Dlubal

Fassung
Oktober 2013

Zusatzmodul

RF-LAMINATE

Bemessung von Laminatflächen

Programm-Beschreibung

Alle Rechte, auch das der Übersetzung, vorbehalten.

Ohne ausdrückliche Genehmigung der Dlubal Software GmbH ist es nicht gestattet, diese Programmbeschreibung oder Teile daraus auf jedwede Art zu vervielfältigen.

© Dlubal Software GmbH
Am Zellweg 2 D-93464 Tiefenbach

Tel.: +49 9673 9203-0

Fax: +49 9673 9203-51

E-Mail: info@dlubal.de

Web: www.dlubal.de

Inhalt

	Inhalt	Seite
1.	**Einleitung**	**4**
1.1	Zusatzmodul RF-LAMINATE	4
1.2	RF-LAMINATE-Team	5
1.3	Gebrauch des Handbuchs	6
1.4	Aufruf des RF-LAMINATE - Moduls	6
2.	**Theoretische Grundlagen**	**8**
2.1	Formelzeichen	8
2.2	Materialmodelle	10
2.2.1	Orthotrop	10
2.2.2	Isotrop	15
2.2.3	Benutzerdefiniert	15
2.2.4	Hybrid	15
2.3	Steifigkeitsmatrix	16
2.3.1	Berechnung der Steifigkeitsmatrix unter Berücksichtigung des Schubverbundes	16
2.3.2	Keine Berücksichtigung des Schubverbunds	19
3.	**Eingabedaten**	**25**
3.1	Basisangaben	25
3.1.1	Tragfähigkeit	27
3.1.2	Gebrauchstauglichkeit	28
3.2	Materialkennwerte	29
3.3	Materialfestigkeiten	36
3.4	Lasteinwirkungsdauer und Nutzungsklasse	37
3.5	Gebrauchstauglichkeitsparameter	39
4.	**Berechnung**	**41**
4.1	Details	41
4.1.1	Spannungen	42
4.1.2	Ergebnisse	49
4.2	Norm	50
4.2.1	Materialbeiwerte	50
4.2.2	Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerte	52
4.3	Zu berechnen	53
5.	**Ergebnisse**	**54**
5.1	Max. Spannung/Ausnutzung belastungsweise	55
5.2	Max. Spannung/Ausnutzung flächenweise	60
5.3	Spannungen punktweise	60
5.4	Max. Verschiebungen	62
5.5	Stückliste	63
6.	**Ausdruck**	**65**
6.1	Ausdruckprotokoll	65
6.2	Grafikausdruck	65
6.2.1	Ergebnisse am RFEM-Modell	65
6.2.2	Ergebnisse in Schichten	67
7.	**Allgemeine Funktionen**	**68**
7.1	Einheiten und Dezimalstellen	68
7.2	Export der Ergebnisse	69
8.	**Beispiele**	**71**
8.1	Berechnung der Steifigkeitsmatrixglieder	71
8.1.1	Berücksichtigung des Schubverbunds zwischen den Schichten	74
8.1.2	Keine Berücksichtigung des Schubverbunds zwischen den Schichten	79
8.2	Berechnung der Spannungen	82
8.2.1	Berechnung der einzelnen Spannungskomponenten	83
8.2.2	Berechnungsablauf in RF-LAMINATE	85
8.3	Berechnung einer Deckenplatte mit Balkon gemäß DIN EN 1995-1-1	91
9.	**Anhänge**	**99**
9.1	Transformationsgleichungen	99
9.2	Prüfung der positiven Definitheit der Steifigkeitsmatrix	100
A	**Literatur**	**101**
B	**Index**	**102**

1. Einleitung

1.1 Zusatzmodul RF-LAMINATE

Das Zusatzmodul RF-LAMINATE von DLUBAL Software berechnet Verformungen und Spannungen von Laminatflächen. Es eignet sich beispielsweise für die Bemessung von Brettsperrholz, Brettschichtholz oder OSB-Platten. Aber auch im Betonbau, Leichtbau oder im Elementbau kann es zur Berechnung von Schichtenelementen verwendet werden. In RF-LAMINATE besteht die Möglichkeit, einen Schichtenaufbau mittels der aus RFEM bekannten Materialbibliothek oder einen benutzerdefinierten Aufbau zu definieren.

Mit dem Modul RF-LAMINATE lässt sich der Schichtenaufbau beliebiger Materialmodelle definieren. Dabei stehen nicht nur isotrope und orthotrope Materialmodelle zur Verfügung, sondern auch benutzerdefinierte und hybride Modelle, die eine Kombination von isotropen und orthotropen Materialen in einem Schichtenaufbau ermöglichen. Für orthotrope Materialen können die Einzelschichten um den Winkel β rotiert und so unterschiedliche Steifigkeiten in eine gesuchte Richtung berücksichtigt werden. Zudem kann der Schubverbund zwischen den einzelnen Schichten berücksichtigt werden.

Der übersichtliche Aufbau und die intuitiven Eingabe- und Ausgabemasken tragen zur Benutzerfreundlichkeit des Moduls bei. Dieses Handbuch enthält alle notwendigen Informationen für die Arbeit mit RF-LAMINATE, einschließlich einiger typischer Beispiele.

RF-LAMINATE ist vollständig in RFEM integriert. Es erscheint jedoch nicht nur auf der Benutzeroberfläche als Teil des Hauptprogramms: Die Ergebnisse der Laminatberechnung können einschließlich der grafischen Darstellung in das RFEM-Ausdrucksprotokoll übergeben werden. Das ansprechende Layout des Programms und vor allem der einheitliche Aufbau der Dlubal-Zusatzmodule erleichtern die Arbeit mit RF-LAMINATE.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei Ihrer Arbeit mit RFEM und RF-LAMINATE.

Ihr Team von DLUBAL Software GmbH.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

1.2 RF-LAMINATE-Team

An der Entwicklung von RF-LAMINATE waren beteiligt:

Programmkoordinierung

Dipl.-Ing. Georg Dlubal
Dipl.-Ing. (FH) Younes El Frem
Ing. Pavel Bartoš

Programmierung

Doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
Mgr. Petr Zajíček
Ing. Lukáš Weis
Mgr. Vítězslav Štembera, Ph.D.

Querschnitts- und Materialdatenbank

Ing. Jan Rybín, Ph.D.

Programmdesign, Dialogbilder und Icons

Dipl.-Ing. Georg Dlubal
MgA. Robert Kolouch

Programmkontrolle

Mgr. Vítězslav Štembera, Ph.D.
Ing. Iva Horčičková
Dipl.-Ing. (FH) Bastian Kuhn

Handbuch, Hilfesystem und Übersetzungen

Ing. Fabio Borriello
Ing. Dmitry Bystrov
Eng.º Rafael Duarte
Ing. Jana Duníková
Ing. Lara Freyer
Alessandra Grosso
Bc. Chelsea Jennings
Jan Jeřábek
Ing. Ladislav Kábrt
Ing. Aleksandra Kociołek
Mgr. Michaela Kryšková
Dipl.-Ing. Tingting Ling
Ing. Roberto Lombino
Eng.º Nilton Lopes
Mgr. Ing. Hana Macková
Ing. Téc. Ind. José Martínez
MA SKT Anton Mitleider
Dipl.-Ü. Gundel Pietzcker
Mgr. Petra Pokorná
Ing. Zoja Rendlová
Dipl.-Ing. Jing Sun
Ing. Marcela Svitáková
Dipl.-Ing. (FH) Robert Vogl
Ing. Marcin Wardyn

Technische Unterstützung und Endkontrolle

M.Eng. Cosme Asseya
Dipl.-Ing. (BA) Markus Baumgärtel
Dipl.-Ing. Moritz Bertram
M.Sc. Sonja von Bloh
Dipl.-Ing. (FH) Steffen Clauß
Dipl.-Ing. Frank Faulstich
Dipl.-Ing. (FH) René Flori
Dipl.-Ing. (FH) Stefan Frenzel
Dipl.-Ing. (FH) Walter Fröhlich
Dipl.-Ing. Wieland Götzler
Dipl.-Ing. (FH) Andreas Hörold
Dipl.-Ing. (FH) Paul Kieloch
Dipl.-Ing. (FH) Bastian Kuhn
Dipl.-Ing. (FH) Ulrich Lex
Dipl.-Ing. (BA) Sandy Matula
Dipl.-Ing. (FH) Alexander Meierhofer
M.Eng. Dipl.-Ing. (BA) Andreas Niemeier
Dipl.-Ing. (FH) Gerhard Rehm
M.Eng. Dipl.-Ing. (FH) Walter Rustler
M.Sc. Dipl.-Ing. (FH) Frank Sonntag
Dipl.-Ing. (FH) Christian Stautner
Dipl.-Ing. (FH) Lukas Sühnel
Dipl.-Ing. (FH) Robert Vogl

1.3 Gebrauch des Handbuchs

Da die Themenbereiche Installation, Benutzeroberfläche, Ergebnisauswertung und Ausdruck im RFEM-Handbuch ausführlich erläutert sind, wird hier auf eine Beschreibung verzichtet. Der Schwerpunkt dieses Handbuchs liegt auf den Besonderheiten, die sich im Rahmen der Arbeit mit dem Zusatzmodul RF-LAMINATE ergeben.

Details...

Dieses Handbuch orientiert sich an der Reihenfolge und am Aufbau der Eingabe- und Ergebnismasken. Im Text sind die beschriebenen **Schaltflächen** (Buttons) in eckige Klammern gesetzt, z. B. [Details]. Gleichzeitig sind sie am linken Rand abgebildet. **Begriffe**, die in Dialogen, Tabellen und Menüs erscheinen, in *Kursivschrift* hervorgehoben, sodass die Erläuterungen gut nachvollzogen werden können.

Am Ende des Handbuchs befindet sich ein Stichwortverzeichnis. Sollten Sie dennoch nicht fündig werden, so können Sie die Suchfunktion auf unserer Website www.dlubal.de nutzen, um in der umfangreichen Liste aller *Fragen und Antworten* das Problem nach bestimmten Kriterien einzugrenzen.

1.4 Aufruf des RF-LAMINATE - Moduls

Es bestehen in RFEM folgende Möglichkeiten, das Zusatzmodul RF-LAMINATE zu starten.

Menü

Sie können das Zusatzmodul aufrufen mit dem RFEM-Menü

Zusatzmodule → Sonstige → RF-LAMINATE.

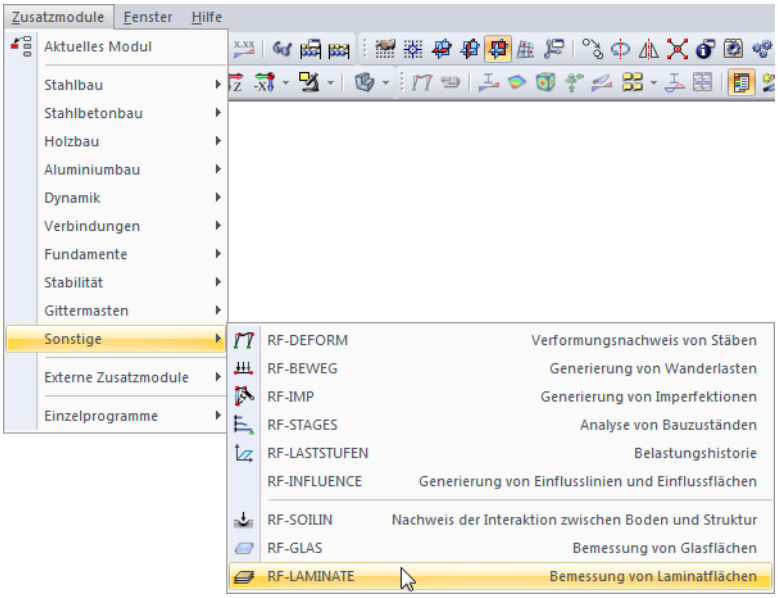


Bild 1.1: Menü: *Zusatzmodule → Sonstige → RF-LAMINATE*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Navigator

Alternativ rufen Sie das Zusatzmodul im *Daten*-Navigator auf durch Anklicken des Eintrags

Zusatzmodule → RF-LAMINATE – Bemessung von Laminatflächen.

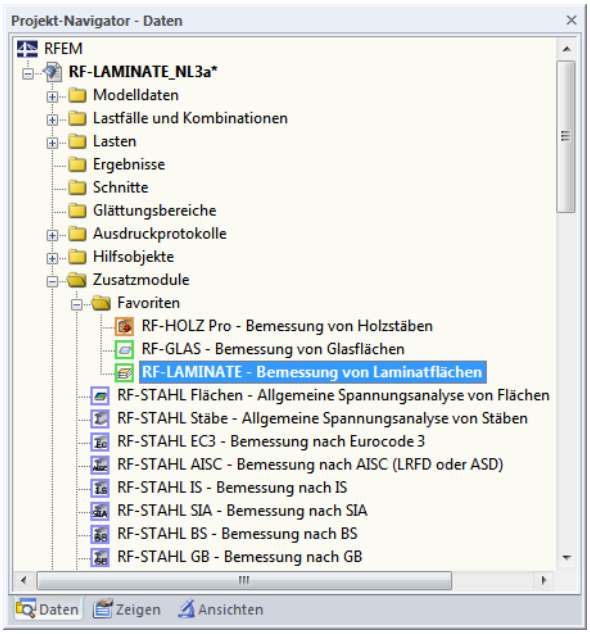
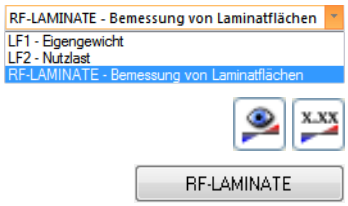


Bild 1.2: *Daten*-Navigator: *Zusatzmodule → RF-LAMINATE*

Panel



Wenn im RFEM-Modell schon Ergebnisse von RF-LAMINATE vorliegen, können Sie das Bemessungsmodul auch über das Panel starten:

Stellen Sie den RF-LAMINATE-Fall in der Lastfallliste der Symbolleiste ein. Lassen Sie über die Schaltfläche [Ergebnisse ein/aus] die Verformungen oder Spannungen an den Flächen grafisch darstellen.

Im Panel können Sie nun die Schaltfläche [RF-LAMINATE] zum Aufruf des Moduls benutzen.

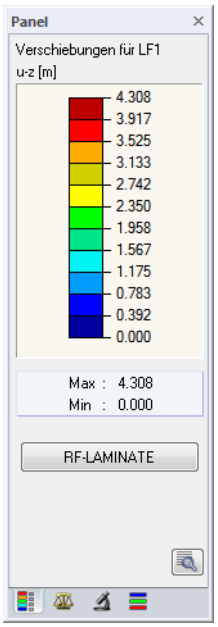


Bild 1.3: Panel: Schaltfläche [RF-LAMINATE]

2. Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel stellt die Grundlagen vor, die für die Arbeit mit RF-LAMINATE von Bedeutung sind.

2.1 Formelzeichen

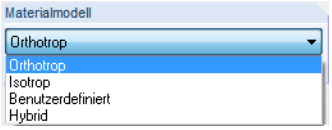
t	Dicke der einzelnen Schichten [m]
β	Orthotropierichtung [°]
E	Elastizitätsmodul [kN/cm²]
E_x	Elastizitätsmodul in Richtung der x'-Achse [KN/cm²]
E_y	Elastizitätsmodul in Richtung der y'-Achse [KN/cm²]
G	Schubmodul [KN/cm²]
G_{xy}	Schubmodul in $x'y'$-Ebene [KN/cm²]
G_{xz}	Schubmodul in $x'z$-Ebene [KN/cm²]
G_{yz}	Schubmodul in $y'z$-Ebene [KN/cm²]
ν	Querdehnzahl [-]
ν_{xy}, ν_{yx}	Querdehnzahlen in $x'y'$'-Ebene [-]
γ	Spezifisches Gewicht [N/m³]
α_T	Wärmedehnzahl [1/K]
d'_{ij}	Elemente der Teilsteifigkeitsmatrix im Koordinatensystem x', y', z [KN/cm²]
d_{ij}	Elemente der Teilsteifigkeitsmatrix im Koordinatensystem x, y, z [KN/cm²]
D_{ij}	Elemente der Gesamtsteifigkeitsmatrix [Nm, Nm/m, N/m]
σ_x, σ_y	Normalspannungen [KN/cm²]
$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$	Schubspannungen [KN/cm²]
n	Anzahl der Schichten [-]
z	Koordinate der z-Achse [m]
m_x	Biegemoment, das Spannungen in Richtung der x-Achse [Nm/m] erzeugt
m_y	Biegemoment, das Spannungen in Richtung der y-Achse [Nm/m] erzeugt
m_{xy}	Torsionsmoment [Nm/m]
v_x, v_y	Querkraft [N/m]
n_x	Normalkraft in Richtung der x-Achse [N/m]
n_y	Normalkraft in Richtung der y-Achse [N/m]
n_{xy}	Schubfluss [N/m]
$f_{b,k}$	Charakteristischer Wert der Biegefestigkeit [KN/cm²]
$f_{t,k}$	Charakteristischer Wert der Zugfestigkeit [KN/cm²]
$f_{c,k}$	Charakteristischer Wert der Druckfestigkeit [KN/cm²]
$f_{b,0,k}$	Charakteristischer Wert der Biegefestigkeit in Faserrichtung [KN/cm²]

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

$f_{t,0,k}$	Charakteristischer Wert der Zugfestigkeit in Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{c,0,k}$	Charakteristischer Wert der Druckfestigkeit in Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{b,90,k}$	Charakteristischer Wert der Biegefestigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{t,90,k}$	Charakteristischer Wert der Zugsfestigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{c,90,k}$	Charakteristischer Wert der Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{eqv,k}$	Charakteristischer Wert der Vergleichsfestigkeit [KN/cm^2]
$f_{xy,k}$	Charakteristischer Wert der Schubfestigkeit in der Plattenebene [KN/cm^2]
$f_{v,k}$	Charakteristischer Wert der Schubfestigkeit [KN/cm^2]
$f_{R,k}$	Charakteristischer Wert der Biegefestigkeit [KN/cm^2]
$f_{b,d}$	Bemessungswert der Biegesteifigkeit [KN/cm^2]
$f_{t,d}$	Bemessungswert der Zugfestigkeit [KN/cm^2]
$f_{c,d}$	Bemessungswert der Druckfestigkeit [KN/cm^2]
$f_{b,0,d}$	Bemessungswert der Biegefestigkeit in Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{t,0,d}$	Bemessungswert der Zugfestigkeit in Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{c,0,d}$	Bemessungswert der Druckfestigkeit in Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{b,90,d}$	Bemessungswert der Biegesteifigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{t,90,d}$	Bemessungswert der Zugfestigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{c,90,d}$	Bemessungswert der Druckfestigkeit quer zur Faserrichtung [KN/cm^2]
$f_{eqv,d}$	Bemessungswert der Vergleichsspannung [KN/cm^2]
$f_{xy,d}$	Bemessungswert der Schubfestigkeit in der Plattenebene [KN/cm^2]
$f_{v,d}$	Bemessungswert der Schubfestigkeit [KN/cm^2]
$f_{R,d}$	Bemessungswert der Rollschubfestigkeit [KN/cm^2]

2.2 Materialmodelle

Mit dem Modul RF-LAMINATE lässt sich der Schichtaufbau aus beliebigen Materialien und mit unterschiedlichen Materialmodelle definieren. Es stehen die folgenden Materialmodelle zur Auswahl:



- *Orthotrop*
- *Isotrop*
- *Benutzerdefiniert*
- *Hybrid*

2.2.1 Orthotrop

Die Eigenschaften eines orthotropen Materials sind je nach Richtung unterschiedlich. Deshalb erfolgt die Definition bei diesem Materialmodell wahlweise über zwei Elastizitätsmoduln, E_x und E_y, drei Schubmoduln G_{yz}, G_{xz} und G_{xy}, zwei Querdehnzahlen ν_{xy} und ν_{yx}, dem spezifischen Gewicht γ und der Wärmedehnzahl α_T.

Zur Berechnung muss die aus den Steifigkeiten generierte Matrix positiv definiert und symmetrisch sein. Deshalb müssen folgende Begrenzungen eingehalten werden:

$$E_x > 0,\ E_y > 0,\ G_{yz} > 0,\ G_{xz} > 0,\ G_{xy} > 0,$$
$$\left|\nu_{xy}\right| \le 0.999\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & & & \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & & & \\ & & \frac{1}{G_{yz}} & & \\ & & & \frac{1}{G_{xz}} & \\ & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{D} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} \end{bmatrix} G_{yz}G_{xz}G_{xy} = \frac{G_{yz}G_{xz}G_{xy}}{E_xE_y}\left(1-\nu_{xy}\nu_{yx}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \nu_{xy}\nu_{yx} < 1$$

$$1 - \nu_{xy}\cdot\left(\nu_{xy}\frac{E_y}{E_x}\right) > 0$$

$$\nu_{xy}^2\frac{E_y}{E_x} < 1$$

$$\Rightarrow \left|\nu_{xy}\right| < \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

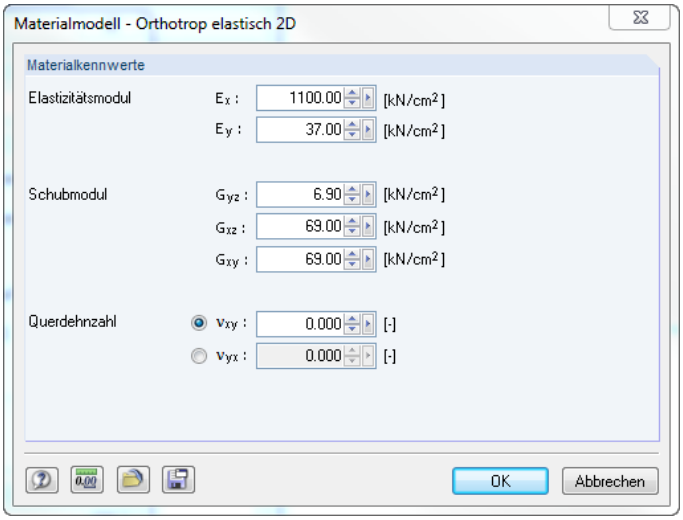


Bild 2.1: Orthotropes Materialmodell

Zwischen Elastizitätsmoduln und Querdehnzahlen besteht also folgender Zusammenhang:

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \tag{2.1}$$

Beispiele für Materialien mit orthotropen Eigenschaften sind Holz und gewalzte Stahlbleche.

Diesem Verhältnis liegt die Beziehung von Ursache - Ort zugrunde. Die Beziehung der Querdehnzahl wird bei diesem Materialmodell nicht mehr nach der Gleichung

$$\nu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

berechnet. Am einfachsten lässt sich diese Beziehung mit folgender Skizze verdeutlichen:

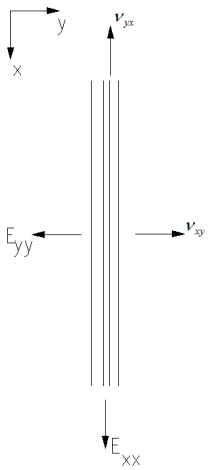


Bild 2.1: Verhältnismäßigkeit der Beziehungen

Die Ursache des großen E-Moduls in x-Richtung hat also einen Einfluss auf die Querdehnung in der y-Richtung, welche nach dieser Beziehung auch entsprechend groß sein muss. Analog dazu muss bei einem kleinen E-Modul in y-Richtung die Querdehnung in x auch klein sein. Die Ursache kleine oder große Querdehnung ergibt sich demzufolge aus dem Ort der Kraft-einleitung bzw. der Steifigkeit an diesem Ort.

Wenn die Querdehnzahlen nicht definiert sind, hat es sich bewährt die Querdehnung nach folgendem Muster zu berechnen.

$$\overline{\nu_{xy}} = \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{2 \cdot G_{xy}} - 1$$

$$\nu_{xy} = \frac{\overline{\nu_{xy}}}{\sqrt{E_x \cdot E_y}} \cdot E_x$$

$$\nu_{yx} = \frac{\overline{\nu_{xy}}}{\sqrt{E_x \cdot E_y}} \cdot E_y$$

Um eine korrekte Berechnung durchzuführen, müssen die Querdehnzahlen also den in den oben definierten Gleichungen und Begrenzungen entsprechen.

