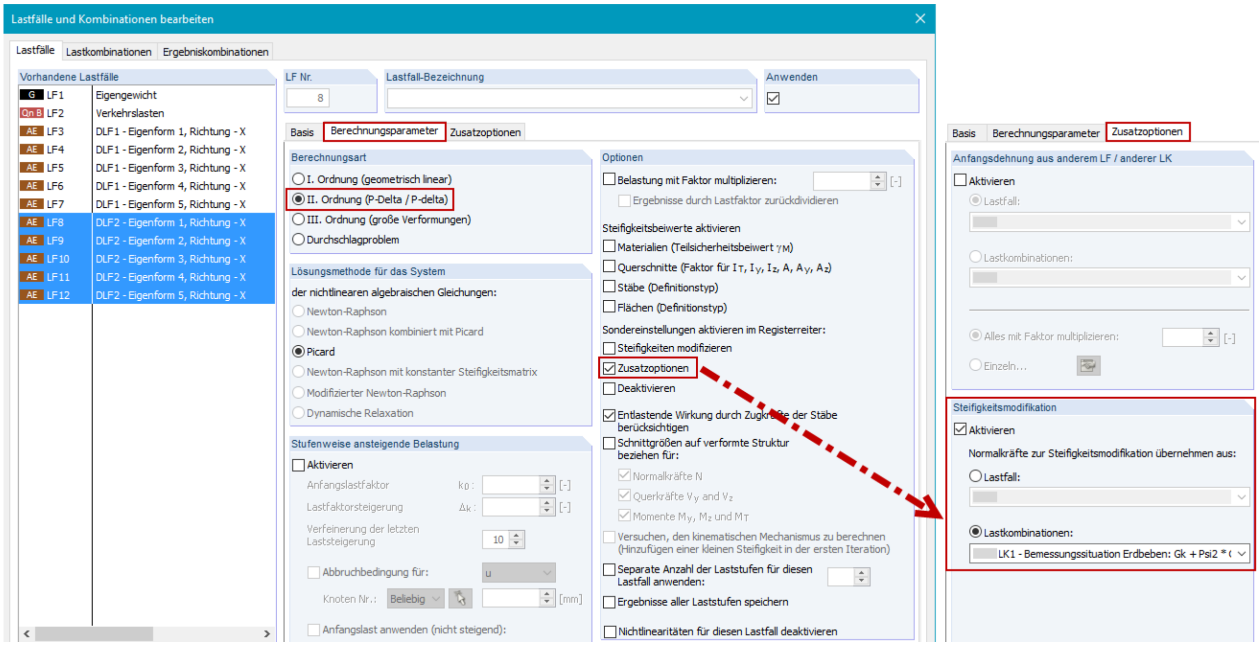
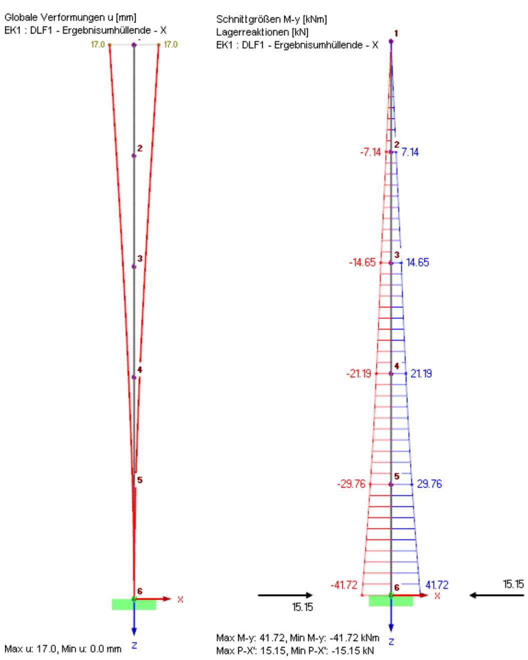
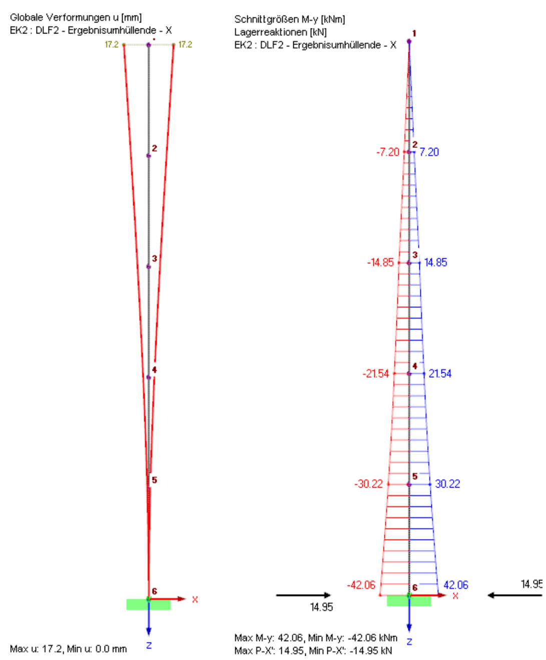


Bild 8: Berechnungsparameter der Lastfälle mit exportierten Ersatzlasten. Die geometrische Steifigkeitsmatrix muss auch hier berücksichtigt werden, dafür werden Normalkräfte aus der *LK1* importiert.



(a) Ohne Steifigkeitmodifikationen



(b) Mit geometrischer Steifigkeitsmatrix

Bild 9: Verformungen u_X, Moment M_Y und Auflagerreaktionen P_X resultierend aus dem multimodalen Antwortspektrenverfahren (a) ohne Steifigkeitsmodifikationen aus dem *DLF1* und (b) unter Berücksichtigung der geometrischen Steifigkeitsmatrix aus dem *DLF2*.

Literatur

[1] EN 1998-1. Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben Teil 1: Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten, 2010.

[2] Edward L. Wilson. *Three-dimensional static and dynamic analysis of structures*. CSi - Computers and Structures Inc., 2002.

[3] EN 1990. Eurocode 0: Grundlagen der Tragwerksplanung, 2010.

[4] Horst Werkle. *Finite Elemente in der Baustatik - Statik und Dynamik in der Stab- und Flächentragwerke*. Vieweg, 3 edition, 2008.

[5] *Zusatzmodul RF-DYNAM Pro - Programmbeschreibung*. Dlubal Software GmbH, 11 2016.

[6] Gerlind Schubert. Dlubal RFEM 5 & RSTAB 8 – Import von Steifigkeitsänderungen in RF-/DYNAM Pro – Eigenschwingungen, 05 2015. URL `www.dlubal.com/de/support-und-schulungen/support/knowledge-base/001023`.

[7] *Verification Example 105: Equivalent Loads*. Dlubal Software GmbH, 12 2015. URL `www.dlubal.com/-/media/2A3930367D3B43EB90E38509661DA5ED.ashx`.