Bei einem orthotropen Material bestehen theoretisch zwei Methoden zur Definition der Querdehnzahl. In RFEM erfolgt dies gemäß der Gleichung (2.1) und dem Verhältnis

$$\nu_{xy} > \nu_{yx} \tag{2.2}$$

wenn die Faser in die x'-Richtung verläuft, d. h. $E_x > E_y$. In der Literatur findet sich auch ein zweiter Weg, der durch Gleichung $\nu_{yx} / E_x = \nu_{xy} / E_y$ beschrieben ist und zu der Ungleichung $\nu_{xy} < \nu_{yx}$ führt. Werden die orthotropen Materialeigenschaften z. B. aus Zulassungen entnommen, können die angesetzten orthotropen Definitionen einfach aus der Ungleichung zwischen den zwei Querdehnzahlen ermittelt werden.

In der Praxis werden Materialparameter den entsprechenden Normen entnommen. Dies lässt sich am Beispiel von Nadelholz der Festigkeitsklasse C24 veranschaulichen, die Werte finden sich in der Norm EN 338, Tabelle 1.

$$\begin{aligned} E_{0,\text{mean}} &= 11000 \text{ N/mm}^2 \\ E_{90,\text{mean}} &= 370 \text{ N/mm}^2 \\ G_{\text{mean}} &= 690 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es wird standardmäßig angenommen, dass die Faser in die x'-Richtung verläuft; die Werte bedeuten im Einzelnen:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0,\text{mean}} \\ E_y &= E_{90,\text{mean}} \\ G_{xy} &= G_{xz} = G_{\text{mean}} \\ G_{yz} &= \frac{G_{\text{mean}}}{10} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dabei ist G_{yz} der Schubmodul entsprechend der Rollschubspannung. Zur Ermittlung der Querdehnzahlen ist es manchmal günstig, die Näherungsformeln nach Huber zu verwenden (siehe [4]):

$$\begin{aligned} \nu_{xy} &\approx \left(\frac{\sqrt{E_x E_y}}{2G_{xy}} - 1 \right) \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \\ \nu_{yx} &\approx \left(\frac{\sqrt{E_x E_y}}{2G_{xy}} - 1 \right) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Für das genannte Nadelholz ergibt sich demnach

$$
\begin{aligned}
&E_x = 11000 \text{ MPa} \\
&E_y = 370 \text{ MPa} \\
&G_{xy} = G_{xz} = 690 \text{ MPa} \\
&G_{yz} = 69 \text{ MPa} \\
&\nu_{xy} \approx \left(\frac{\sqrt{11000 \cdot 370}}{2 \cdot 690} - 1 \right) \sqrt{\frac{11000}{370}} \doteq 2.52 \\
&\nu_{yx} \approx \left(\frac{\sqrt{11000 \cdot 370}}{2 \cdot 690} - 1 \right) \sqrt{\frac{370}{11000}} \doteq 0.08
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Im Folgenden soll ein Beispiel zur Veranschaulichung der Bedeutung der Querdehnzahl im Fall eines orthotropen Materials dargestellt werden.

Beispiel:

Es wird die ebene Spannung einer ebenen Platte mit den Abmessungen 1×1 m. angenommen. Für ein orthotropes homogenes Material nimmt das Hook'sche Gesetz folgende Form an

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}
\tag{2.7}
$$

Außerdem werden die Spannungsbedingungen ohne die Schubspannung $\tau_{xy} = 0$ berücksichtigt. Gleichung (2.7) impliziert dann $\gamma_{xy} = 0$ und kann vereinfacht werden zu

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix}
\tag{2.8}
$$

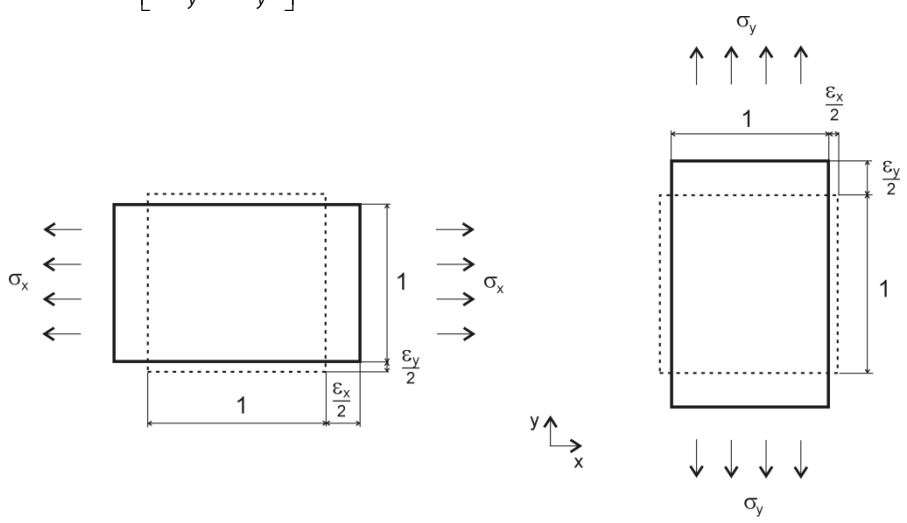


Bild 2.2: Ebene Spannung der Platte in *x*- und *y*-Richtung

Zunächst wird die Spannung in x-Richtung berücksichtigt, mit Spannung gemäß Gleichung $\sigma_x \neq 0,\ \sigma_y = 0$. Durch Substitution in Gleichung (2.8) erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x \end{aligned} \tag{2.9}$$

Durch Kombination der Gleichungen (2.9) und (2.1) ergibt sich das Verhältnis für die Querdehnzahl ν_{xy}

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \tag{2.10}$$

Bei Spannung in y-Richtung wird ähnlich verfahren, mit Spannung gemäß Gleichung $\sigma_x = 0,\ \sigma_y \neq 0$. Durch Substitution in Gleichung (2.8) erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Durch Kombination der Gleichungen (2.11) und (2.1) ergibt sich das Verhältnis für die Querdehnzahl ν_{yx}

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \tag{2.12}$$

Die Gleichungen (2.10) und (2.12) können folgendermaßen interpretiert werden: Die Querdehnzahl ν_{ij} entspricht dem negativen Kontraktionsverhältnis j an der Verlängerung in Richtung i.

Der Fall der kombinierten Spannungen lässt sich gemäß Gleichung (2.8) beschreiben, die in die folgende schematische Form konvertiert werden kann:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{yx} \\ -\nu_{xy} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma_x}{E_x} \\ \dfrac{\sigma_y}{E_y} \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

2.2.2 Isotrop

Die Steifigkeitseigenschaften eines isotropen Materials sind unabhängig von der Richtung. Deshalb erfolgt die Definition bei diesem Material wahlweise über das Elastizitätsmodul E, Schubmodul G, Querdehnzahl ν, spezifisches Gewicht γ und die Wärmedehnzahl α_T.

Schichten

Schicht Nr.	A Material-Bezeichnung	B Dicke t [m]	C Elastizitätsmodul E [kPa]	D Schubmodul G [kPa]	E Querdehnzahl ν [-]	F Spez. Gewicht γ [N/m³]	G Wärmedehnzahl αT [1/K]
1							
2							
3							

Bild 2.3: Isotropes Materialmodell

Beispiele für isotrope Materialien sind Glas oder Stahl. Zwischen E-Modul E, G-Modul G sowie der Querdehnzahl ν besteht folgender Zusammenhang:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.14}$$

Der Wert der Querdehnzahl liegt im Bereich $\langle -0.999, 0.5 \rangle$. Der Grenzwert $\nu = 0.5$ einem volumenmäßig inkompressiblen Material entspricht (in der Praxis z. B. Gummi).

2.2.3 Benutzerdefiniert

Mit diesem Materialmodell ist es möglich, die Elemente der Steifigkeitsmatrix der einzelnen Schichten (Membransteifigkeiten) direkt einzugeben. Für die Berechnung die Schubelemente der Gesamtsteifigkeitsmatrix müssen außerdem die Schubmoduln G_{xz} und G_{yz}. eingegeben werden. Das Material wird zudem über das spezifische Gewicht γ und die Wärmedehnzahl α_T charakterisiert.

Schichten

Schicht Nr.	A Material-Bezeichnung	B Dicke t [m]	C Orthotropie-richtung β [°]	D Teilsteifigkeitsmatrixelemente [kN/m²] d'11	E d'12	F d'22	G d'33	H Schubmodul [kPa] G, Gxz	I Gyz	J Spez. Gewicht γ [N/m³]	K Wärmedehnzahl αT [1/K]
1											
2											
3											

Bild 2.4: Benutzerdefiniertes Materialmodell

2.2.4 Hybrid

Bei einem hybriden Materialmodell können isotrope und orthotrope Schichten kombiniert werden.

Der wohl gebräuchlichste Aufbau hierzu ist wohl der Holzbetonverbundquerschnitt.

Schichten

Schicht Nr.	A Material-Bezeichnung	B Material-modell	C Dicke t [m]	D Orthotropie-richtung β [°]	E Elastizitätsmodul [kPa] E, Ex	F Ey	G Schubmodul [kPa] G, Gxz	H Gyz	I Gxy	J Querdehnzahl [-] ν, νxy	K νyx	L	M Teilsteifigkeitsmatrixelemente [kN/ d'11	d'12	N d'22
1		Orthotrop													
2		Orthotrop													
3		Isotrop													
4		Benutzerdefiniert													

Bild 2.5: Hybrides Materialmodell

2.3 Steifigkeitsmatrix

2.3.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrix unter Berücksichtigung des Schubverbundes

Ist der Schichtenaufbau in RF-LAMINATE definiert, wird die Steifigkeit nach der Gaußschen Integration für jede Schicht ermittelt. Die Anzahl der Integrationspunkte im Modul wurde auf drei festgelegt. Damit werden bei der Ermittlung der Beanspruchung ausreichend genaue Ergebnisse erzielt.

Aus den Elastizitätsmodulen und der Querdehnzahl des jeweiligen Materialmodells wird die Steifigkeitsmatrix der Schicht nach folgender Matrix erstellt. Danach kann die Steifigkeitsmatrix der Schicht in das planare Koordinatensystem x, y transformiert werden.

Die Berechnung der Gesamtsteifigkeit erfolgt mit den Elementen der Membransteifigkeit unter Berücksichtigung der Abstände der einzelnen Schichten zum Schubmittelpunkt.

Jede Schicht hat hierbei die Dicke t_i und eine minimale und maximale z-Koordinate $z_{i;\min}, z_{i;\max}$.

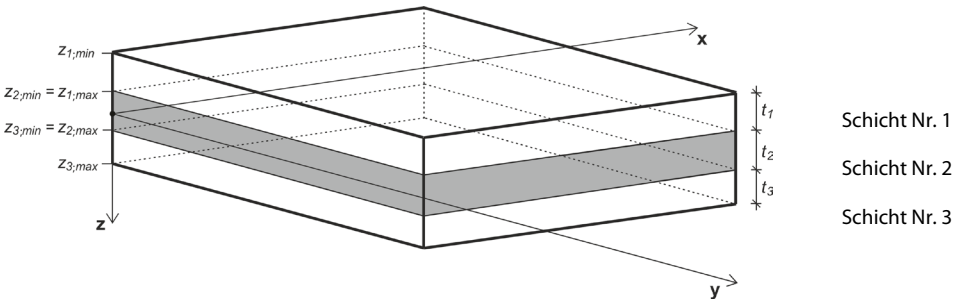


Bild 2.6: Schichtenaufbau

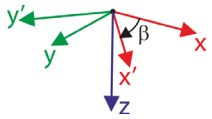
Die Steifigkeitsmatrix für jede Schicht $\mathbf{d}'_i$ definiert sich wie folgt:

$$\mathbf{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{i;11} & d'_{i;12} & 0 \\ & d'_{i;22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{i;33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{i;x}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & \dfrac{\nu_{i;xy} E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ & \dfrac{E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{i;xy} \end{bmatrix} \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.15}$$

Für isotrope Materialien mit $E_{i;x} = E_{i;y}$ nimmt die Steifigkeitsmatrix die vereinfachte Form an:

$$\mathbf{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{i;11} & d'_{i;12} & 0 \\ & d'_{i;22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{i;33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & \dfrac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ & \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ \text{sym.} & & G_i \end{bmatrix} \quad i = 1,\ldots,n \quad \text{mit } G_i = \frac{E_i}{2\cdot(1+\nu_i)} \tag{2.16}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH



Da Schichten aus orthotropen Materialien beliebig um den Winkel β gedreht werden können, ist es notwendig die Steifigkeitsmatrix der Einzelschichten auf ein einheitliches Koordinatensystem x, y zu transformieren. Hierfür bezieht sich RF-LAMINATE auf das lokale Koordinatensystem der jeweiligen Fläche.

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_{i;11} & d_{i;12} & d_{i;13} \\ & d_{i;22} & d_{i;23} \\ \text{sym.} & & d_{i;33} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{3\times3;i}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{d}_i' \mathbf{T}_{3\times3;i} \tag{2.17}$$

mit

$$\mathbf{T}_{3\times3;i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{ mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i) \tag{2.18}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}
d_{i;11} &= c^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + s^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;12} &= c^2 s^2 d'_{i;11} + s^4 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} - 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;13} &= c^3 s d'_{i;11} + c s^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;12} - c s^3 d'_{i;22} - 2c^3 s d'_{i;33} + 2c s^3 d'_{i;33} \\
d_{i;22} &= s^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;23} &= c s^3 d'_{i;11} + c^3 s d'_{i;12} - c s^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;22} + 2c^3 s d'_{i;33} - 2c s^3 d'_{i;33} \\
d_{i;33} &= c^2 s^2 d'_{i;11} - 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{i;33}
\end{aligned}$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\
 & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sym.} & D_{27} & D_{28} \\
 & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sym.} & \text{sym.} & D_{38} \\
 & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\
 & & & & & & D_{77} & D_{78} \\
 & & & & & & & D_{88}
\end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\
 & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sym.} & D_{27} & D_{28} \\
 & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sym.} & \text{sym.} & D_{38} \\
 & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\
 & & & & & & D_{77} & D_{78} \\
 & & & & & & & D_{88}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Biegen und Torsion
Schub
Membran
Exzentrizität

Wenn die einzelnen Lagen des Schichtaufbaus jeweils um β_i = 0° und 90° verdreht sind, vereinfacht sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix. Hierzu ist dann immer ein symmetrischer Gesamtaufbau der einzelnen Schichten notwendig. Ein Beispiel hierfür wäre der Aufbau Schicht 1 = 0° -Schicht 2 = 90° -Schicht 3 = 0°. Die Exzentrizitätsglieder (D_{16}, $D_{17\ usw.}$) der Matrix in 2.21 sind dann nicht mehr besetzt.

Aufgrund der Möglichkeiten des Moduls RF-LAMINATE auch exzentrische Kopplungsglieder zu berechnen ist die Berechnung einer 2D- Position mit diesem Modul nicht ausreichend. Die Matrix einer 2D Position berücksichtigt nur eine 5x5 Matrix. Daher sind 2D Positionen für RF-LAMINATE gesperrt.

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & & D_{27} & D_{28} \\ sym & & D_{33} & & & sym & & D_{38} \\ \hline & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & sym & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & sym & & D_{88} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.3.1.1 Steifigkeitsmatrixelemente (Biegung und Torsion) [Nm]

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;11} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;12} \qquad D_{13} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;13}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;22} \qquad D_{23} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;23}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;33}$$

Im Fall einer Einzelschichtplatte mit der Dicke t kann man die Gleichungen auf folgende zurückführen.

$$D_{ij} = \sum_{i=1}^{n=1} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;ij} = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3 - \left(-\frac{t}{2}\right)^3}{3} d_{1;ij} = \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3} d_{1;ij} = \frac{t^3}{12} d_{1;ij} \qquad i,j = 1,2,3$$

Daraus ergibt sich in der Folge der Biegeanteil der Elemente D11 – D33.

2.3.1.2 Steifigkeitsmatrixelemente (Exzentrizitätseinwirkung) [Nm/m]

$$D_{16} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;11} \qquad D_{17} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;12} \qquad D_{18} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;13}$$

$$D_{27} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;22} \qquad D_{28} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;23}$$

$$D_{38} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;33}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

2.3.1.3 Steifigkeitsmatrixelemente (Membran) [N/m]

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;11} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;12} \qquad D_{68} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;13}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;22} \qquad D_{78} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;23}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;33}$$

2.3.1.4 Steifigkeitsmatrixelemente (Schub) [N/m]

Auf das ausführliche Berechnungsverfahren für die Schubelemente der Steifigkeitsmatrix soll hier nicht näher eingegangen werden. Es sei lediglich folgender Zusammenhang angeführt:

$$\max_i\left(\frac{5}{6}G_{i;11}t_i\right) \le D_{44} \le \frac{5}{6}\max_i\left(G_{i;11}\right)\sum_{i=1}^{n} t_i \tag{2.22}$$

$$\max_i\left(\frac{5}{6}G_{i;22}t_i\right) \le D_{55} \le \frac{5}{6}\max_i\left(G_{i;22}\right)\sum_{i=1}^{n} t_i \tag{2.23}$$

mit

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{i;11} & G_{i;12} \\ \text{sym.} & G_{i;22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{2\times2;i}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_i'\mathbf{T}_{2\times2;i} \tag{2.24}$$

mit

$$\mathbf{G}_i' = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \text{und } \mathbf{T}_{2\times2;i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & \sin(\beta_i) \\ -\sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu:

$$G_{i;11} = c^2 G_{i;xz} + s^2 G_{i;yz}$$

$$G_{i;12} = csG_{i;xz} - csG_{i;yz}$$

$$G_{i;22} = s^2 G_{i;xz} + c^2 G_{i;yz}, \text{ mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i)$$

2.3.2 Keine Berücksichtigung des Schubverbunds

Es wird nun eine Platte aus n isotropen Materialien ohne Schubverbund zwischen den einzelnen Schichten betrachtet. Jede Schicht hat eine Dicke t_i und eine minimale und maximale z-Koordinate $z_{i;\min}, z_{i;\max}$.

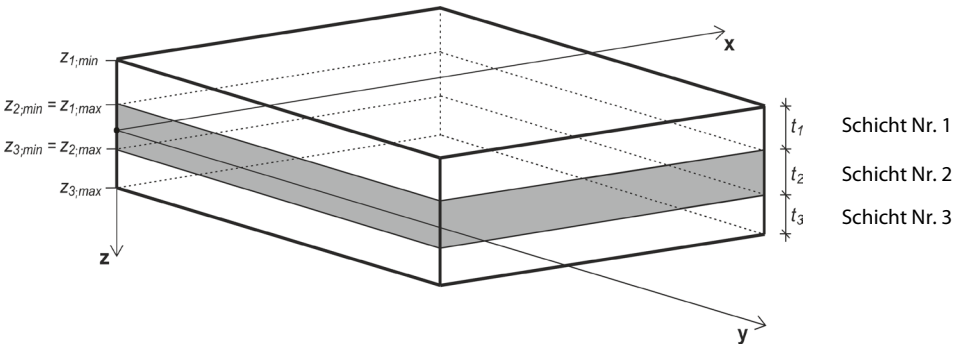


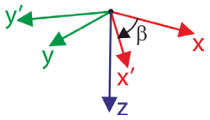
Bild 2.7: Schichtenaufbau

Die Steifigkeitsmatrix für jede Schicht $\mathbf{d}'_i$ ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{i;11} & d'_{i;12} & 0 \\ & d'_{i;22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{i;33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{i;x}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & \dfrac{\nu_{i;xy} E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ & \dfrac{E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{i;xy} \end{bmatrix} \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.26}$$

Für ein isotropes Material mit $E_{i;x} = E_{i;y}$ nimmt die Steifigkeitsmatrix die vereinfachte Form an:

$$\mathbf{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{i;11} & d'_{i;12} & 0 \\ & d'_{i;22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{i;33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & \dfrac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ & \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ \text{sym.} & & G_i \end{bmatrix}, \quad G_i = \frac{E_i}{2\cdot(1+\nu_i)}, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.27}$$



Da die Schichten mit orthotropen Materialien nicht beliebig um den Winkel β gedreht werden können, ist es notwendig die Steifigkeitsmatrizen auf ein einheitliches Koordinatensystem x, y zu transformieren (lokales Koordinatensystem einer Fläche).

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_{i;11} & d_{i;12} & d_{i;13} \\ & d_{i;22} & d_{i;23} \\ \text{sym.} & & d_{i;33} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{3\times3;i}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{d}'_i \mathbf{T}_{3\times3;i} \tag{2.28}$$

mit

$$\mathbf{T}_{3\times3;i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}, \text{mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i) \tag{2.29}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}
d_{i;11} &= c^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + s^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;12} &= c^2 s^2 d'_{i;11} + s^4 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} - 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;13} &= c^3 s d'_{i;11} + cs^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;12} - cs^3 d'_{i;22} - 2c^3 s d'_{i;33} + 2cs^3 d'_{i;33} \\
d_{i;22} &= s^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33} \\
d_{i;23} &= cs^3 d'_{i;11} + c^3 s d'_{i;12} - cs^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;22} + 2c^3 s d'_{i;33} - 2cs^3 d'_{i;33} \\
d_{i;33} &= c^2 s^2 d'_{i;11} - 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{i;33}
\end{aligned}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

Biegung und Torsion
Schub
Membran

Wenn die Winkel β_i Vielfache von 90° sind, lässt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix wie folgt vereinfachen:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

2.3.2.1 Steifigkeitsmatrixelemente (Biegung und Torsion) [Nm]

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;11} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;12}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;22}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;33}$$

2.3.2.2 Steifigkeitsmatrixelemente (Membran) [N/m]

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;11} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;12}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;22}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;33}$$

2.3.2.3 Steifigkeitsmatrixelemente (Schub) [N/m]

$$D_{44} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{6} G_{i;11}\, t_i \qquad D_{45} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{6} G_{i;12}\, t_i$$

$$D_{55} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{6} G_{i;22}\, t_i$$

mit

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{i;11} & G_{i;12} \\ \text{sym.} & G_{i;22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{2\times2;i}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{G}_i' \mathbf{T}_{2\times2;i} \tag{2.33}$$

mit

$$\mathbf{G}_i' = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{T}_{2\times2;i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & \sin(\beta_i) \\ -\sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu

$$G_{i;11} = c^2 G_{i;xz} + s^2 G_{i;yz}$$

$$G_{i;12} = csG_{i;xz} - csG_{i;yz}$$

$$G_{i;22} = s^2 G_{i;xz} + c^2 G_{i;yz}\text{, mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i)$$

Da in Laminate mehrere Schichten mit unterschiedlichen Steifigkeiten definiert werden können, kann es zu sehr unterschiedlichen Steifigkeiten in einem Querschnittsaufbau kommen.

Ein sehr extremes Beispiel hierfür wäre z.B. ein Sandwichelement mit einem Schaumstoffkern von 20cm Dicke und einer beidseitigen Blechbeplankung von 1mm. Dieser Aufbau unterliegt bei einer Plattenbeanspruchung einer sehr großen Schubverfomung.

Bild 2.8: Sandwichelement

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Aber auch bei mehrlagigen Schichtenaufbauten eines Brettsperrholzes hat die Schubverformung einen entscheidenden Einfluss auf die Berechnung. Bei einem dreilagigen Aufbau ist die Berechnung der Steifigkeiten in Nebentragrichtung D55 relativ einfach. Hier erfolgt die Berechnung mit der Mittellage der Steifigkeit gemäß obenstehender Gleichung.

Da die oberen und unteren Lagen eines dreilagigen Brettsperrholzes keinen Beitrag zur Schubsteifigkeit leisten können, kann dies unter den Details entsprechend berücksichtigt werden. Für die Herstelleraufbauten wird dieser Effekt immer berücksichtigt. Weiteres hierzu finden Sie auch im Kapitel 3.2 *Materialkennwerte*.

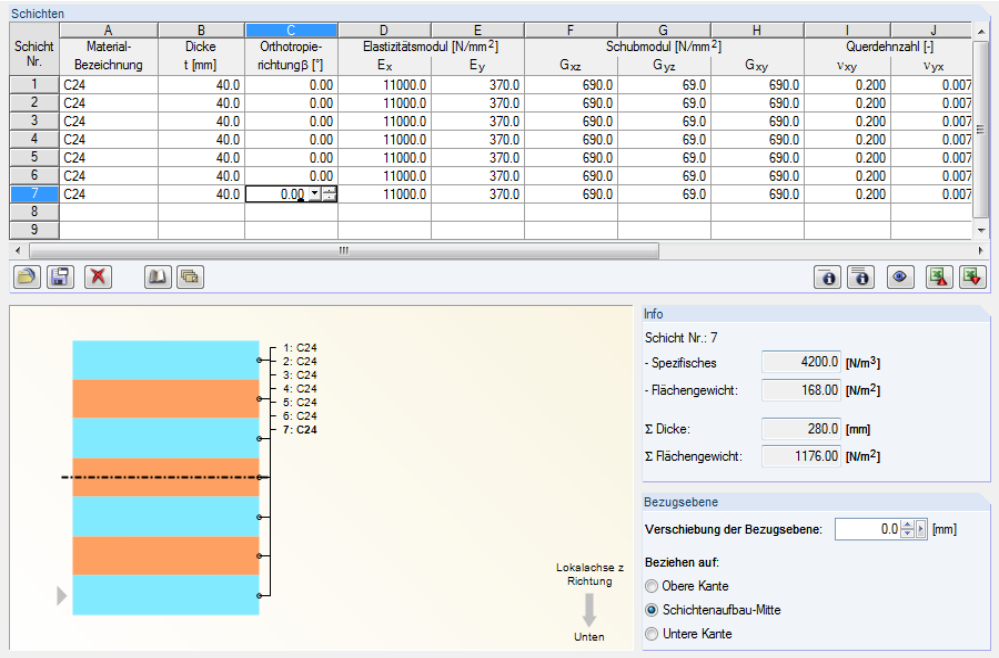


Bild 2.9: Aufbau einer siebenlagigen Brettsperrholzplatte

Für eine 5-, 7- oder beliebig mehrlagige Platte ist die Berechnung der Schubsteifigkeit komplexer, da durch die Verleimung der Kreuzungspunkte einer Brettsperrholzplatte auch die Brettlagen mit einer sehr geringen Steifigkeit in der jeweils anderen Richtung dennoch die Schubsteifigkeit beeinflussen.

Bild 2.10: Kreuzungspunkte einer Brettsperrholzplatte

Um diese Punkte möglichst real zu erfassen, muss die Berechnung der lokalen Steifigkeitsmatrix der Fläche auf ein bestimmtes Verhältnis begrenzt werden.

Diese Begrenzung kann man sich mit dem Verhältnis der Verformungen herleiten.

Verformung Aufbau gekoppelt:

$$w_{\mathrm{b}} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{b\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}.$$

Verformung Lagen nicht gekoppelt (schubloser Verbund):

$$w_{\mathrm{l}} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{b\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{h_i^3}{12}}, \quad h_i = z_{i,\max} - z_{i,\min}.$$

Die Schubverformung in der jeweiligen Richtung der Platte kann mit folgender Gleichung bestimmt werden.

$$w_{\mathrm{s}} = \frac{pl^2}{8bD_{44}},$$

Bei der Berechnung in RF-LAMINATE wird folglich immer vorausgesetzt, dass die Schubverformung

$w_{\mathrm{s}} \le w_{\mathrm{l}} - w_{\mathrm{b}}$, ist.

Daraus lässt sich folgende Formel ableiten.

$$\frac{pl^2}{8D_{44}} \le \frac{5pl^4}{384} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}} \right) \Rightarrow D_{44,\min} := \frac{48}{5l^2} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}} \le D_{44}.$$

Als Länge L wird der mittlere Wert der Linienlänge in der jeweiligen Flächenebene verwendet.

Die obere Grenze der Schubsteifigkeit wird folgendermaßen definiert.

$$D_{44} = \max\left(D_{44}, \frac{48}{5l^2} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i} \frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}} \right), \; D_{55} = \max\left(D_{55}, \frac{48}{5l^2} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{y,i} \frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{y,i} \frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}} \right).$$

Für orthotrope Schichten muss dazu noch der Winkel ß berücksichtigt werden. Hiermit kann man die Steifigkeiten in der jeweiligen Lage drehen.

$$\boldsymbol{d}_i' \underset{\nu_{xy,i}=0}{\sim} \begin{bmatrix} E_{x,i}' & & \\ & E_{y,i}' & \\ & & G_{xy,i}' \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_i' \boldsymbol{T}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} E_{x,i} &= d_{11,i} = \mathrm{c}_i^4 E_{x,i}' + s_i^4 E_{y,i}' + 4c_i^2 s_i^2 G_{xy,i}' \\ E_{y,i} &= d_{22,i} = s_i^4 E_{x,i}' + c_i^4 E_{y,i}' + 4c_i^2 s_i^2 G_{xy,i}' \end{aligned},$$

Mit: $c_i = \cos\beta_i$, $s_i = \sin\beta_i$, $i = 1,\ldots,n$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

3. Eingabedaten

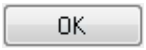
Nach dem Aufruf von RF-LAMINATE erscheint ein neues Fenster. Links wird ein Navigator angezeigt, der die verfügbaren Masken verwaltet.

Eine Maske lässt sich durch Anklicken des Eintrags im Navigator aufrufen. Mit den links dargestellten Schaltflächen wird die vorherige bzw. nächste Maske eingestellt. Das Blättern durch die Masken ist auch mit den Funktionstasten [F2] (vorwärts) und [F3] (rückwärts) möglich.

Nach der Eingabe aller Daten kann die [Berechnung] gestartet werden.

Über die Schaltfläche [Details] öffnet sich der gleichnamige Dialog, in dem die Grenzverformung, die Berechnungsmethode und andere Berechnungsparameter eingestellt werden (siehe Kapitel 4.1, Seite 41).

Über die Schaltfläche [Grafik] gelangt man in das RFEM-Arbeitsfenster.



Mit [OK] werden die Eingabedaten gesichert und das Modul RF-LAMINATE verlassen. Die Schaltfläche [Abbrechen] beendet das Zusatzmodul, ohne die Daten zu speichern.

3.1 Basisangaben

In Maske 1.1 *Basisangaben* sind die Flächen und Einwirkungen für den Nachweis auszuwählen. Die beiden Register verwalten die Lastfälle, Lastkombinationen und Ergebniskombinationen für die Tragfähigkeit und die Gebrauchstauglichkeit.

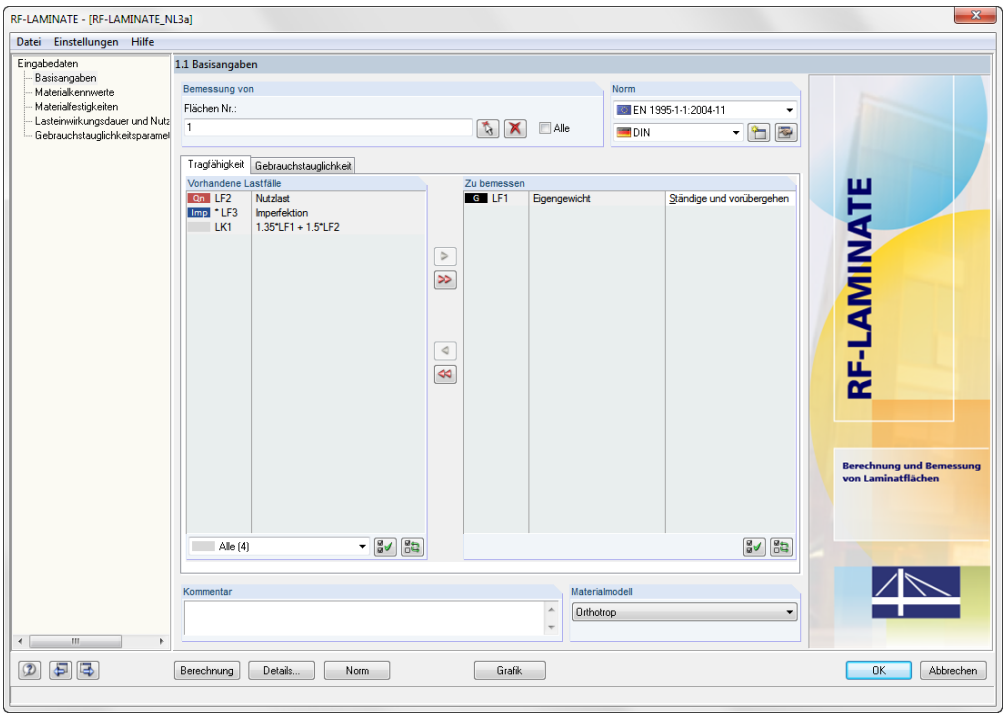


Bild 3.1: Maske 1.1 *Basisangaben* , Register *Tragfähigkeit*

Bemessung von

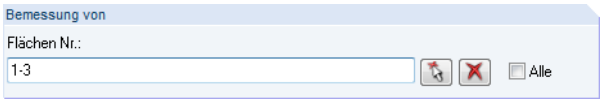


Bild 3.2: Bemessung von Flächen

Der Abschnitt verwaltet die nachzuweisenden Flächen. Falls nur bestimmte Flächen untersucht werden sollen, ist das Kontrollfeld *Alle* zu deaktivieren: Damit wird das Eingabefeld zugänglich, indem die Nummern der relevanten Flächen eingetragen werden können. Über die Schaltfläche [Selektieren] lassen sich die Flächen grafisch im RFEM-Arbeitsfenster auswählen. Die Liste der voreingestellten Nummern kann per Doppelklick selektiert und dann durch manuelle Eingaben überschrieben werden. Über die Schaltfläche [↖] lassen sich die Flächen grafisch im RFEM-Arbeitsfenster auswählen. Die Liste der bereits angegebenen Flächennummern kann mit der Schaltfläche [X] wieder gelöscht werden.

Norm (NA)

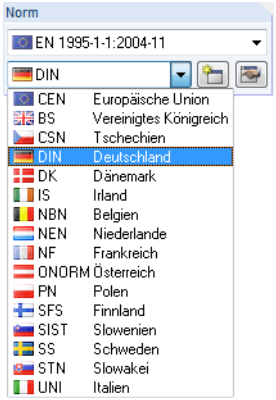


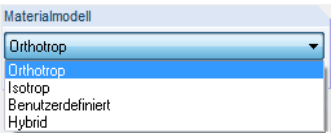
Bild 3.3: Bemessung von Flächen

Über die nationalen Anwendungsdokumente der europäischen Länder wird automatisch der Teilsicherheitsbeiwert und der Modifikationsbeiwert für das gewählt Material festgelegt. Desweiteren werden auch für den Nachweis der Durchbiegung die Verformungsgrenzen des jeweiligen Anhangs eingestellt.

Kommentar

Dieses Eingabefeld steht für eine benutzerdefinierte Anmerkung zur Verfügung, die z. B. den aktuellen RF-LAMINATE-Fall beschreibt.

Materialmodell



In diesem Abschnitt ist das Materialmodell auszuwählen. Folgenden Materialmodelle stehen zur Verfügung:

- *Orthotrop*
- *Isotrop*
- *Benutzerdefiniert*
- *Hybrid*

Die Materialmodelle sind im Kapitel 2.2 ab Seite 10 ausführlich beschrieben.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

3.1.1 Tragfähigkeit

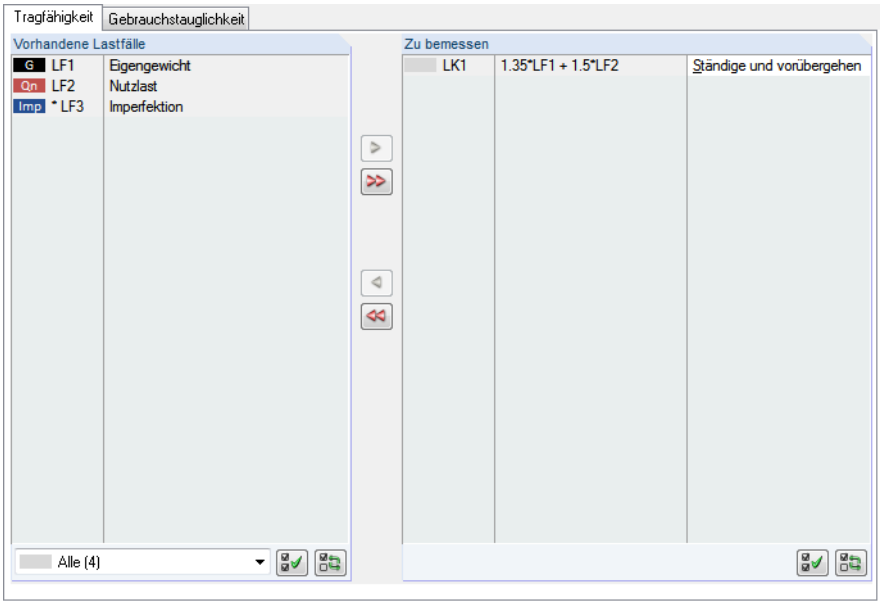
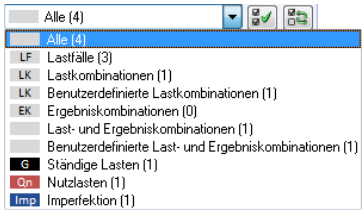


Bild 3.4: Maske 1.1 *Basisangaben* , Register *Tragfähigkeit*

Vorhandene Lastfälle

In dieser Spalte sind alle Lastfälle, Last- und Ergebniskombinationen aufgelistet, die in RFEM angelegt wurden.. Mit der Schaltfläche [▶] lassen sich selektierte Lastfälle, Last- und Ergebniskombinationen in die Liste *Zu Bemessen* nach rechts übertragen. Die Übergabe kann auch per Doppelklick erfolgen. Die Schaltfläche [▶▶] übergibt die komplette Liste nach rechts.

Die Mehrfachauswahl von Lastfällen ist – wie in Windows üblich – mit gedrückter [Strg]-Taste möglich. So lassen sich mehrere Lastfälle gleichzeitig in die rechte Liste übertragen.



Am Ende der Liste sind mehrere Filteroptionen verfügbar. Sie erleichtern es, die Einträge nach Lastfällen, Kombinationen oder Einwirkungskategorien geordnet zuzuweisen. Die Schaltflächen sind mit folgenden Funktionen belegt.

	Alle Lastfälle in der Liste werden selektiert.
	Die Auswahl der Lastfälle wird umgekehrt.

Tabelle 3.1: Schaltflächen im Register *Tragfähigkeit*

Falls ein Lastfall oder eine Lastkombination mit einem Sternchen (*) gekennzeichnet ist wie z. B. LF3 in Bild 3.4, so kann er nicht bemessen werden: Hier handelt es sich um einen Lastfall ohne Lastdaten oder um einen Imperfektionslastfall. Bei der Übergabe erscheint eine entsprechende Warnung.

Zu bemessen

In der rechten Spalte werden die zur Bemessung gewählten Lastfälle, Last- und Ergebniskombinationen aufgelistet. Mit [◀] oder per Doppelklick lassen sich selektierte Einträge wieder aus der Liste entfernen. Die Schaltfläche [◀◀] leert die ganze Liste.

Die Lastfälle, Last- und Ergebniskombinationen können folgenden Bemessungssituationen zugewiesen werden:

- *Ständig und vorübergehend*
- *Außergewöhnlich*

Diese Einteilung steuert die Teilsicherheitsbeiwerte für die Materialeigenschaften. Die Beiwerte lassen sich über die Schaltfläche [Norm] im Register *Materialbeiwerte* einsehen.

Die Bemessungssituation kann über die Liste geändert werden, die mit der Schaltfläche [▼] am Ende des Eingabefeldes zugänglich ist.

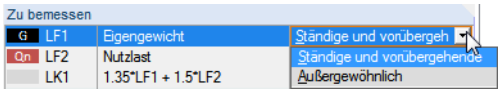


Bild 3.5 Bemessungssituation zuweisen

Auch hier ist eine Mehrfachauswahl mit gedrückter [Strg]-Taste möglich, sodass mehrere Einträge gleichzeitig geändert werden können.

3.1.2 Gebrauchstauglichkeit

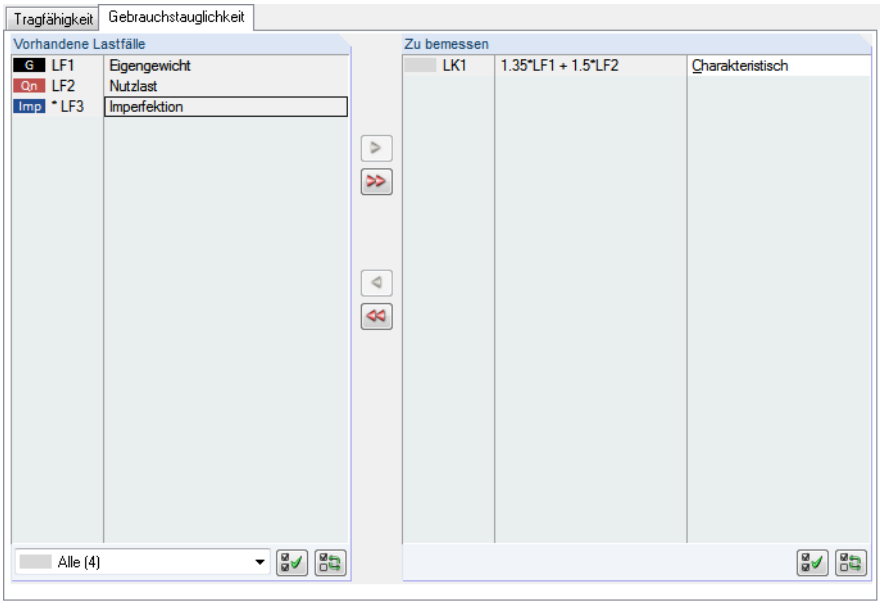


Bild 3.6: Maske 1.1 *Basisangaben*, Register *Gebrauchstauglichkeit*

Vorhandene Lastfälle

In diesem Abschnitt sind alle Lastfälle sowie Last- und Ergebniskombinationen aufgelistet, die in RFEM angelegt wurden. Nach der Übergabe von Einträgen in den rechten Dialogabschnitt *Zu bemessen* erscheint im Navigator die zusätzliche Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter*.

Zu bemessen

Lastfälle, Last- und Ergebniskombinationen lassen sich hier analog zum bereits beschriebenen Register übergeben oder wieder entfernen (siehe Kapitel 3.1.1, Seite 27).

Im Abschnitt *Zu bemessen* ist den einzelnen Lastfällen, Last- und Ergebniskombinationen eine Einwirkungskombination zuzuweisen:

- *Charakteristisch*
- *Häufig*
- *Quasi-ständig*

Auf Grundlage dieser Auswahl gelten verschiedene Grenzwerte für die Durchbiegung. Die Grenzwerte können im Dialog *Norm*, Register *Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerte* angepasst werden. Der Dialog öffnet sich über die gleichnamige Schaltfläche.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

3.2 Materialkennwerte

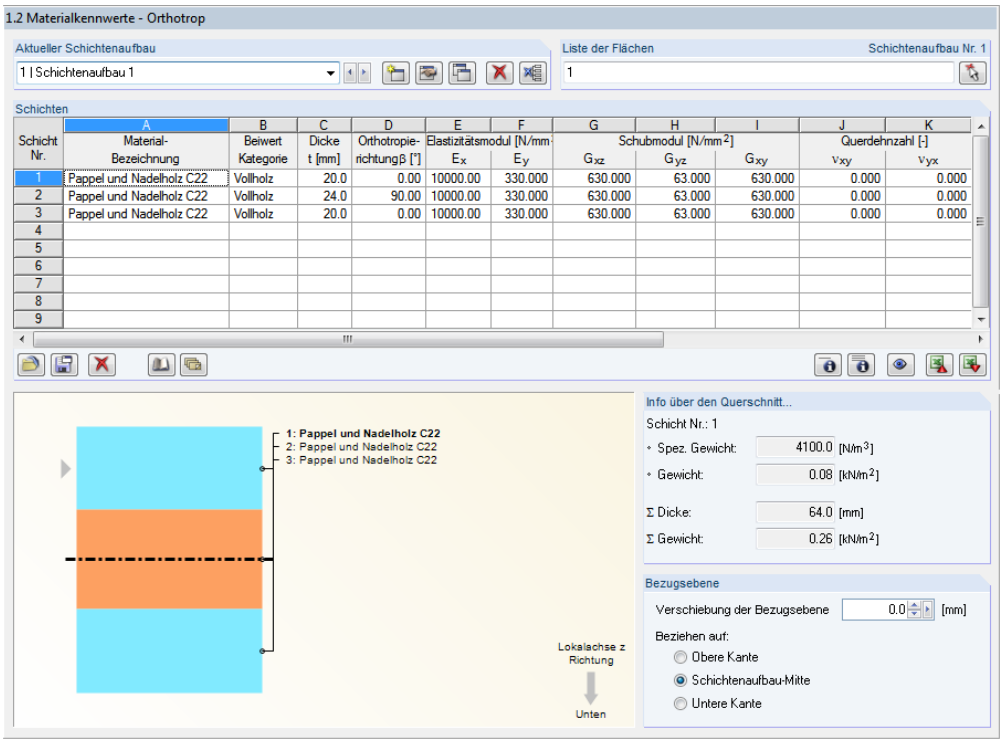


Bild 3.7: Maske 1.2 *Materialkennwerte*

Aktueller Schichtenaufbau

In dieser Maske sind der Schichtenaufbau und die Materialkennwerte der einzelnen Schichten zu definieren. Der ausgewählte Schichtenaufbau wird im Abschnitt *Aktueller Schichtenaufbau* angezeigt. Es können mehrere Schichtenaufbauten mit jeweils unterschiedlichen Schichten angelegt werden.

Liste der Flächen

Für jeden Schichtenaufbau sind hier die relevanten Flächen zu definieren.

Die Schaltflächen in diesem Abschnitt sind mit folgenden Funktionen belegt:

Schaltfläche	Bezeichnung
	Neuen Schichtenaufbau erzeugen
	Details für Schichtenaufbau bearbeiten
	Aktuellen Schichtenaufbau kopieren
	Aktuellen Schichtenaufbau löschen
	Alle Schichtenaufbauten löschen
	Flächen wählen

Tabelle 3.1: Schaltflächen in der Maske *Materialkennwerte*

Details für Schichtenaufbau

Für jeden Schichtenaufbau ist der Dialog *Details für Schichtenaufbau* verfügbar. Dieser ist über die Schaltfläche [Details für Schichtenaufbau bearbeiten] zugängig. Im Folgenden sind die einzelnen Abschnitte des Dialogs *Details für Schichtenaufbau* beschrieben.

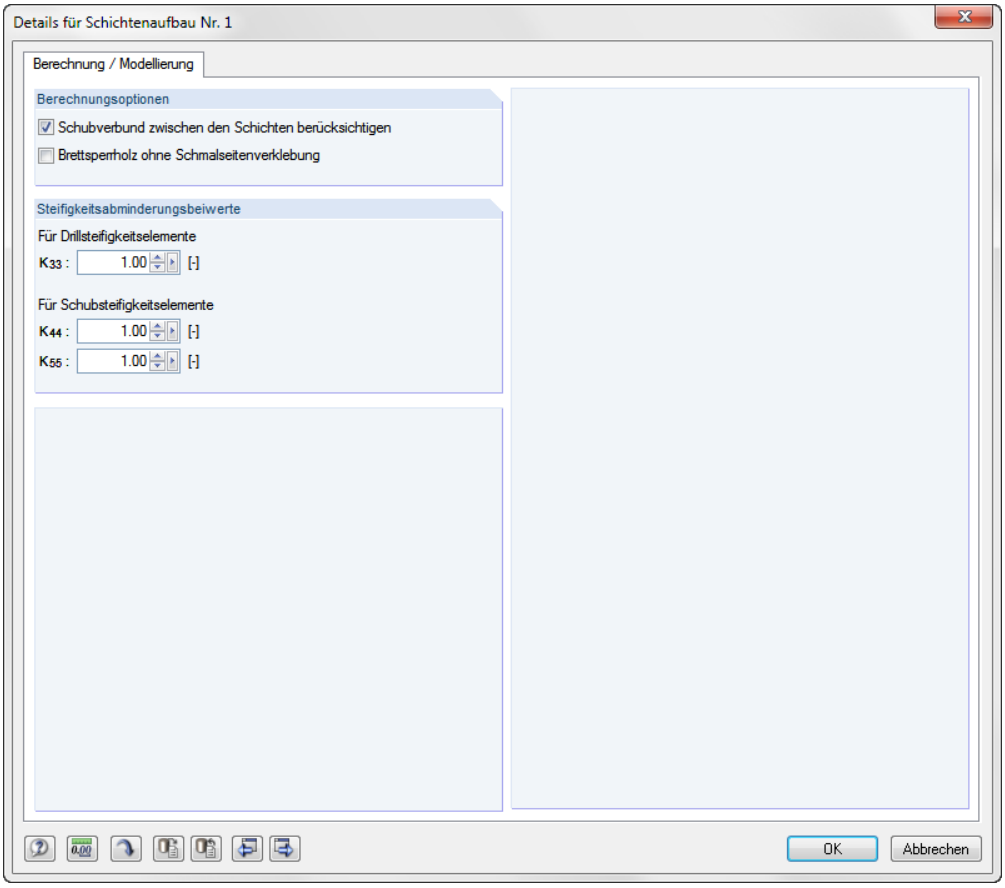


Bild 3.8: Dialog *Details für Schichtenaufbau*

Berechnungsoptionen

Im Abschnitt *Berechnungsoptionen* ist das Kontrollfeld *Schubverbund zwischen den Schichten berücksichtigen* standardmäßig angehakt. Nähere Informationen zu den Berechnungsoptionen finden Sie in Kapitel 2.3.1 und 2.3.2.

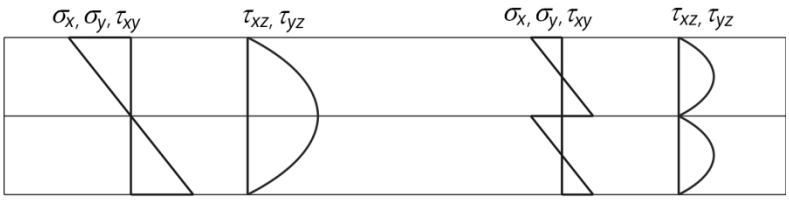


Bild 3.9: Grundspannungen einer biegebeanspruchten Zweischichtplatte: mit Schubverbund zwischen Schichten (links), ohne Schubverbund zwischen Schichten (rechts)

Als zweite Option ist das Kontrollfeld *Brettsperrholz ohne Schmalseitenverklebung* verfügbar. Diese Option eignet sich insbesondere für dreilagige Platten aus Brettsperrholz. Der E-Modul in der Nebentragrichtung wird hierbei zu null gesetzt $E_y = 0$.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Steifigkeitsabminderungsbeiwerte

Im Abschnitt *Steifigkeitsabminderungsbeiwerte* können die Drillsteifigkeitselemente D_{33} mit dem Beiwerts K_{33}. reduziert werden. Die Korrektur ist nur für Platten mit symmetrischem Schichtenaufbau möglich, bei dem die Rotationswinkel Vielfache von 90° darstellen. Die Korrektur wird empfohlen von der Norm DIN 1052:2008, Kapitel D.2.2 (5) Seite 175) oder ČSN 73 1702:2007, Kapitel D.2.2 (5), Seite 127.

Außerdem können die Schubsteifigkeitselemente D_{44} und D_{55} mittels der Abminderungsbeiwerte K_{44} und K_{55}. reduziert werden. Die Abminderung ist nur für Platten möglich, bei denen die Rotationswinkel Vielfache von 90° sind.

Die Steifigkeitsmatrix entspricht dann (hier für einen symmetrischen Schichtenaufbau):

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{33}D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{44}D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & K_{55}D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

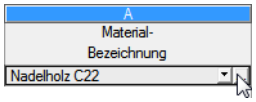
In Maske 1.2 *Materialkennwerte* lässt sich die modifizierte Steifigkeitsmatrix über die Schaltfläche [Erweiterte Steifigkeitsmatrix] anzeigen.

Schichten

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Schicht Nr.	Material-Bezeichnung	Beiwert Kategorie	Dicke t [mm]	Orthotropie-richtung β [°]	Elastizitätsmodul [N/mm²] E_x	E_y	Schubmodul [N/mm²] G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}	Querdehnzahl [-] ν_{xy}	ν_{yx}	Spez. Gewicht γ [N/m³]	Wärmedehnzahl α_T [1/K]	Kommentar
1	Nadelholz C...	Vollholz	20.0	0.00	10000.00	330.00	630.00	63.00	630.00	0.000	0.000	5000.0	5.0E-06	
2	Nadelholz C22	Vollholz	24.0	90.00	10000.00	330.00	630.00	63.00	630.00	0.000	0.000	5000.0	5.0E-06	
3	Nadelholz C22	Vollholz	20.0	0.00	10000.00	330.00	630.00	63.00	630.00	0.000	0.000	5000.0	5.0E-06	
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														

Bild 3.10: Maske 1.2 *Materialkennwerte*

Schichten



Hier sind die *Schichten* für den aktuellen Schichtenaufbau zu definieren. Die Materialien können direkt aus der Bibliothek ausgewählt werden, in der eine Vielzahl von Materialien hinterlegt ist. Die Materialbibliothek ist über die links dargestellte Schaltfläche zugänglich. Sie können auch den Cursor in das relevante Feld der Spalte A *Materialbezeichnung* setzen und dann auf die erscheinende Schaltfläche [...] klicken oder die Funktionstaste [F7] drücken.

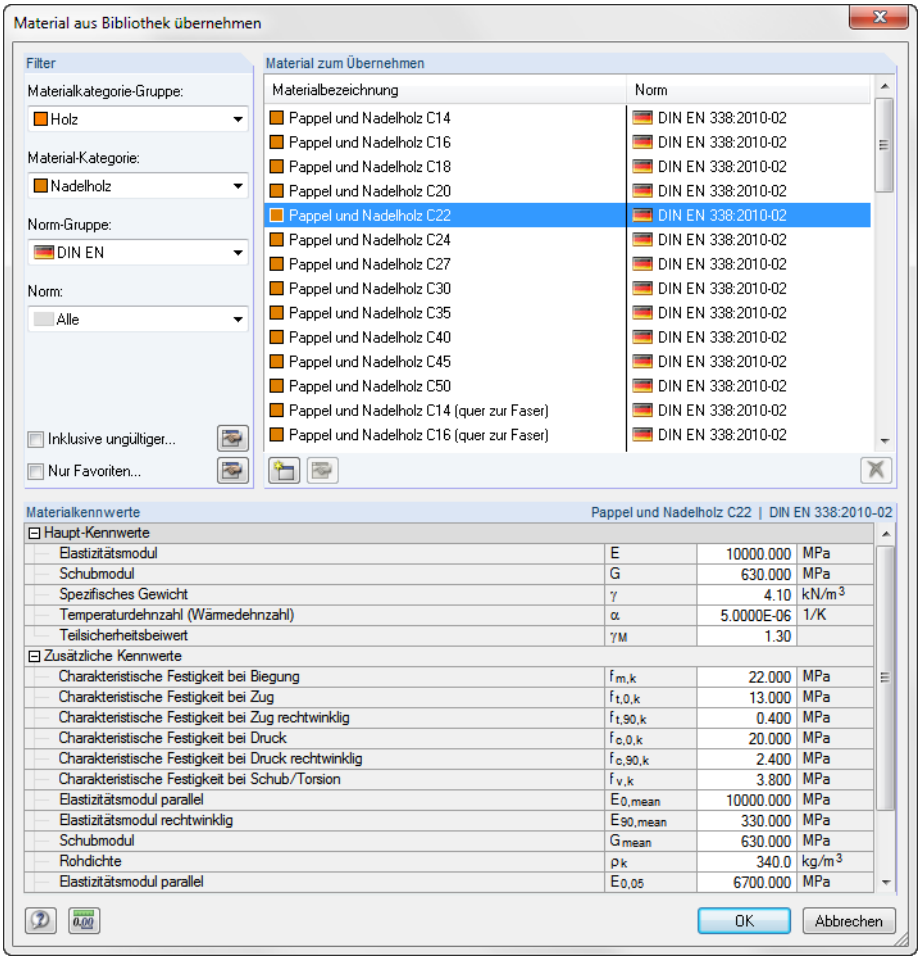
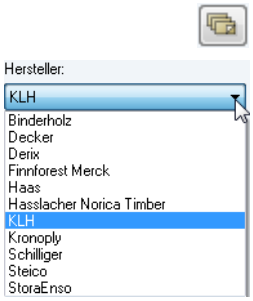


Bild 3.11: Materialbibliothek

Da die Materialbibliothek sehr umfangreich ist, stehen im Abschnitt *Filter* diverse Selektionsmöglichkeiten zur Verfügung. Sie können die Liste der Materialien nach den Kriterien *Materialkategorie-Gruppe*, *Material-Kategorie*, *Norm-Gruppe*, *Norm* und ggf. *Spezielle Anwendung* filtern. In der Liste *Material zum Übernehmen* können Sie ein Material auswählen und dessen Parameter im unteren Teil des Dialogs kontrollieren. Mit [OK], [↵] oder einem Doppelklick auf das Material wird das gewählte Material in die Maske 1.2 *Materialkennwerte* von RF-LAMINATE übergeben. Danach können alle Materialparameter direkt im Modul angepasst werden.

Schichtenaufbauten von Herstellern



Des Weiteren steht eine Herstellerbibliothek zur Verfügung, über die ein ganzer Schichtenaufbau importiert werden kann. Diese Datenbank ist über die Schaltfläche [Schichten aus Bibliothek übernehmen] zugängig.

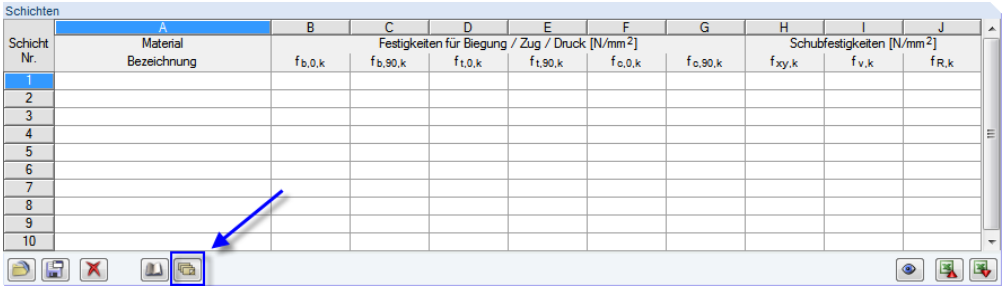


Bild 3.12: Schaltfläche [Herstellerbibliothek für Schichtenaufbauten

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

In diesem Dialog können der *Hersteller*, der *Typ* und die *Dicke* ausgewählt werden.

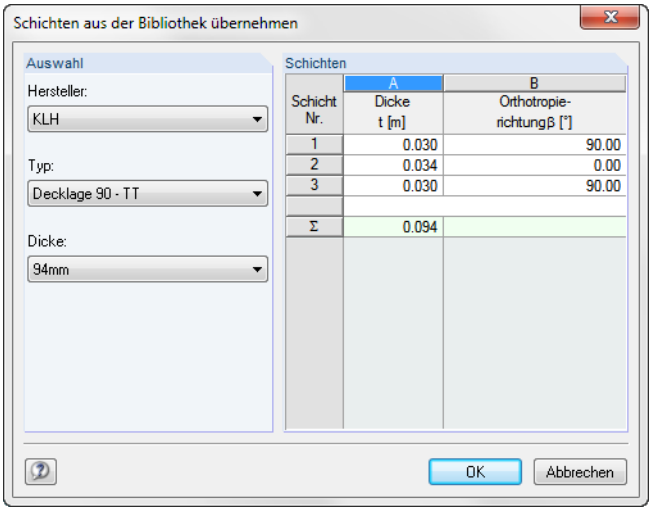


Bild 3.13: Dialog *Schichten aus der Bibliothek übernehmen*

Die Parameter des importierten Herstelleraufbaus können anschließend im Dialogabschnitt *Schichten* manuell angepasst werden.

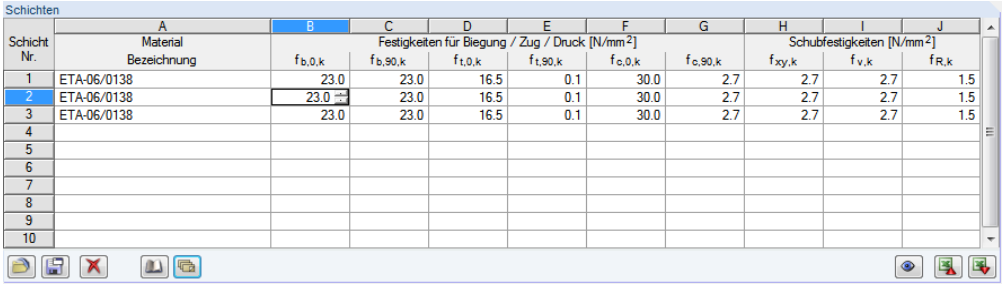


Bild 3.14: Dialog *Schichten aus der Bibliothek übernehmen*

Wurde ein orthotropes Materialmodell in Maske 1.1 *Basisangaben* ausgewählt, so wird bei der Eingabe der einzelnen Schichten in Maske 1.2 *Materialkennwerte* die Orthotropierichtung β in der RFEM-Grafik *Materialkennwerte* angezeigt (siehe folgendes Bild). Dadurch lassen sich die Einstellungen auch grafisch überprüfen.

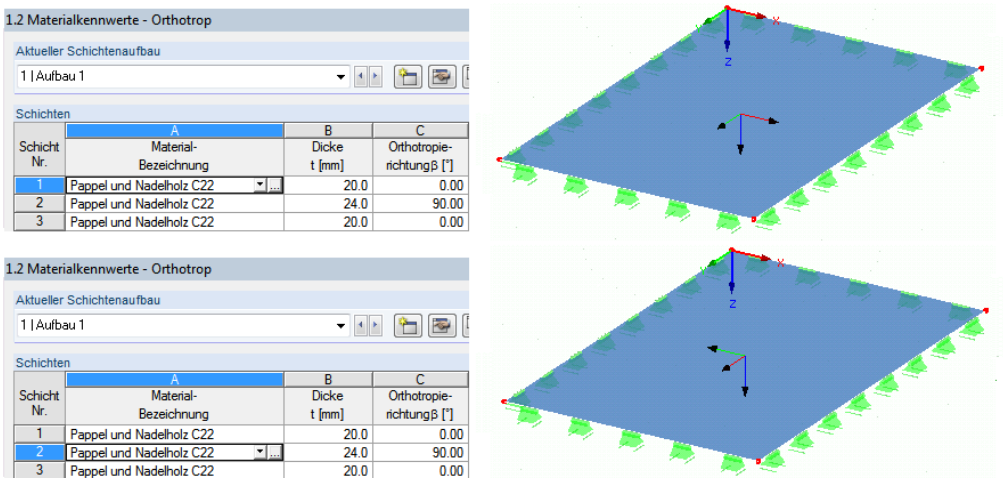


Bild 3.15: Anzeige der Orthotropierichtung β

Im Abschnitt *Schichten* sind unter den Tabellen Schaltflächen verfügbar, die mit folgenden Funktionen belegt sind:

Schaltfläche	Bezeichnung	Funktion
	Gespeicherte Schichten einlesen	Liest den zuvor gespeicherten Schichtenaufbau wieder ein.
	Schichten speichern unter	Speichert den aktuellen Schichtenaufbau als Vorlage für andere Modelle. Dieser kann dann über die vorhergehende Schaltfläche eingelesen werden.
	Alle Schichten löschen	Löscht alle Daten in Maske 1.2.
	Material aus Bibliothek übernehmen	Öffnet Dialog *Material aus Bibliothek übernehmen*
	Material aus Bibliothek übernehmen	Öffnet Dialog *Aufbauten von Hersteller übernehmen*
	Steifigkeitsmatrixelemente der Schicht anzeigen	Zeigt die in Kapitel 2.3 erklärten Elemente der Steifigkeitsmatrix an
	Erweiterte Steifigkeitsmatrix anzeigen	Zeigt die in Kapitel 2.3 erklärten Elemente der Gesamtsteifigkeitsmatrix an
	In den Sichtmodus wechseln	Wechselt in die RFEM-Oberfläche für eine grafische Überprüfung, ohne RF-LAMINATE zu beenden.
	An MS Excel oder OpenOffice.org Calc übergeben	Exportiert den Inhalt der Maske nach MS Excel oder OpenOffice.org Calc → (Kapitel 7.2, S. 69)
	Aus MS Excel oder OpenOffice.org Calc übernehmen	Importiert den Inhalt einer MS Excel- oder OpenOffice.org Calc-Tabelle

Tabelle 3.2: Schaltflächen in der Maske *Materialkennwerte*

Info über den Querschnitt

Im Abschnitt *Info über den Querschnitt* rechts unten werden Informationen zu Gewicht und spezifischem Gewicht der ausgewählten Schicht sowie zu Gesamtgewicht und -dicke des ausgewählten Schichtenaufbaus angezeigt.

Bezugsebene

Über die Verschiebung der Bezugsebene, kann eine exzentrische Lagerung der Platte berücksichtigt werden. Diese Einstellung ist immer dann relevant, wenn ein nicht symmetrischer Aufbau generiert wird. Mithilfe dieser Einstellung, kann das Programm die Verschiebung des Massenschwerpunkts sowie eine Auflagerung unterhalb des Plattenaufbaus berücksichtigen.

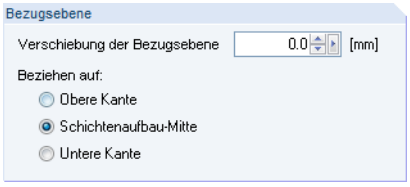


Bild 3.16: Bezugsebene

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Anhand der im Theorieteil erläuterten Formeln, berechnet das Programm aufgrund der hier definierten Verschiebung exzentrische Steifigkeitsglieder der Matrix die diesen Abstand berücksichtigen.

Elemente der Steifigkeitsmatrix (Exzentrizitätseinwirkungen)

D16:	-178793.6	[kNm/m]	D17:	-1696.9	[kNm/m]	D18:	0.0 [kNm/m]
			D27:	-81930.2	[kNm/m]	D28:	0.0 [kNm/m]
						D38:	-15801.0 [kNm/m]

Bild 3.17: Exzentrizitätsglieder der Steifigkeitsmatrix

Zur Ermittlung von z.B. D16 wird also nur der Abstand z_{min} und z_{max} anders berechnet.

$$D_{16} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^2 - z_{i;\min}^2}{2} d_{i;11}$$

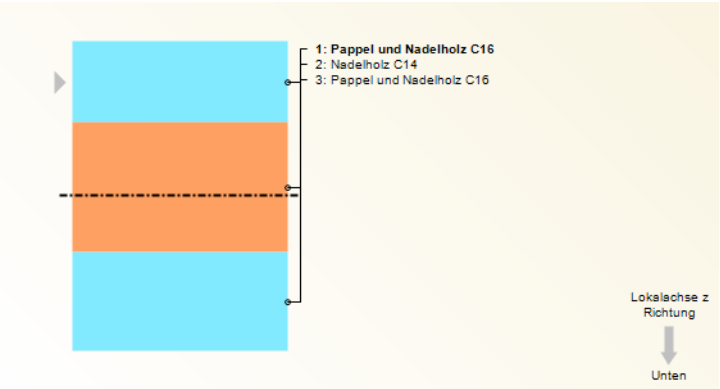


Bild 3.18: Bezugsebene β

3.3 Materialfestigkeiten

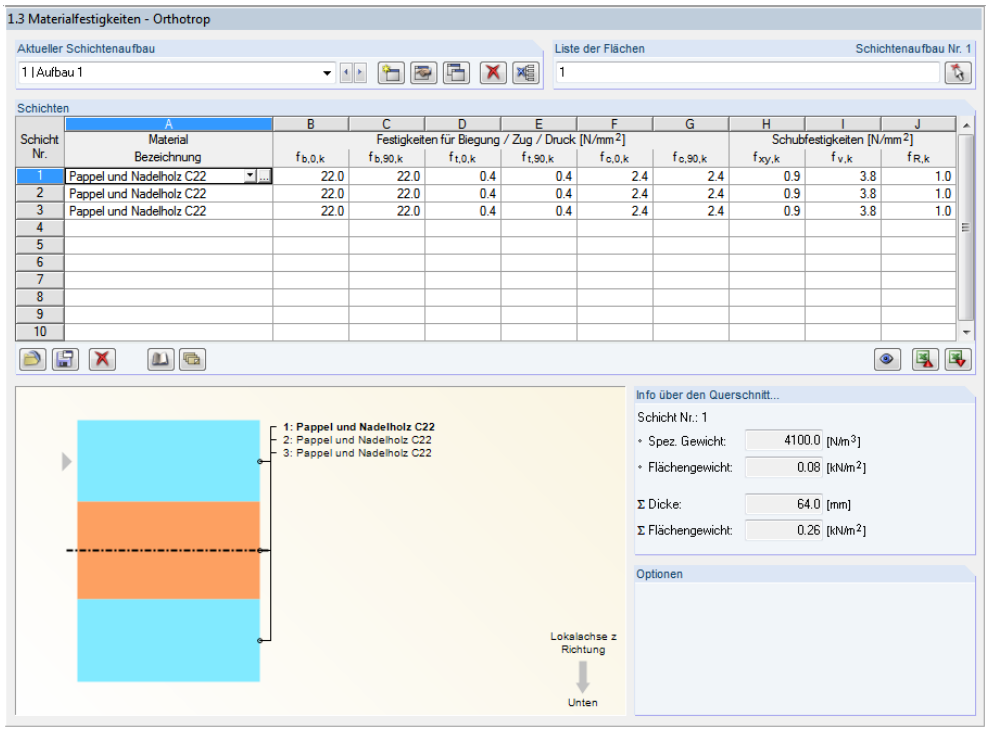


Bild 3.19: Maske 1.3 *Materialfestigkeiten*

In Maske 1.3 werden alle charakteristischen Festigkeiten angezeigt, die für die einzelnen Schichten eines aktuellen Schichtenaufbaus aus der Materialbibliothek importiert wurden. Diese Werte können in Maske 1.3 geändert werden.

In dieser Maske 1.3 stehen die gleichen Schaltflächen wie in Maske 1.2 zur Verfügung (siehe Kapitel 3.2 auf Seite 29).

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

3.4 Lasteinwirkungsdauer und Nutzungsklasse

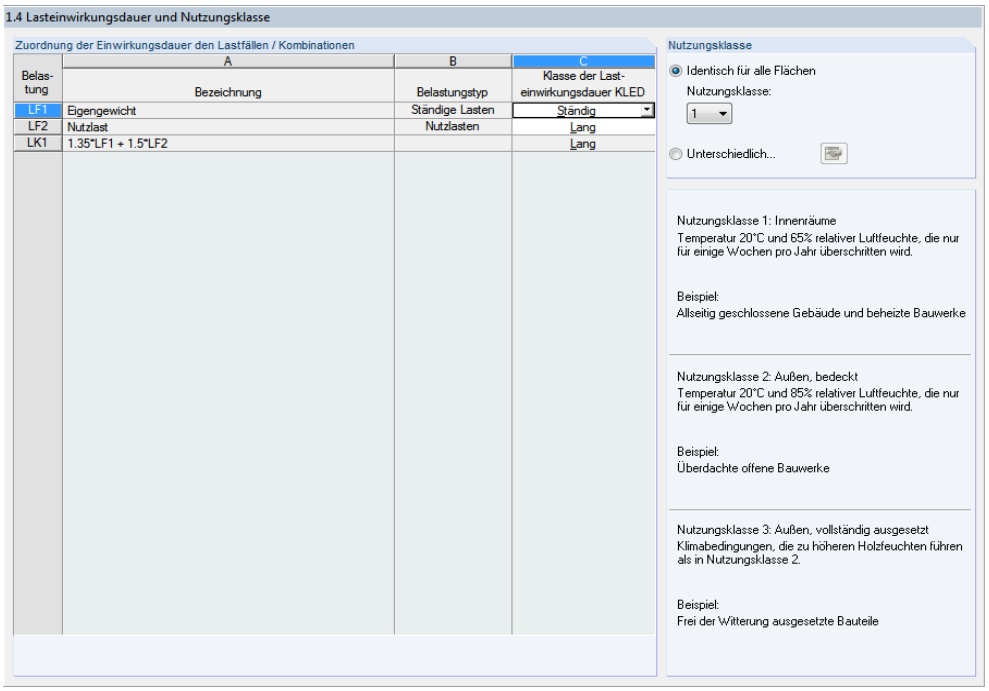


Bild 3.20: Maske 1.4 *Lasteinwirkungsdauer und Nutzungsklasse*

Ist eine Norm in Maske 1.1 *Basisangaben* k_{mod} ausgewählt, so erscheint die Maske *1.4 Lasteinwirkungsdauer* und Nutzungsklasse im Navigator. In Maske 1.4 sind die Einwirkungsdauer der Lasten und die Nutzungsklassen der Flächen zu definieren, um die klimatischen Bedingungen bei der Bemessung zu erfassen. Es sind alle Einwirkungen aufgelistet, die in Maske 1.1 Basisangaben für die Nachweise ausgewählt wurden.

Belastung

Es sind alle Einwirkungen aufgelistet, die in Maske 1.1 *Basisangaben* für die Nachweise ausgewählt wurden. Bei Kombinationen werden auch die enthaltenen Lastfälle ausgegeben.

Bezeichnung

Die Lastfallbezeichnungen in Spalte A erleichtern die Klassifizierung.

Belastungstyp

Diese Spalte zeigt die Einwirkungstypen der Lastfälle an, wie sie beim Anlegen in RFEM festgelegt wurden. Sie bilden die Grundlage der Voreinstellungen in der folgenden Spalte.

Klasse der Lasteinwirkungsdauer KLED

Für die Nachweise sind die Lasten und deren Überlagerungen bestimmten Klassen der Lasteinwirkungsdauer zuzuweisen. Die Klassen sind in der Norm EN 1995-1-1:2004-11 geregelt. Die Klassifizierung der Lastkombinationen richtet sich automatisch nach der maßgebenden Last. Wird in Spalte C ein Eintrag ausgewählt, so wird der entsprechende Beiwert k_{mod} automatisch eingestellt.

Die Modifikationsbeiwerte können im Dialog *Norm*, Register *Materialbeiwerte* überprüft werden.

Die Einteilung in *Nutzungsklassen* ermöglicht es, Festigkeitskennwerte zuzuordnen und Verformungen unter Berücksichtigung der Umweltbedingungen zu berechnen. Die Nutzungs-

klassen sind für die Ermittlung des Modifikationsbeiwerts k_{mod}. notwendig. Die Klassifizierung von Einwirkungen ist z. B. in EN 1995-1-1:2004, Tabelle 2.3.1.3 geregelt.

Als Voreinstellung sind alle Flächen der gleichen Nutzungsklasse zugewiesen. Um Objekte in verschiedene Nutzungsklassen einzuteilen, ist das Auswahlfeld *Unterschiedlich* zu aktivieren. Über die Schaltfläche [Fläche jeweiligen Nutzungsklassen zuordnen] kann dann folgender Dialog aufgerufen werden.

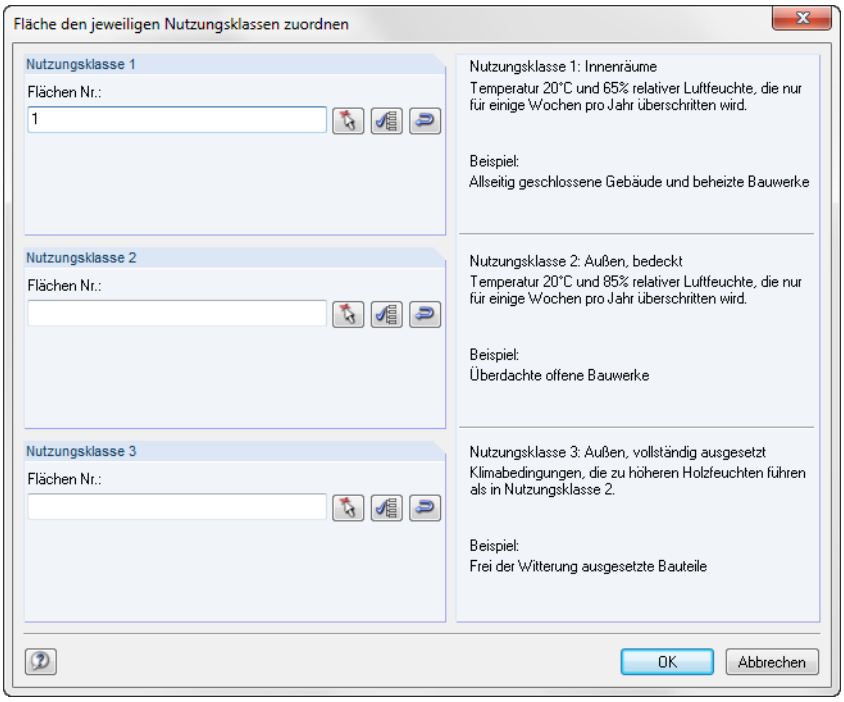


Bild 3.21: Dialog *Flächen den jeweiligen Nutzungsklassen zuordnen*

Die Schaltflächen neben den Eingabefeldern erleichtern die Auswahl. Sie bedeuten:

Schaltfläche	Funktion
	Ermöglicht die grafische Auswahl der Flächen im RFEM-Arbeitsfenster für die Zuordnung zu der jeweiligen Nutzungsklasse
	Weist alle Flächen dieser Nutzungsklasse zu
	Weist alle noch nicht zugeteilten Flächen dieser Nutzungsklasse zu

Tabelle 3.3: Schaltflächen im Dialog *Fläche den jeweiligen Nutzungsklassen zuordnen*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

3.5 Gebrauchstauglichkeitsparameter

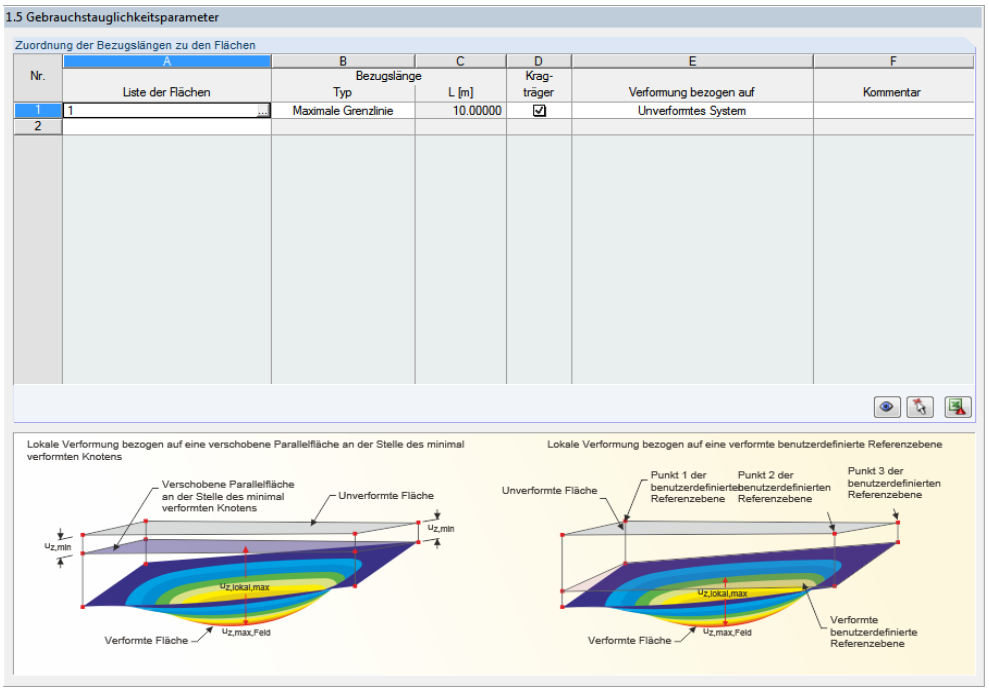


Bild 3.22: Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter*

Die Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter* ist die letzte Eingabemaske. Sie steht nur dann zur Verfügung, wenn im Register *Gebrauchstauglichkeit* der Maske 1.1 entsprechende Eingaben vorgenommen wurden (siehe Kapitel 3.1.2, Seite 23).

Liste der Flächen

In Spalte A sind die Flächen anzugeben, deren Verformungen untersucht werden sollen.

Bezugslänge

Hier ist der *Typ* der *Bezugslänge* L zu definieren.

Bei der Wahl der maximalen Grenzlinie einer Fläche wird die längste Seite einer Fläche zur Berechnung der Grenzverformung mit z.B. l/300 gewählt. Bei der kürzesten Linie wird analog die kürzeste Linie gewählt.

Mit der Option *Benutzerdefiniert* kann die Bezugslänge der entsprechenden Fläche manuell eingestellt werden. Hierdurch wird das Eingabefeld für L zugänglich, in dem der Wert eingetragen, über [▼] aus der Liste gewählt oder mit […] im RFEM-Arbeitsfenster grafisch bestimmt werden kann. Manuelle Korrekturen sind beispielsweise für Flächen erforderlich, die innerhalb anderer Flächen liegen.

Kragfläche

Es ist anzugeben, ob eine *Kragfläche* vorliegt.

Verformung bezogen auf

Das Nachweiskriterium der Verformung benutzt die Durchbiegung einer Fläche – die vertikale Verformung bezogen auf die geradlinige Verbindung der Unterstützungspunkte. In der Liste dieser Spalte sind drei Auswahlmöglichkeiten enthalten, wie die im Nachweis angesetzte lokale Verformung $u_{z,lokal}$ berechnet wird.

- *Unverformtes System*: Die Verformung wird auf das Ausgangssystem bezogen.
- *Verschobene Parallelfläche*: Diese Option ist bei einer nachgiebigen Lagerung der Fläche zu empfehlen. Die Verformung $u_{z,lokal}$ wird auf eine parallel zum unverformten System verschobene, virtuelle Referenzfläche bezogen. Der Verschiebungsvektor der Referenzfläche ist so lang wie die kleinste Knotenverformung in der Fläche.

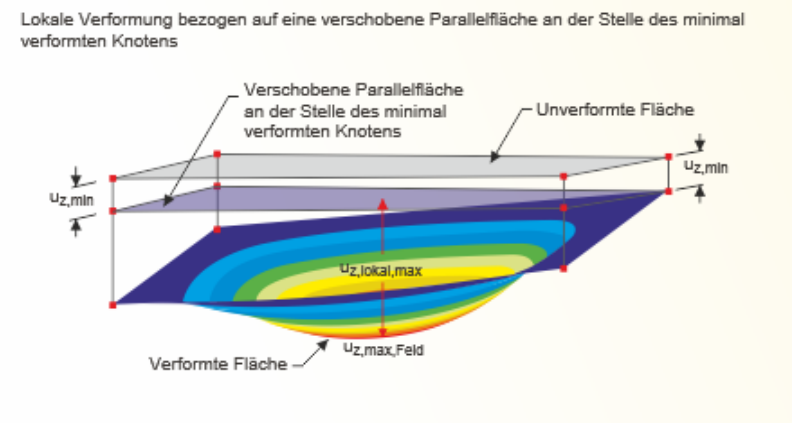


Bild 3.23: : Verschobene Parallelfläche (Verschiebungsvektor: kleinste Knotenverformung $u_{z,min}$)

- *Verschobene Referenzebene*: Wenn sich die Lager einer Fläche stark unterschiedlich verformen, kann eine geneigte Referenzebene für die nachzuweisende Verformung $u_{z,lokal}$ definiert werden. Diese Ebene ist durch drei Punkte des unverformten Systems festzulegen. Das Programm ermittelt die Verformung der drei Definitionspunkte, legt die Referenzebene durch diese verschobenen Punkte und berechnet dann die lokale Verformung $u_{z,lokal}$.

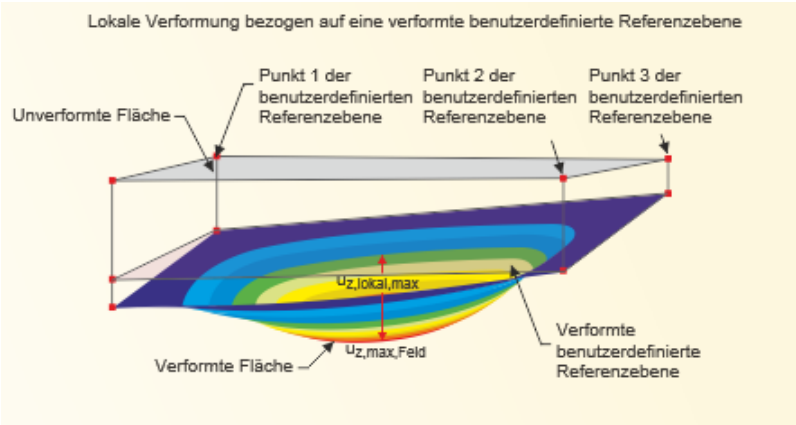


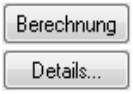
Bild 3.24: : Verschobene benutzerdefinierte Referenzebene

Kommentar

Die letzte Spalte steht für einen benutzerdefinierten *Kommentar* zur Verfügung.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

4. Berechnung



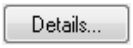
Vor dem Start der [Berechnung] sollten die Detaileinstellungen für den Nachweis kontrolliert werden. Die entsprechenden Dialoge sind in den folgenden Unterkapiteln beschrieben.

Es wird vor der Berechnung überprüft, ob die Gesamtsteifigkeitsmatrix positiv definit ist (siehe Kapitel 9.2).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sym.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sym.} & \text{sym.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Die Berechnung erfolgt dann für Gesamtsystem, das in RFEM modelliert wurde.

4.1 Details



Die Bemessungsdetails können im entsprechenden Dialog über die Schaltfläche [Details] überprüft werden. Dieser Dialog ist in folgende Register gegliedert:

- *Spannungen*
- *Ergebnisse*

Die folgenden Schaltflächen stehen dabei in allen Registern zur Verfügung. Sie bedeuten:

Schaltfläche	Bezeichnung	Funktion
	Einheiten und Dezimalstellen	Öffnet den Dialog *Einheiten und Dezimalstellen* Kapitel 7.1, Seite 57
	Dlubal-Standardwerte	Liest die ursprünglichen Dlubal-Einstellungen in den Dialog *Details* ein
	Standard	Stellt alle Parameter im Dialog *Details* nach den zuvor gespeicherten Standardeinstellungen ein
	Als Standard setzen	Speichert die aktuellen Einstellungen als benutzerdefinierten Standard Null-Übersetzung

Tabelle 4.1: Schaltflächen im Dialog *Details*

4.1.1 Spannungen

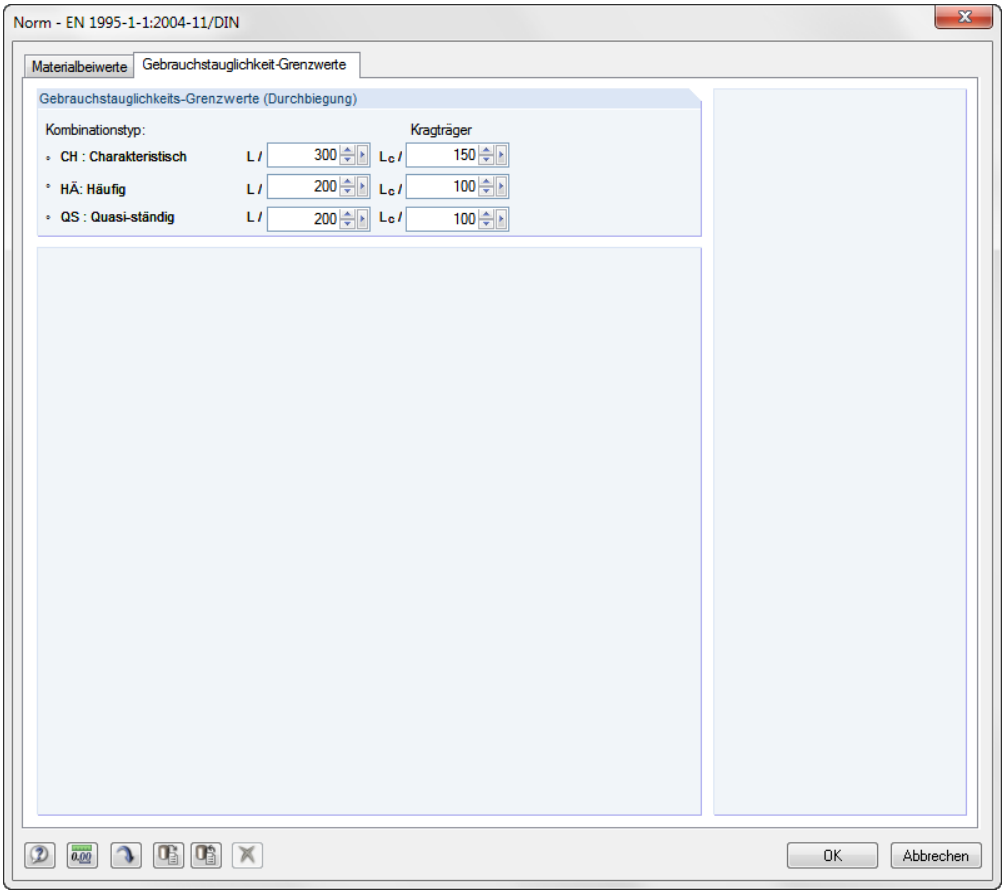


Bild 4.1: Dialog *Details*, Register *Spannungen*

Anzeigen

Die Kontrollfelder in diesem Abschnitt steuern, welche Spannungen in den Ausgabemasken angezeigt werden. Die Spannungen sind in die Kategorien *Schichtränder oben/unten* und *Schichtmitten* unterteilt. Die Schaltflächen [Alles selektieren] und [Alles deselektieren] erleichtern die Auswahl.

Die Grundspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ werden in RFEM nach der Finite-Elemente-Methode ermittelt. Weitere Spannungen werden in RF-LAMINATE aus diesen Grundspannungen ermittelt. In Tabelle 4.2 werden die Formeln vorgestellt, die für eine Einzelschichtplatte gelten.

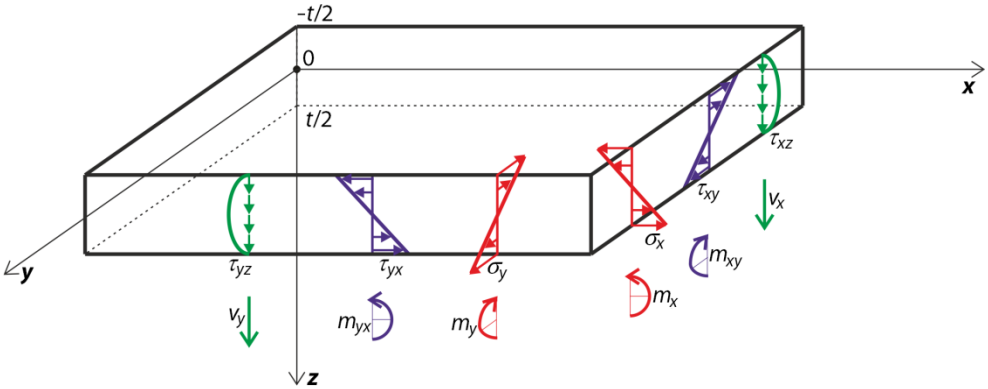


Bild 4.2: Grundspannungen und Vorzeichenregeln für eine biegebeanspruchte Einzelschichtplatte

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

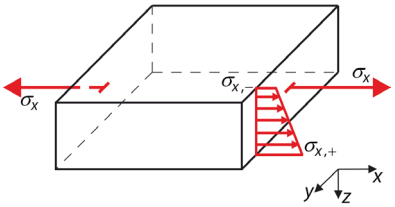
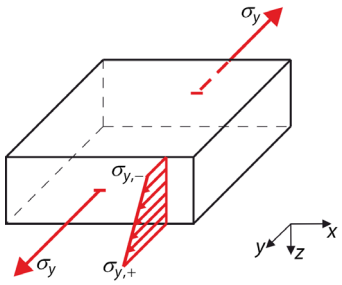
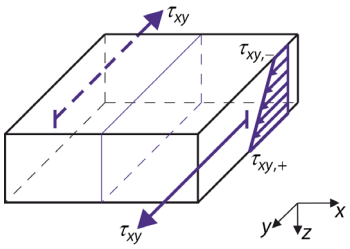
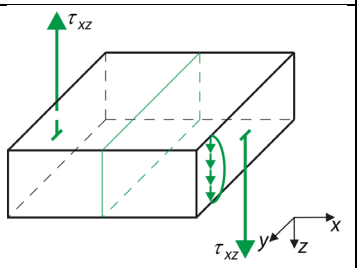
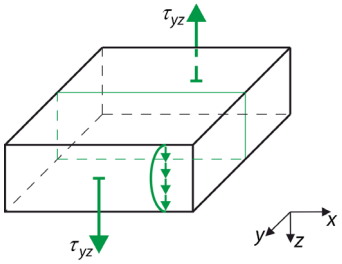
σ_x	Normalspannung in Richtung der x-Achse • an positiver Flächenseite $\sigma_{x,+} = \frac{n_x}{t} + \frac{6m_x}{t^2}$, mit t =Plattendicke • an negativer Flächenseite $\sigma_{x,-} = \frac{n_x}{t} - \frac{6m_x}{t^2}$	
σ_y	Normalspannung in Richtung der y-Achse • an positiver Flächenseite $\sigma_{y,+} = \frac{n_y}{t} + \frac{6m_y}{t^2}$ • an negativer Flächenseite $\sigma_{y,-} = \frac{n_y}{t} - \frac{6m_y}{t^2}$	
τ_{xy}	Schubspannung in xy-Ebene • an positiver Flächenseite $\tau_{xy,+} = \frac{n_{xy}}{t} + \frac{6m_{xy}}{t^2}$ • an negativer Flächenseite $\tau_{xy,-} = \frac{n_{xy}}{t} - \frac{6m_{xy}}{t^2}$	
τ_{xz}	Schubspannung in xz-Ebene • in Plattenmitte $\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{v_x}{t}$	
τ_{yz}	Schubspannung in yz-Ebene • in Plattenmitte $\tau_{yz} = \frac{3}{2}\frac{v_y}{t}$	

Tabelle 4.2: Grundspannungen

Die Spannungen in den einzelnen Schichten werden generell aus den Gesamtdehnungen der Platte berechnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tot}^{T} = \left\{ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y, \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \tag{4.2}$$

Die Dehnungen in den einzelnen Schichten werden nach folgender Formel ermittelt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

mit z-Koordinate in Richtung der z-Achse, in der der Spannungswert gesucht wird. Handelt es sich beispielsweise um die i – te Schicht, so wird die Spannung mit folgender Formel ermittelt:

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \mathbf{d}_i \boldsymbol{\varepsilon}(z) \tag{4.4}$$

mit $\mathbf{d}_i$ Teilsteifigkeitsmatrix der i – te n Schicht.

Nun müssen die Spannungen nach dem jeweiligen Materialmodell – isotrop oder orthotrop – eingeteilt werden.

Isotropes Materialmodell

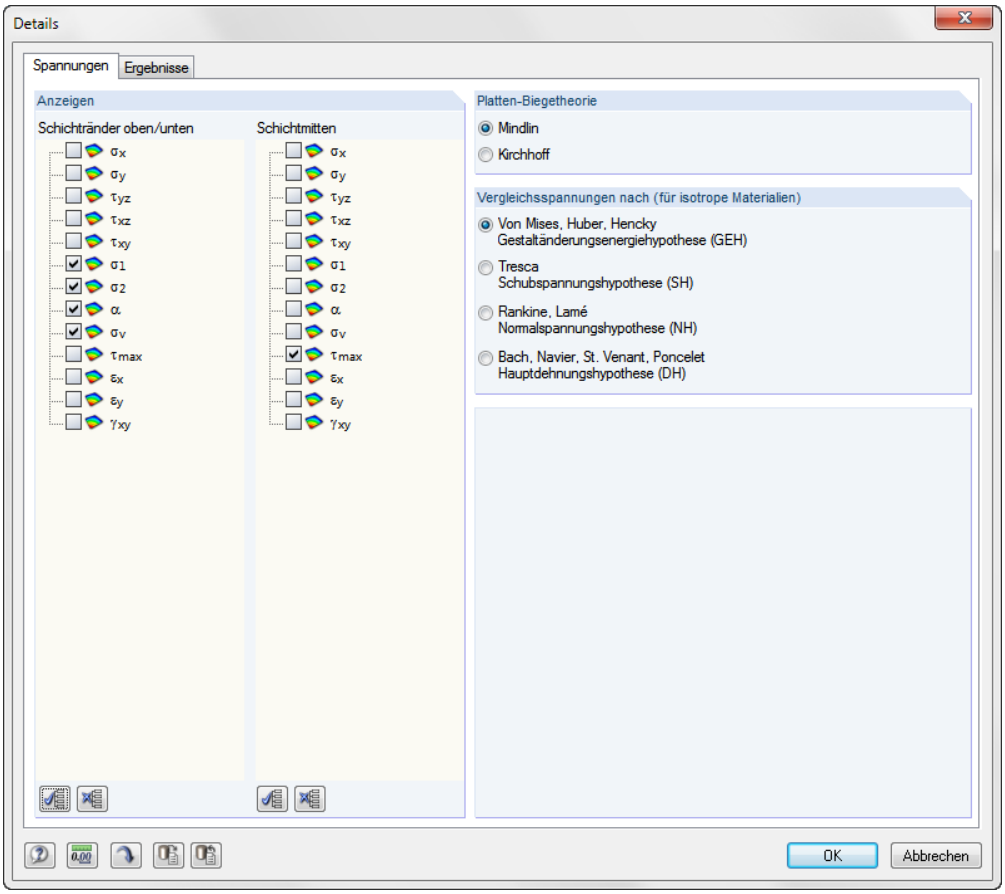


Bild 4.3: Dialog *Details*, Register *Spannungen* für isotropes Material

Der Einfluss der Querschubspannungen wird ausgedrückt durch die Größe:

τ_{max}	Maximale Querschubspannung $\tau_{max} = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}$

Tabelle 4.3: Maximale Querschubspannung

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Tabelle 4.4 zeigt die Formeln für die Berechnung der Haupt- und Vergleichsspannungen.

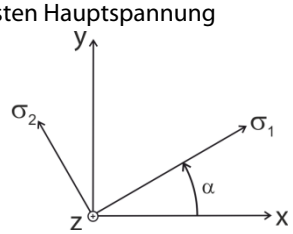
σ_1	Hauptspannung $\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$
σ_2	Hauptspannung $\sigma_2 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$
α	Winkel zwischen lokaler *x*-Achse und Richtung der ersten Hauptspannung $\alpha = \dfrac{1}{2}\text{atan2}\left(2\tau_{xy},\ \sigma_x - \sigma_y\right),\quad \alpha \in \left(-90^\circ, 90^\circ\right\rangle$  Die Funktion atan2 ist wie folgt implementiert: $\text{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\dfrac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ 0 & y = 0, x = 0 \end{cases}$
σ_v	Vergleichsspannung nach von Mises, Huber, Hencky (Gestaltänderungshypothese) $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$
	Vergleichsspannung nach Tresca (Schubspannungshypothese) $\sigma_v = \max\left[\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},\ \dfrac{\left\lvert\sigma_x + \sigma_y\right\rvert + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}\right]$
	Vergleichsspannung nach Rankine, Lamé (Normalspannungshypothese) $\sigma_v = \dfrac{\left\lvert\sigma_x + \sigma_y\right\rvert + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$
	Vergleichsspannung nach Bach, Navier, St. Venant, Poncelet (Hauptdehnungshypothese) $\sigma_v = \max\left[\dfrac{1-\nu}{2}\left\lvert\sigma_x + \sigma_y\right\rvert + \dfrac{1+\nu}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},\ \nu\left\lvert\sigma_x + \sigma_y\right\rvert\right]$

Tabelle 4.4: Spannungen bei isotropen Materialmodell

Orthotropes Materialmodell

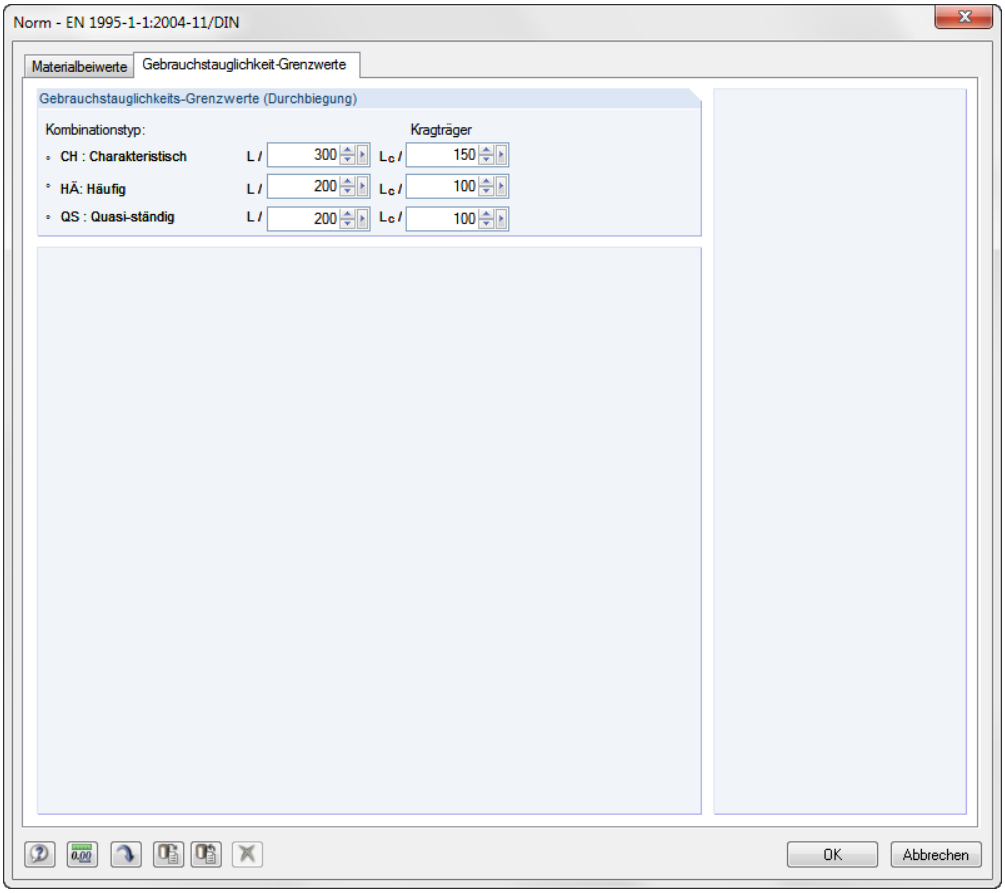
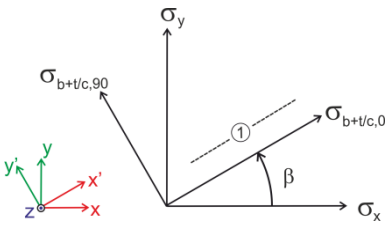


Bild 4.4: Dialog *Details*, Register *Spannungen* für orthotropes Materialmodell

$\sigma_{b+t/c,0}$	Normalspannung in Faserrichtung $\sigma_{b+t/c,0} = \sigma_x \cos^2\beta + \tau_{xy} \sin 2\beta + \sigma_y \sin^2\beta$  1 – Faserrichtung
$\sigma_{b+t/c,90}$	Normalspannung quer zur Faser $\sigma_{b+t/c,90} = \sigma_x \sin^2\beta - \tau_{xy} \sin 2\beta + \sigma_y \cos^2\beta$
$\sigma_{t/c,0}$	Zug-/Druckkomponente der Normalspannung in Faserrichtung $\sigma_{t/c,0} = \frac{\sigma_{b+t/c,0(Oben)} + \sigma_{b+t/c,0(Mitte)} + \sigma_{b+t/c,0(Unten)}}{3}$
$\sigma_{t/c,90}$	Zug-/Druckkomponente der Normalspannung quer zur Faser $\sigma_{t/c,90} = \frac{\sigma_{b+t/c,90(Oben)} + \sigma_{b+t/c,90(Mitte)} + \sigma_{b+t/c,90(Unten)}}{3}$
$\sigma_{b,0}$	Biegeanteil der Normalspannung in Faserrichtung $\sigma_{b,0} = \sigma_{b+t/c,0} - \sigma_{t/c,0}$
$\sigma_{b,90}$	Biegeanteil der Normalspannung quer zur Faser $\sigma_{b,90} = \sigma_{b+t/c,90} - \sigma_{t/c,90}$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

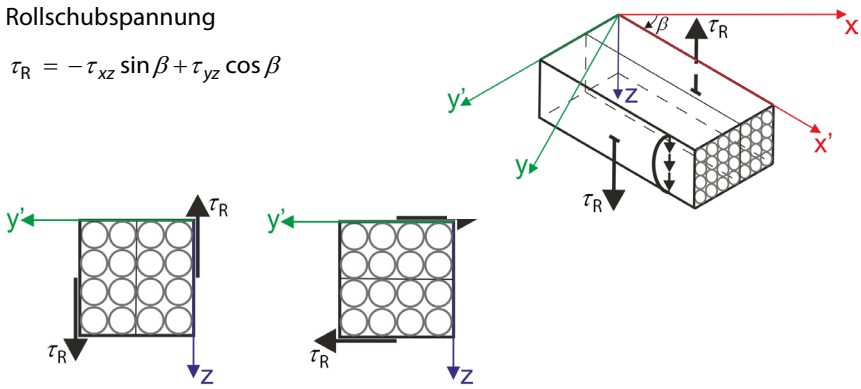
τ_R	Rollschubspannung $\tau_R = -\tau_{xz}\sin\beta + \tau_{yz}\cos\beta$ 

Tabelle 4.5: Spannungen bei orthotropem Materialmodell

Dabei ist zu beachten, dass die Spannungen $\sigma_{b+t/c,0}$, $\sigma_{b+t/c,90}$, $\sigma_{t/c,0}$, $\sigma_{t/c,90}$, $\sigma_{b,0}$, $\sigma_{b,90}$, τ_R im Koordinatensystem der Faser x', y', z beschrieben sind, die in jeder Schicht rotiert werden können. Aus diesem Grund können Unstetigkeiten in den Spannungswerten der einzelnen Schichten an ihren Grenzen auftreten. Die Transformationsformeln für die Spannungen werden in Kapitel 5.1 beschrieben.

Die Normalspannung setzt sich aus dem Biege- und dem Zug-/Druckanteil für die einzelnen Schichten zusammen.

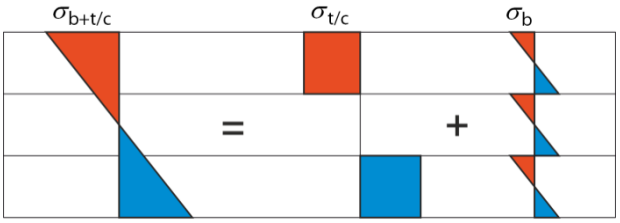


Bild 4.5: Zerlegung der Normalspannung in die Zug-/Druckkomponente und die Biegekomponente

Platten-Biegetheorie

Flächen können berechnet werden nach der Biegetheorie von

- Mindlin oder
- Kirchhoff.

Bei der Berechnung nach Mindlin werden Schubdehnungen eingeschlossen, nach Kirchhoff werden diese nicht berücksichtigt. Die Biegetheorie nach Mindlin eignet sich für dicke Platten, die nach Kirchhoff dagegen für relativ dünne Platten.

Da die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} in der Theorie nach Kirchhoff nicht genau berechnet werden, werden diese aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Sie können mit den folgenden Formeln berechnet werden:

$$\tau_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{v_x}{t} = 1.5\frac{v_x}{t} \tag{4.5}$$

$$\tau_{yz,\max} = \frac{3}{2}\frac{v_y}{t} = 1.5\frac{v_y}{t} \tag{4.6}$$

Vergleichsspannungen nach (für isotrope Materialien)

Die Vergleichsspannungen lassen sich nach vier Ansätzen ermitteln:

Vergleichsspannung nach von Mises, Huber, Hencky (Gestaltänderungshypothese)
Diese Hypothese ist auch als HMH-Theorie (Huber, VON MISES, Hencky) bekannt. Die Vergleichsspannungen werden wie folgt berechnet

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{4.7}$$

Vergleichsspannung nach Tresca (Schubspannungshypothese)
Diese Vergleichsspannung wird üblicherweise wie folgt ermittelt

$$\sigma_v = \max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|,\ |\sigma_1 - \sigma_3|,\ |\sigma_2 - \sigma_3|\right) \tag{4.8}$$

Bei $\sigma_3 = 0$ kann vereinfacht werden:

$$\sigma_v = \max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|,\ |\sigma_1|,\ |\sigma_2|\right) \tag{4.9}$$

Dies führt zu folgender Gleichung:

$$\sigma_v = \max\left[\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},\ \frac{|\sigma_x + \sigma_y| + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}\right] \tag{4.10}$$

Vergleichsspannung nach Rankine, Lamé (Normalspannungshypothese)
Diese Hypothese nach RANKINE wird auch als Normalspannungshypothese bezeichnet. Die Vergleichsspannung ermittelt sich dabei aus den größten Absolutwerten der Hauptspannungen.

$$\sigma_v = \max\left(|\sigma_1|,\ |\sigma_2|,\ |\sigma_3|\right) \tag{4.11}$$

Bei $\sigma_3 = 0$ kann vereinfacht werden:

$$\sigma_v = \max(|\sigma_1|,\ |\sigma_2|) \tag{4.12}$$

Dies führt zu folgender Gleichung:

$$\sigma_v = \frac{|\sigma_x + \sigma_y| + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \tag{4.13}$$

Bach, Navier, St. Venant, Poncelet (Hauptdehnungshypothese)
Die Vergleichsspannungshypothese nach BACHwird auch als „Hauptdehnungshypothese" bezeichnet. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Versagen in Richtung der größten Dehnung auftritt.

$$\sigma_v = \max\left(|\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)|,\ |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)|,\ |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)|\right) \tag{4.14}$$

Bei $\sigma_3 = 0$ kann vereinfacht werden:

$$\sigma_v = \max\left(|\sigma_1 - \nu\sigma_2|,\ |\sigma_2 - \nu\sigma_1|,\ \nu|\sigma_1 + \sigma_2|\right) \tag{4.15}$$

Dies führt zu folgender Gleichung:

$$\sigma_v = \max\left[\frac{1-\nu}{2}|\sigma_x + \sigma_y| + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2},\ \nu|\sigma_x + \sigma_y|\right] \tag{4.16}$$

In den Formeln für die Vergleichsspannungen werden die Einflüsse der Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} vernachlässigt.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

4.1.2 Ergebnisse

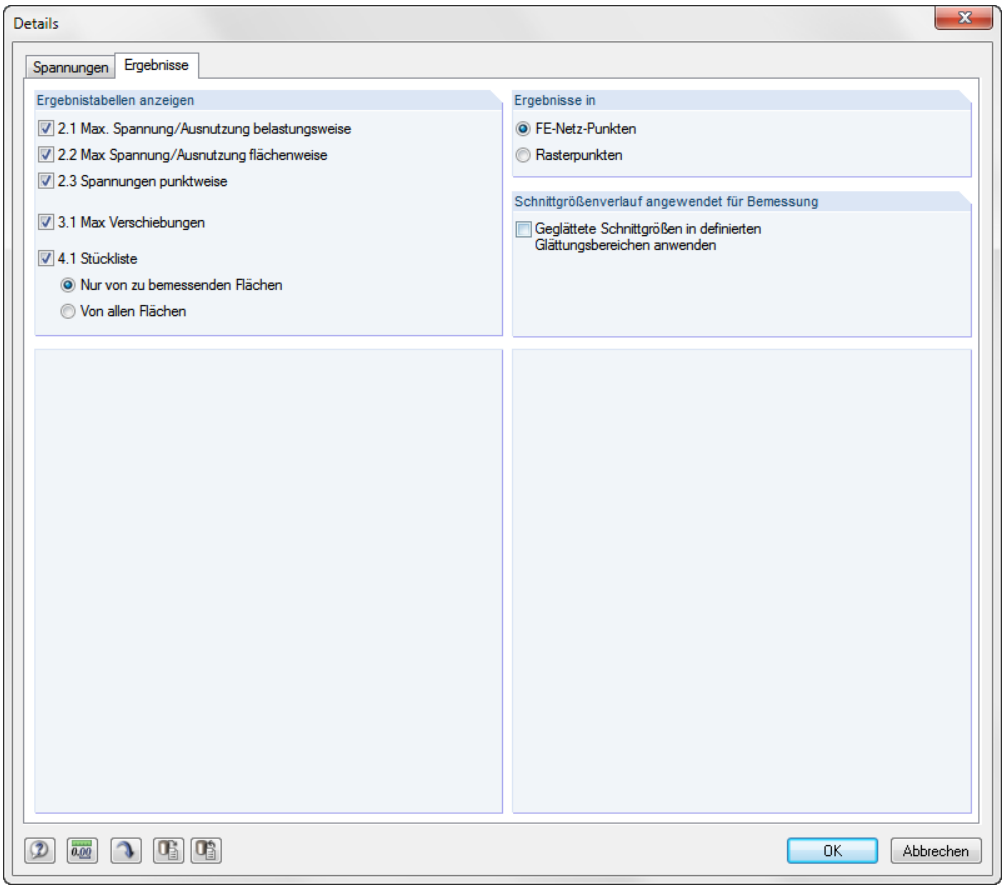


Bild 4.6: Dialog *Details*, Register *Ergebnisse*

Ergebnistabellen anzeigen

In diesem Abschnitt lässt sich festlegen, welche Ergebnismasken angezeigt werden sollen (Spannungen, Verschiebungen, Stückliste).

Die Masken sind im Kapitel 5 *Ergebnisse* auf Seite 54 beschrieben.

Ergebnisse in

Spannungen und Verschiebungen werden standardmäßig in allen FE-Netz-Punkten angezeigt. Die Ergebnisse können auch in den Rasterpunkten angezeigt werden (siehe RFEM-Handbuch, Kapitel 8.12). Die Rasterpunkte können in RFEM als Eigenschaft einer Fläche definiert werden.

Bei kleinen Flächen kann die Standardmaschenweite des Rasters von 0,5 m dazu führen, dass nur wenige Rasterpunkte (oder sogar nur ein Ergebnisrasterpunkt im Ursprung) existieren. Der Abstand der Rasterpunkte sollte dann in RFEM an die Flächenabmessungen angepasst werden, um mehr Rasterpunkte zu erzeugen.

Schnittgrößenverlauf angewendet für Bemessung

In diesem Abschnitt steht das Kontrollfeld Geglättete Schnittgrößen in definierten *Glättungsbereichen anwenden* zur Verfügung. Damit werden die in RFEM definierten Glättungsbereiche während der Spannungsberechnung in RF-LAMINATE angewendet.

4.2 Norm

4.2.1 Materialbeiwerte

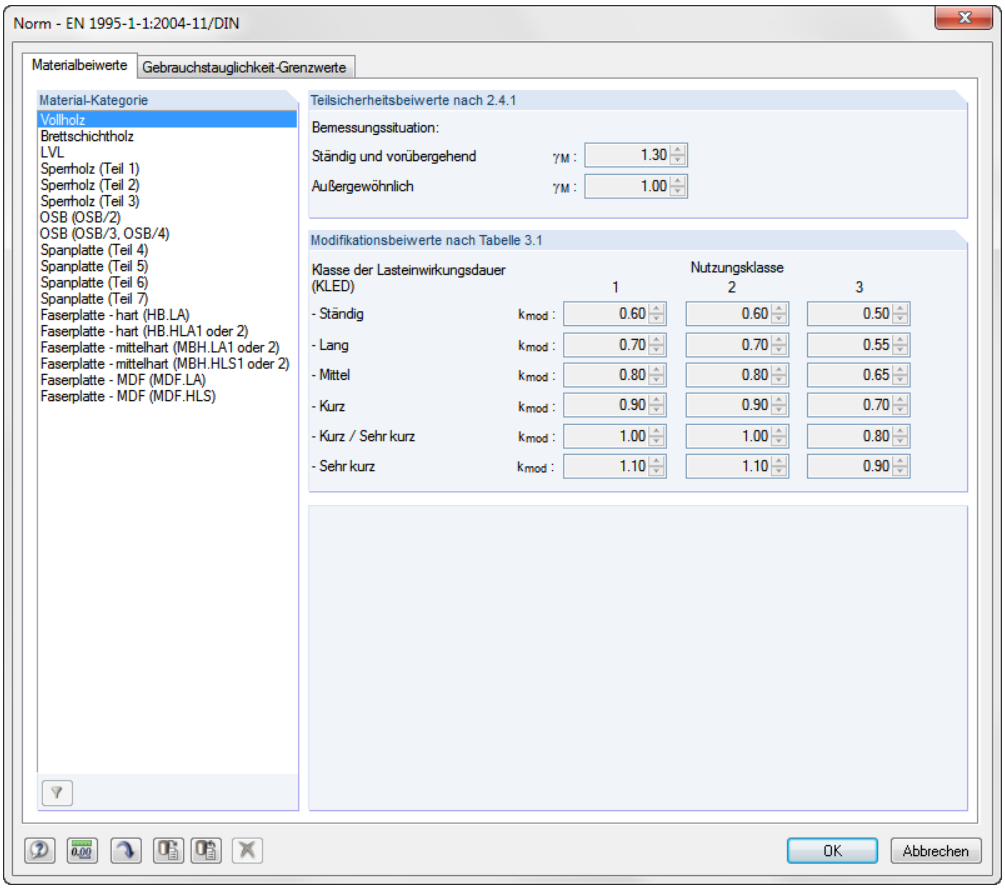


Bild 4.7: Dialog *Norm*, Register *Materialbeiwerte*

Material-Kategorie

In der Material Kategorie werden die Teilsicherheitsbeiwerte und die Modifikationsbeiwerte entsprechend des gewählten Materials angepasst. Für den Werkstoff Brettsperrholz empfiehlt es sich den Teil 2 auszuwählen. Das Programm stellt in diesem Fall automatisch die Modifikationsbeiwerte der zugehörigen Nutzungsklasse sowie die Teilsicherheitsbeiwerte ein. Die Nutzungsklasse 3 ist für Sperrholz z.B. nicht möglich und wird daher ausgegraut.

Bild 4.8: KLED Sperrholz

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Die zugehörige Materialkategorie kann in der Materialdatenbank geändert werden.

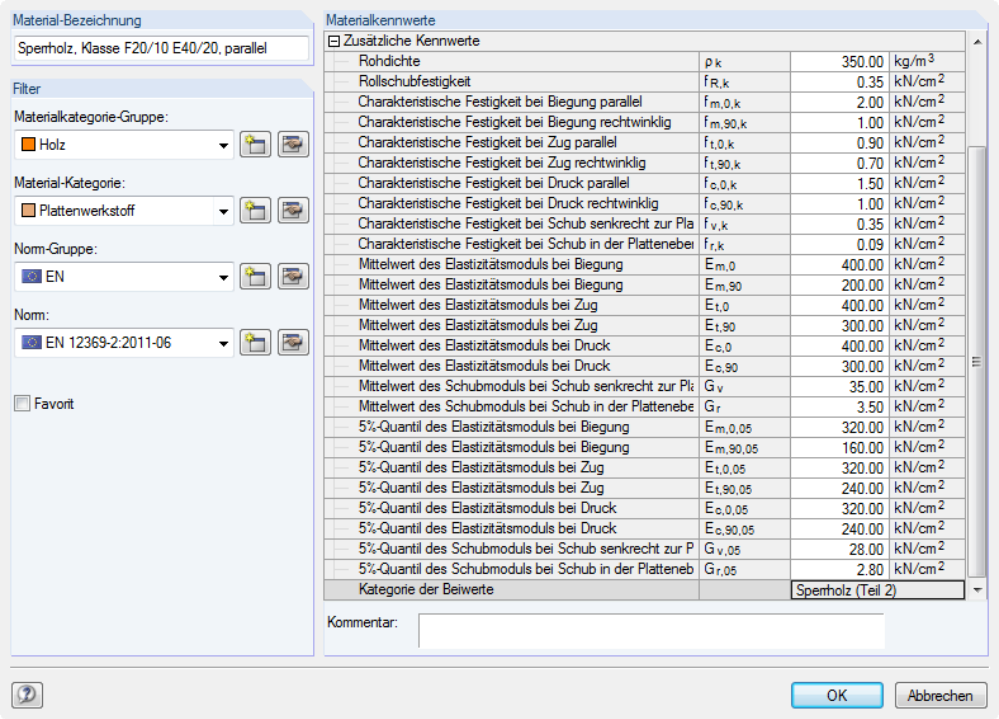


Bild 4.9: Materialkategorie in der Datenbank

Falls die Definition der Beiwerte und Faktoren wie gewohnt benutzerdefiniert erfolgen soll, muss hierzu lediglich eine benutzerdefinierte Norm mit den jeweiligen Parametern erzeugt werden.

Teilsicherheitsbeiwerte

Analog zu den Modifikationsbeiwerten werden bei der Wahl der jeweiligen Kategorie auch die Teilsicherheitsbeiwerte eingestellt. Anhand der in Maske 1.4 Lasteinwirkungsdauer und Nutzungsklasse definierten Klasse der Lasteinwirkungsdauer KLED werden die Festigkeiten die den Spannungen gegenübergestellt werden entsprechend folgender Formel reduziert.

$$f_d = \frac{f_k \cdot k_{\text{mod}}}{\gamma_M}$$

Modifikationsbeiwerte

Die Modifikationsbeiwerte k_{mod} werden hier für jede *Klasse der Lasteinwirkungsdauer* und *Nutzungsklasse* angezeigt. Die Werte orientieren sich an der Norm DIN 1052:2010 oder EN 1995-1-1:2004, Tabelle 3.1. Der Modifikationsbeiwert wird für die in Maske 1.4 *Lasteinwirkungsdauer und Nutzungsklasse* ausgewählte Klasse der Lasteinwirkungsdauer zugewiesen (siehe Kapitel 3.4, Seite 37).

4.2.2 Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerte

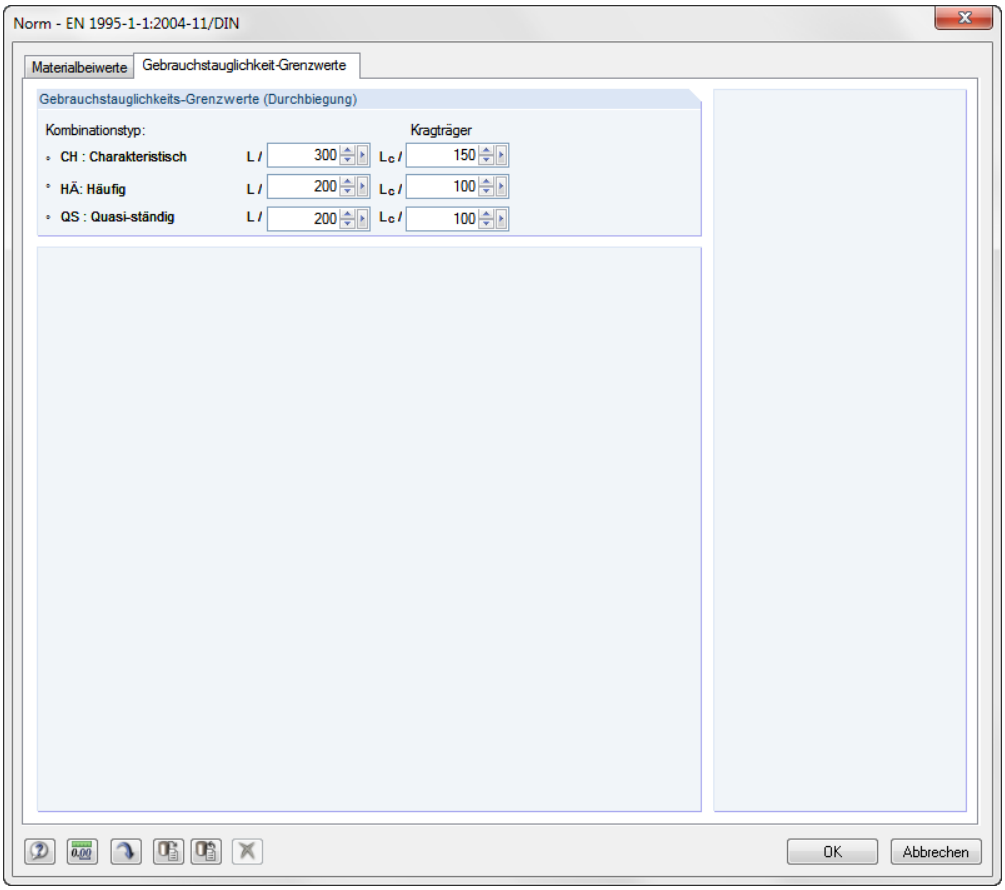


Bild 4.10: Dialog *Norm*, Register *Materialbeiwerte*

Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerte (Durchbiegung)

In den sechs Eingabefeldern können die Grenzwerte der zulässigen Durchbiegung eingestellt werden. Es sind spezifische Vorgaben für die unterschiedlichen Einwirkungskombinationen (Charakteristisch, Häufig und Quasi-ständig) sowie für beidseitig oder nur einseitig gestützte Flächen möglich. Die Klassifizierung der Lastfälle erfolgt in Maske 1.1 *Basisangaben*, Register *Gebrauchstauglichkeit* (siehe Kapitel 3.1.2, Seite 28). In Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter* sind die Referenzlängen L der Flächen festzulegen (siehe Kapitel 3.5, Seite 39).

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

4.3 Zu berechnen

Die [Berechnung] kann in jeder Eingabemaske des Moduls gestartet werden.

Die Berechnung kann auch in der RFEM-Oberfläche gestartet werden: Der Dialog *Zu berechnen* (Menü *Berechnen* → *Zu berechnen*) listet die Bemessungsfälle der Zusatzmodule wie Lastfälle oder Lastkombinationen auf.

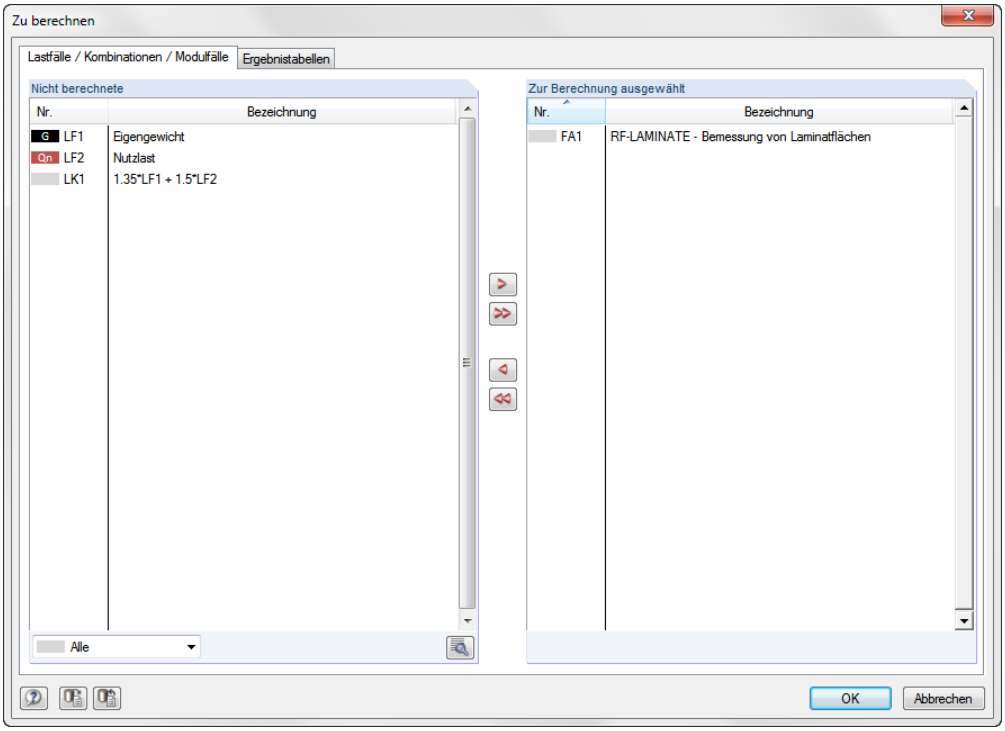
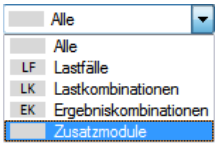


Bild 4.11: Dialog *Zu berechnen* in RFEM



Falls der RF-LAMINATE-Fall in der Liste *Nicht berechnete* fehlt, ist die Selektion am Ende der Liste auf *Alle oder Zusatzmodule* zu ändern.

Mit der Schaltfläche [▶] wird der selektierte RF-LAMINATE-Fall in die rechte Liste übergeben. [OK] startet dann die Berechnung.

Ein Bemessungsfall kann auch über die Liste der Symbolleiste direkt berechnet werden: Stellen Sie den RF-LAMINATE-Fall ein und klicken dann die Schaltfläche [Ergebnisse anzeigen] an.

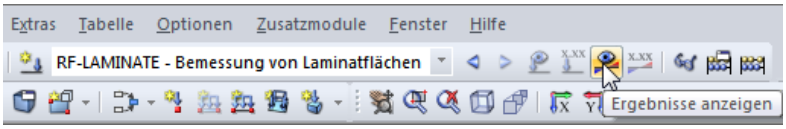
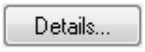


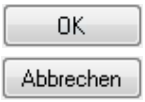
Bild 4.12: Direkte Berechnung eines RF-LAMINATE-Falls in RFEM

5. Ergebnisse



Maske 2.1 *Max. Spannungen/Ausnutzung belastungsweise* wird unmittelbar nach der Berechnung angezeigt. Dialog *Details*, Register *Ergebnisse* steuert, welche Ergebnismasken angezeigt werden (siehe Kapitel 4.1.2 auf Seite 49).

Jede Maske lässt sich durch Anklicken des Eintrags im Navigator direkt ansteuern. Mit den links dargestellten Schaltflächen wird die vorherige bzw. nächste Maske eingestellt. Das Blättern durch die Masken ist auch mit den Funktionstasten [F2] (vorwärts) und [F3] (rückwärts) möglich.



[OK] sichert die Ergebnisse. RF-LAMINATE wird beendet und es erfolgt die Rückkehr in das Hauptprogramm. [Abbrechen] beendet das Zusatzmodul, ohne die Daten zu speichern.

Die Bemessungsergebnisse lassen sich auf verschiedene Weise auswerten. Hierzu sind auch die Schaltflächen am Ende der oberen Tabelle hilfreich.

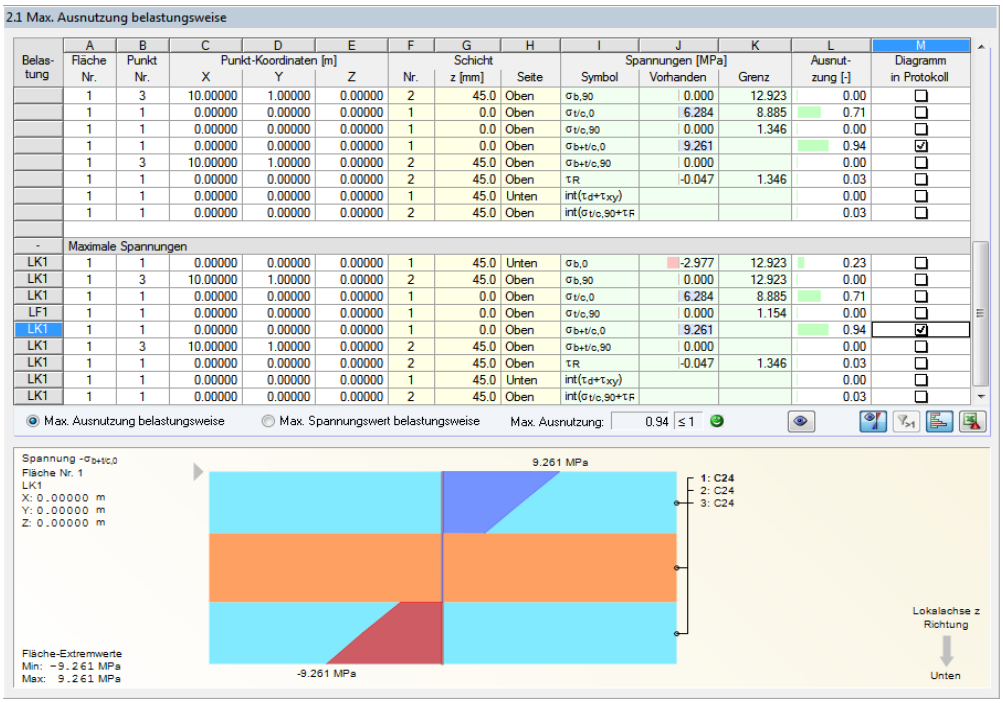
Schaltfläche	Bezeichnung	Funktion
	Sichtmodus	Ermöglicht den Wechsel in das RFEM-Arbeitsfenster, um die Ansicht zu ändern
	Selektion	Ermöglicht die grafische Auswahl einer Fläche oder eines Punkts, um dessen Ergebnisse in der Tabelle anzuzeigen
	Ergebnisverläufe	Blendet die Ergebnisse in der RFEM-Grafik im Hintergrund an und aus
	Überschreitung	Stellt nur Zeilen dar, in denen die Ausnutzungen größer als 1 und damit der Nachweis nicht erfüllt ist
	Relationsbalken	Blendet die farbigen Bezugsskalen in den Ergebnismasken ein und aus
	Excel-Export	Öffnet den Dialog Tabelle exportieren → Kapitel 7.2, Seite 69.

Tabelle 5.1: Schaltflächen in Ergebnismasken

Im Folgenden werden die Ergebnismasken der Reihe nach vorgestellt.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

5.1 Max. Spannung/Ausnutzung belastungsweise



2.1 Max. Ausnutzung belastungsweise

Belastung	A Fläche Nr.	B Punkt Nr.	C Punkt-Koordinaten [m] X	D Y	E Z	F Schicht Nr.	G z [mm]	H Seite	I Spannungen [MPa] Symbol	J Vorhanden	K Grenz	L Ausnutzung [-]	M Diagramm in Protokoll
	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0.000	12.923	0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,0}$	6.284	8.885	0.71	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.346	0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	9.261		0.94	☑
	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	τ_R	-0.047	1.346	0.03	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	$int(\tau_d+\tau_{xy})$			0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$int(\sigma_{t/c,90}+\tau_R$			0.03	☐
-	Maximale Spannungen												
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	$\sigma_{b,0}$	-2.977	12.923	0.23	☐
LK1	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0.000	12.923	0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,0}$	6.284	8.885	0.71	☐
LF1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.154	0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	9.261		0.94	☑
LK1	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	τ_R	-0.047	1.346	0.03	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	$int(\tau_d+\tau_{xy})$			0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$int(\sigma_{t/c,90}+\tau_R$			0.03	☐

Max. Ausnutzung belastungsweise Max. Spannungswert belastungsweise Max. Ausnutzung: 0.94 ≤ 1

Bild 5.1: Maske 2.1 *Max Spannung/Ausnutzung belastungsweise*

Unmittelbar nach der Berechnung erscheint die Maske 2.1 *Max. Spannung/Ausnutzung belastungsweise* (siehe Bild 5.1). Diese Maske listet die maximalen Spannungswerte bzw. Ausnutzungsgrade für jeden Lastfall und jede Last- und Ergebniskombination auf, die in Maske 1.1 *Basisangaben*, Register *Tragfähigkeit* zur Bemessung ausgewählt wurden. Die Lastfallnummern werden in den Überschriften der Abschnitte angezeigt.

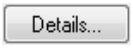
Da in RF-LAMINATE oft Schichtenaufbauten mit unterschiedlichen Materialien bemessen werden, kann es vorkommen, dass die maximale Ausnutzung an einer anderen Stelle als die maximale Spannung ermittelt wird. Aus diesem Grund kann unterhalb der Tabelle gewählt werden, ob die maximalen Ausnutzung oder die maximalen Spannungswerte in der Tabelle angezeigt werden sollen.

Fläche Nr.

Es werden die Nummern der Flächen angegeben, in denen sich die maßgebenden Punkte für die maximalen Spannungswerte bzw. Ausnutzungen befinden.

Punkt Nr.

In diesen FE- bzw. Rasterpunkten wurde die größte Ausnutzung bzw. der maximale Spannungswert ermittelt. Der Spannungstyp wird in Spalte I *Symbol* angegeben. Die FE-Netzpunkte werden automatisch erzeugt. Die Rasterpunkte lassen sich hingegen in RFEM steuern, denn für Flächen benutzerdefinierte Ergebnisraster möglich sind.



Im Dialog *Details*, Register *Ergebnisse* kann festgelegt werden, ob die Ergebnisse in FE- oder Rasterpunkten angezeigt werden sollen (siehe Kapitel 4.1.2, Seite 49).

Punkt-Koordinaten

Die drei Spalten geben die Koordinaten der jeweils maßgebenden FE- oder Rasterpunkte an.

Schicht

In den Spalten F bis H werden die Nummern, die *z*-Koordinaten und die Seiten der Schichten aufgelistet, an denen die Maximalspannungen auftreten.

Spannungen

Symbol und Vorhanden

Diese beiden Spalten geben die Spannungen an, die im Register *Spannungen* des Dialogs *Details* festgelegt sind (siehe Kapitel 4.1.2, Seite 40). Es wird jeweils die Spannungsart mit dem Maximalwert ausgegeben.

Grenz

Die Grenzwerte (Grenzspannungen) basieren auf den Materialien, die in Maske 1.2 *Materialkennwerte* festgelegt wurden.

Werden der Modifikationsbeiwert k_{mod} oder der Teilsicherheitsbeiwert γ_M verwendet, dann werden die Bemessungsspannungswerte (mit Index d) aus den charakteristischen Grenzspannungswerten (mit Index k) berechnet nach

$$\begin{Bmatrix} f_{\text{b,d}} \\ f_{\text{t,d}} \\ f_{\text{c,d}} \\ f_{\text{b,0,d}} \\ f_{\text{t,0,d}} \\ f_{\text{c,0,d}} \\ f_{\text{b,90,d}} \\ f_{\text{t,90,d}} \\ f_{\text{c,90,d}} \\ f_{\text{xy,d}} \\ f_{\text{v,d}} \\ f_{\text{eqv,d}} \\ f_{\text{R,d}} \end{Bmatrix} = \frac{k_{\text{mod}}}{\gamma_M} \begin{Bmatrix} f_{\text{b,k}} \\ f_{\text{t,k}} \\ f_{\text{c,k}} \\ f_{\text{b,0,k}} \\ f_{\text{t,0,k}} \\ f_{\text{c,0,k}} \\ f_{\text{b,90,k}} \\ f_{\text{t,90,k}} \\ f_{\text{c,90,k}} \\ f_{\text{xy,k}} \\ f_{\text{v,k}} \\ f_{\text{eqv,k}} \\ f_{\text{R,k}} \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

Werden der Modifikations- und Teilsicherheitsbeiwerte nicht verwendet, dann gilt $k_{\text{mod}} = 1$ und $\gamma_M = 1$.

Ausnutzung

Max. Ausnutzung: 0.94 ≤ 1

Der Ausnutzungsgrad der Bemessungsspannung und der Grenzspannung wird für jede Spannungskomponente berechnet. Die Ausnutzung der Fläche am FE-Netz- oder Rasterpunkt wird für jede gewählte Spannungsart angegeben. Wird die Grenzspannung nicht überschritten, so ist die Ausnutzung kleiner oder gleich 1 und der Nachweis gilt als erfüllt. Die Werte der Spalte L ermöglichen so eine schnelle Einschätzung der Wirtschaftlichkeit.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Die folgende Tabelle beschreibt die Berechnung der Ausnutzung für die jeweiligen Spannungsarten.

Isotropes Materialmodell

Spannungen [Pa]	Ausnutzung [-]
σ_x	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,x}}{f_{t,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,x}\rvert}{f_{b,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,x} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,x}\rvert}{f_{c,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,x}\rvert}{f_{b,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,x} \leq 0 \end{cases}$
σ_y	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,y}}{f_{t,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,y}\rvert}{f_{b,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,y} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,y}\rvert}{f_{c,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,y}\rvert}{f_{b,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,y} \leq 0 \end{cases}$
σ_1	$= \begin{cases} \frac{\sigma_1}{f_{t,d}} & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_1\rvert}{f_{c,d}} & \text{für } \sigma_1 \leq 0 \end{cases}$
σ_2	$= \begin{cases} \frac{\sigma_2}{f_{t,d}} & \text{für } \sigma_2 > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_2\rvert}{f_{c,d}} & \text{für } \sigma_2 \leq 0 \end{cases}$
σ_v	$\frac{\lvert\sigma_v\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{max}	$\frac{\lvert\tau_{max}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{xz}	$\frac{\lvert\tau_{xz}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{xy}	$\frac{\lvert\tau_{xy}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{yz}	$\frac{\lvert\tau_{yz}\rvert}{f_{v,d}}$

Tabelle 5.2: Ausnutzungen bei isotropem Materialmodell

Orthotropes Materialmodell

Spannungen [Pa]	Ausnutzung [-]	
$\sigma_{b,0}$	$\frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}}$	
$\sigma_{b,90}$	$\frac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}}$	
$\sigma_{t/c,0}$	$=\begin{cases}\frac{\sigma_{t/c,0}}{f_{t,0,d}} & \text{if } \sigma_{t/c,0}>0\\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,0}\rvert}{f_{c,0,d}} & \text{if } \sigma_{t/c,0}\le 0\end{cases}$	
$\sigma_{t/c,90}$	$=\begin{cases}\frac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}>0\\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}\le 0\end{cases}$	
$\sigma_{b+t/c,0}$	$=\begin{cases}\frac{\sigma_{t/c,0}}{f_{t,0,d}}+\frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,0}>0\\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,0}\rvert}{f_{c,0,d}}+\frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,0}\le 0\end{cases}$	Nach: DIN 1052, (127), (128) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.130), (NA.131) ČSN 73 1702, (127), (128)
$\sigma_{b+t/c,90}$	$=\begin{cases}\frac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}}+\frac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}>0\\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}}+\frac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}\le 0\end{cases}$	
τ_{xy}	$\frac{\lvert\tau_{xy}\rvert}{f_{xy,d}}$	
τ_R	$\frac{\lvert\tau_R\rvert}{f_{R,d}}$	
$\text{int}\left(\tau_d+\tau_{xy}\right)$	$\frac{\tau_d^2}{f_{v,d}^2}+\frac{\tau_{xy}^2}{f_{xy,d}^2},\quad \tau_d=\tau_{xz}\cos\beta+\tau_{yz}\sin\beta$	Nach: DIN 1052, (129) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.132) ČSN 73 1702, (129)
$\text{int}\left(\sigma_{t/c,90}+\tau_R\right)$	$=\begin{cases}\frac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}}+\frac{\lvert\tau_R\rvert}{f_{R,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}>0\\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}}+\frac{\lvert\tau_R\rvert}{f_{R,d}} & \text{für } \sigma_{t/c,90}\le 0\end{cases}$	Nach: DIN 1052, (130), (131) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.133), (NA.134) ČSN 73 1702, (130), (131)

Tabelle 5.3: Ausnutzungen bei orthotropem Materialmodell

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Die Spannungen $\sigma_{\text{b+t/c,0}}$, $\sigma_{\text{b+t/c,90}}$, τ_{d}, τ_{R} sind im Koordinatensystem der Faser x', y', z definiert und werden gemäß den folgenden Transformationsformeln ermittelt:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\text{b+t/c,0}} \\ \sigma_{\text{b+t/c,90}} \\ * \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{3\times3}^{-\mathrm{T}}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{\text{d}} \\ \tau_{\text{R}} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{2\times2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

oder, gleichwertig, nach der Nicht-Matrix-Form:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{b+t/c,0}} &= \mathrm{c}^2 \sigma_x + \mathrm{s}^2 \sigma_y + 2\mathrm{cs}\tau_{xy} \\ \sigma_{\text{b+t/c,90}} &= \mathrm{s}^2 \sigma_x + \mathrm{c}^2 \sigma_y - 2\mathrm{cs}\tau_{xy} \\ \tau_{\text{d}} &= \mathrm{c}\tau_{xz} + \mathrm{s}\tau_{yz} \\ \tau_{\text{R}} &= -\mathrm{s}\tau_{xz} + \mathrm{c}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{5.3}$$

mit $s = \sin\beta$, $c = \cos\beta$ und β Rotationswinkel der berücksichtigten Schicht.

5.2 Max. Spannung/Ausnutzung flächenweise

2.2 Max. Ausnutzung flächenweise

Fläche Nr.	A Punkt Nr.	B Punkt-Koordinaten [m] X	C Y	D Z	E Belastung	F Schicht Nr.	G z [mm]	H Seite	I Spannungen [MPa] Symbol	J Vorhanden	K Grenz	L Ausnutzung [-]	M Diagramm in Protokoll
1	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	1	45.0	Unten	$\sigma_{b,0}$	-2.977	12.923	0.23	☐
	3	10.00000	1.00000	0.00000	LK1	2	45.0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0.000	12.923	0.00	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,0}$	6.284	8.885	0.71	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LF1	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.154	0.00	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	1	0.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	9.261		0.94	☐
	3	10.00000	1.00000	0.00000	LK1	2	45.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	2	45.0	Oben	τ_R	-0.047	1.346	0.03	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	1	45.0	Unten	int($\tau_d+\tau_{xy}$)			0.00	☐
	1	0.00000	0.00000	0.00000	LK1	2	45.0	Oben	int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$)			0.03	☐

Max. Ausnutzung flächenweise Max. Spannungswert flächenweise Max. Ausnutzung: 0.94 ≤ 1

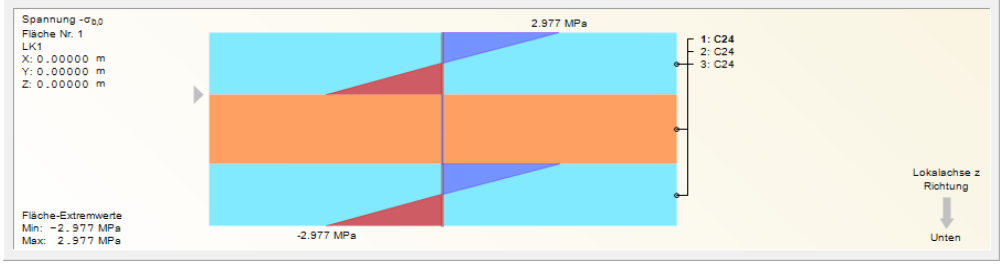


Bild 5.2: Maske 2.2 *Max Spannung/Ausnutzung flächenweise*

In dieser Ergebnismaske sind die maximalen Spannungen/Ausnutzungen aufgelistet, die für jede der bemessenen Flächen vorliegen.

Die einzelnen Spalten sind in Kapitel 5.1 auf Seite 55 beschrieben.

5.3 Spannungen punktweise

2.3 Spannungen punktweise

Punkt Nr.	A Fläche Nr.	B Schichte Nr.	C Punkt-Koordinaten [m] X	D Y	E Z	F Belastung	G Schicht Nr.	H z [mm]	I Seite	J Spannungen [MPa] Symbol	K Vorhanden	L Grenz	M Ausnutzung [-]	N Diagramm in Protokoll
1		1	0.00000	0.00000	0.00000	LF1	1	0.0	Oben	$\sigma_{b,0}$	0.773	11.077	0.07	☑
										$\sigma_{b,90}$	0.000	11.077	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,0}$	1.632	7.615	0.21	☐
										$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.154	0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,0}$	2.405		0.28	☐
										$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
										int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$)			0.00	☐
								22.5	Mittel	τ_R	0.000	1.154	0.00	☐
										int($\tau_d+\tau_{xy}$)			0.00	☐
								45.0	Unten	$\sigma_{b,0}$	-0.773	11.077	0.07	☑
										$\sigma_{b,90}$	0.000	11.077	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,0}$	1.632	7.615	0.21	☐
										$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.154	0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,0}$	0.859		0.28	☐
										$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
										int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$)			0.00	☐
							2	45.0	Oben	$\sigma_{b,0}$	0.000	11.077	0.00	☑

Schichtenaufbau Nr.: Alles Fläche Nr.: Alles Punkt Nr.: Alles Belastung: Alles Max. Ausnutzung: 0.94 ≤ 1

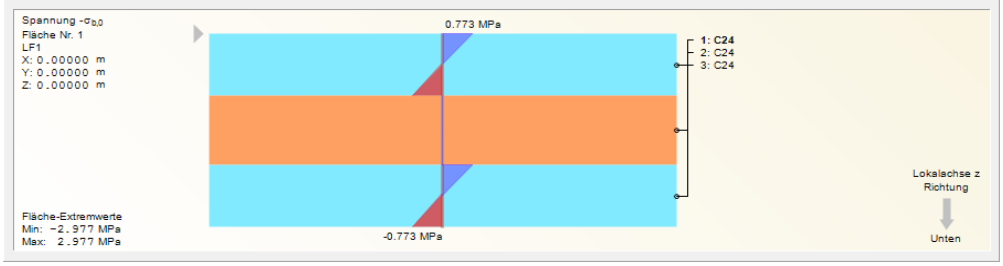
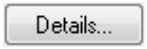


Bild 5.3: Maske 2.3 *Spannungen punktweise*

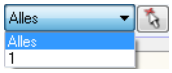
Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH



Es werden die Spannungen und Ausnutzungen für jeden FE-Netz- bzw. Rasterpunkt angegeben, der sich in den bemessenen Flächen befindet. Der Dialog *Details*, Register *Ergebnisse* (siehe Kapitel 4.1.2, Seite 49) steuert, ob die Ergebnisse von FE-Netzknoten oder Rasterpunkten angezeigt werden.

Im Dialog *Details*, Register *Spannungen* kann zudem festgelegt werden, welche Spannungskomponenten in der Tabelle erscheinen.

Die einzelnen Spalten sind im Kapitel 5.1, Seite 55 beschrieben.



Für eine bessere Übersicht kann die Tabelle nach Schichtenaufbau, Punkt- und Flächennummern sowie nach Belastungen gefiltert werden. Die Listen am unteren Ende der Spalten ermöglichen die Auswahl nach Objektnummern. Punkte und Flächen lassen sich über die Schaltfläche [↖] auch grafisch im RFEM-Arbeitsfenster festlegen.

5.4 Max. Verschiebungen

3.1 Max Verschiebungen

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Fläche Nr.	Punkt Nr.	Punkt-Koordinaten [m] X	Y	Z	Belastung	Kombinations-typ	Verschiebungen [m] u_z	Grenz u_z	Ausnutzung u_z [-]
1	305	10.00000	0.80000	0.00000	LF1	HÄ	0.099	0.100	0.99
	Maximale Verschiebung / Maximale Ausnutzung								
1	305	10.00000	0.80000	0.00000	LF1	HÄ	0.099	0.100	0.99
	305	10.00000	0.80000	0.00000	LF1	HÄ	0.099	0.100	0.99

Max. Ausnutzung: 0.99 ≤ 1

Bild 5.4: Maske 3.1 *Max. Verschiebungen*

Die Verformungsnachweise werden nur geführt, wenn in Maske 1.1 *Basisangaben*, Register *Gebrauchstauglichkeit* (siehe Kapitel 3.1.2, Seite 28) mindestens ein Lastfall für den Nachweis ausgewählt wurde. Maske 3.1 gibt die maximalen Verschiebungen aus, die in den Lastfällen oder Kombinationen für Gebrauchstauglichkeit vorliegen und vergleicht sie mit den zulässigen Verformungen.

Die Tabelle ist nach Flächennummern geordnet.

Kombinationstyp

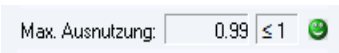
Die Spalte zeigt die in Maske 1.1 *Basisangaben*, Register *Gebrauchstauglichkeit* zugewiesenen Einwirkungskombinationen: *Charakteristisch* (CH), *Häufig* (HÄ) oder *Quasi-ständig* (QS).

Verschiebungen

In der Spalte u_z werden die für den Verformungsnachweis maßgebenden Verschiebungen in Richtung der lokalen Flächenachse z angezeigt. Die Achsen der Flächen können im *Zeigen*-Navigator von RFEM oder über das Flächen-Kontextmenü eingeblendet werden.

Die Werte in Spalte I geben die Grenzverformungen in Richtung der z-Achse jeder Fläche an. Sie ermitteln sich aus den Bezugslängen L, die in Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter* festgelegt wurden (siehe Kapitel 3.5, Seite 39), sowie den *Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerten* im Dialog *Norm* (siehe Kapitel 4.2.2 Seite 52).

Ausnutzung



In dieser Spalte werden die Quotienten aus vorhandener Verschiebung u_z (Spalte G) zu Grenzverschiebung (Spalte H) angegeben. Werden die Grenzverschiebungen eingehalten, so ist die Ausnutzung kleiner oder gleich 1 und der Gebrauchstauglichkeitsnachweis gilt als erfüllt.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

5.5 Stückliste

4.1 Stückliste

Fläche Nr.	A Material Bezeichnung	B Dicke t [mm]	C Anzahl Schichten	D Fläche [m²]	E Oberfläche [m²]	F Volumen [m³]	G Gewicht [t]
1	C24	45.0	2	10.000	20.000	0.900	0.450
	C24	50.0	1	10.000	0.000	0.500	0.250
Σ		140.0	3	10.000	20.000	1.400	0.700
Σ Gesamt				10.000	20.000	1.400	0.700

Bild 5.5: Maske 4.1 *Stückliste*

Abschießend erscheint eine Bilanz der behandelten Flächen. In der Liste sind per Voreinstellung nur die bemessenen Flächen erfasst. Wenn eine Stückliste für alle Flächen des Modells benötigt wird, so kann dies im Dialog *Details*, Register *Ergebnisse* eingestellt werden (siehe Kapitel 4.1.2, Seite 49).

Fläche Nr.

Diese Spalte enthält die Nummern der einzelnen Flächen.

Materialbezeichnung

Die Auflistung erfolgt nach Materialien geordnet.

Dicke

In Spalte B wird die Dicke *t* der Schichten angezeigt. Hier finden sich die Eingabedaten der Maske 1.2 *Schichten.*

Anzahl Schichten

Diese Spalte gibt an, wie viele Schichten jeweils mit gleichem Material und gleicher Dicke vorliegen.

Fläche

Diese Spalte gibt Aufschluss über die Flächeninhalte der einzelnen Schichten.

Oberfläche

Die Oberfläche ermittelt sich aus den Flächeninhalten der Ober- und Unterseiten einer Fläche. Die Seitenflächen der dünnwandigen Flächen werden vernachlässigt.

Volumen

Das Volumen berechnet sich als das Produkt von Dicke und Flächeninhalt.

Gewicht

In der letzten Spalte wird die Masse jeder Schicht angezeigt. Dieser Eintrag ermittelt sich als Produkt von Volumen und spezifischem Gewicht des verwendeten Materials.

Σ Gesamt

In der letzten Zeile wird jeweils die Summe der einzelnen Spalten angegeben.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

6. Ausdruck

6.1 Ausdruckprotokoll

Für die Daten des Moduls RF-LAMINATE wird – wie in RFEM – ein Ausdruckprotokoll generiert, das mit Grafiken und Erläuterungen ergänzt werden kann. Die Selektion im Ausdruckprotokoll steuert, welche Daten des Bemessungsmoduls schließlich im Ausdruck erscheinen.

Das Ausdruckprotokoll ist im RFEM-Handbuch beschrieben. Das Kapitel 10.1.3.4 *Selektion der Zusatzmodul-Daten* erläutert, wie die Ein- und Ausgabedaten von Zusatzmodulen für den Ausdruck aufbereitet werden können.

Im Ausdruckprotokoll werden nur die Spannungstypen ausgewiesen, die in den RF-LAMINATE-Ergebnismasken zu sehen sind. Um daher z. B. die maximalen Schubspannungen zu drucken, sind in RF-LAMINATE die Spannungen τ_{max} für die Anzeige zu aktivieren. Die Auswahl der Spannungen ist im Kapitel 4.1.1 auf Seite 35 beschrieben.

Bei großen Systemen mit vielen Bemessungsfällen trägt die Aufteilung der Daten in mehrere Ausdruckprotokolle zur Übersichtlichkeit bei.

6.2 Grafikausdruck

6.2.1 Ergebnisse am RFEM-Modell

In RFEM kann jedes Bild, das im Arbeitsfenster angezeigt wird, in das Ausdruckprotokoll übergeben oder direkt zum Drucker geleitet werden. Somit lassen sich auch die am RFEM-Modell gezeigten Spannungen und Ausnutzungen sowie Schnitte für den Ausdruck aufbereiten.

Das Drucken von Grafiken ist im Kapitel 10.2 des RFEM-Handbuchs beschrieben.

Die aktuelle Grafik der RF-LAMINATE-Ergebnisse kann gedruckt werden über das Menü

Datei → Grafik drucken

oder die entsprechende Schaltfläche in der Symbolleiste.

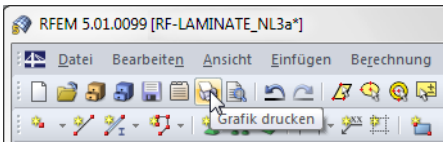


Bild 6.1: Schaltfläche *Grafik drucken* in der Symbolleiste des Hauptfensters

Es erscheint der auf folgender Seite dargestellte Dialog.

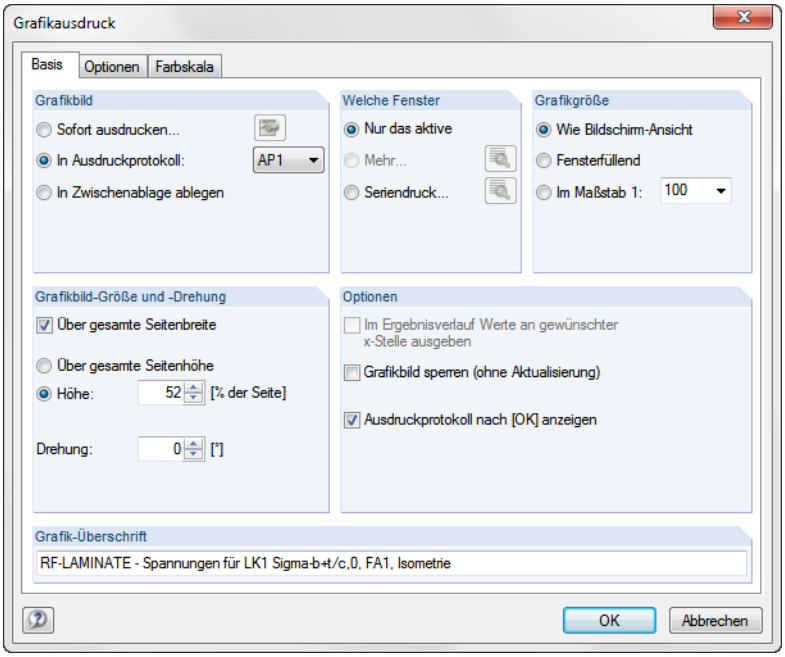
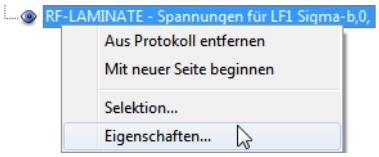


Bild 6.2: Dialog *Grafikausdruck*, Register *Basis*

Dieser Dialog wird ausführlich im RFEM-Handbuch, Kapitel 10.2 *Direkter Grafikausdruck* beschrieben. Dort sind auch die übrigen Register *Optionen* und *Farbskala* erläutert.

Eine Grafik kann im Ausdruckprotokoll wie gewohnt per Drag-and-Drop an eine andere Stelle geschoben werden.



Um eine Grafik nachträglich im Ausdruckprotokoll anzupassen, führen Sie einen Rechtsklick auf den entsprechenden Eintrag im Protokoll-Navigator aus. Die Option *Grafikausdruck* im Kontextmenü ruft wieder den Dialog *Grafikausdruck* auf, in dem Sie die Anpassungen vornehmen können.

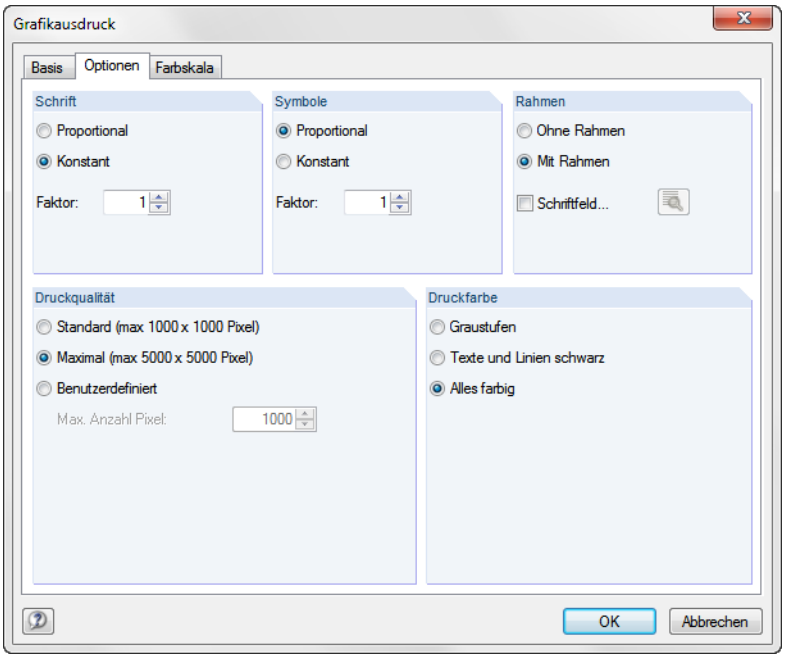


Bild 6.3: Dialog *Grafikausdruck* , Register *Optionen*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

6.2.2 Ergebnisse in Schichten

In den Ergebnismasken 2.1 bis 2.3 wird der Spannungsverlauf in den Schichten dargestellt. Die Spannungsgrafiken lassen sich über die Kontrollfelder in den Spalten M bzw. N *Diagramm in Protokoll* in das Ausdruckprotokoll übergeben. Bild 6.4 zeigt, dass die Spannungsgrafik für $\sigma_{b+t/c,0}$ in Punkt [0.0, 0.0, 0.0] im Ausdruckprotokoll angezeigt werden wird.

2.1 Max. Ausnutzung belastungsweise

Belastung	A Fläche Nr.	B Punkt Nr.	C Punkt-Koordinaten [m] X	D Y	E Z	F Schicht Nr.	G z [mm]	H Seite	I Spannungen [MPa] Symbol	J Vorhanden	K Grenz	L Ausnutzung [-]	M Diagramm in Protokoll
	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0.000	12.923	0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,0}$	6.284	8.885	0.71	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.346	0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	9.261		0.94	☑
	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	τ_R	-0.047	1.346	0.03	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	int($\tau_d+\tau_{xy}$)			0.00	☐
	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$)			0.03	☐
-	Maximale Spannungen												
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	$\sigma_{b,0}$	-2.977	12.923	0.23	☐
LK1	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0.000	12.923	0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,0}$	6.284	8.885	0.71	☐
LF1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{t/c,90}$	0.000	1.154	0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	0.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	9.261		0.94	☑
LK1	1	3	10.00000	1.00000	0.00000	2	45.0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.000		0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	τ_R	-0.047	1.346	0.03	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	1	45.0	Unten	int($\tau_d+\tau_{xy}$)			0.00	☐
LK1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	2	45.0	Oben	int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$)			0.03	☐

Max. Ausnutzung belastungsweise | Max. Spannungswert belastungsweise | Max. Ausnutzung: 0.94 ≤ 1

Bild 6.4: Maske 2.1 *Max Spannung/Ausnutzung belastungsweise*

Im Ausdruckprotokoll erscheinen die Grafiken dann im Abschnitt 4.2 *Spannungsverläufe*.

Dlubal Software GmbH
Am Zellweg 2, 93464
+49 9673 9203-0 www.dlubal.de

Seite: 6/6
Blatt: 1
RF-LAMINATE

Projekt: | Modell: RF-LAMINATE_NL3a | Datum: 26.08.2013

4.1 STÜCKLISTE (CONVERTED)

Position Nr.	Materialbezeichnung	Dicke t [mm]	Anzahl Schichten	Fläche [m²]	Oberfläche [m²]	Volumen [m³]	Gewicht [t]
1	C24	45.0	2	10.000	20.000	0.900	0.450
	C24	50.0	1	10.000	0.000	0.500	0.250
Σ		140.0	3	10.000	20.000	1.400	0.700
Σ Gesamt				10.000	20.000	1.400	0.700

4.2 SPANNUNGSVERLÄUFE

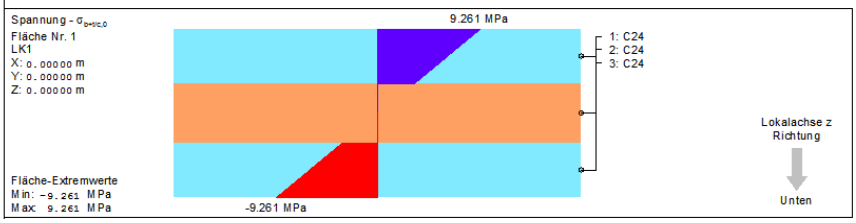


Bild 6.5: Spannungsverlauf im Ausdruckprotokoll

7. Allgemeine Funktionen

Dieses Kapitel beschreibt nützliche Menüfunktionen und stellt Exportmöglichkeiten für die Nachweise vor.

7.1 Einheiten und Dezimalstellen

Einheiten und Dezimalstellen werden für RFEM und sämtliche Zusatzmodule zentral in einem Dialog verwaltet. In RF-LAMINATE ist der Dialog zum Anpassen der Einheiten zugänglich über Menü

Einstellungen → **Einheiten und Dezimalstellen**.

Es erscheint der aus RFEM bekannte Dialog. In der Liste *Programm/Modul* ist RF-LAMINATE voreingestellt.

Im Bild 7.1 sind einige Einheiten mit einem roten Dreieck markiert. Der Dialog wurde aus Maske 1.2 *Materialkennwerte* aufgerufen. Anhand der Markierungen lassen sich die relevanten Einheiten dieser Maske leichter finden.

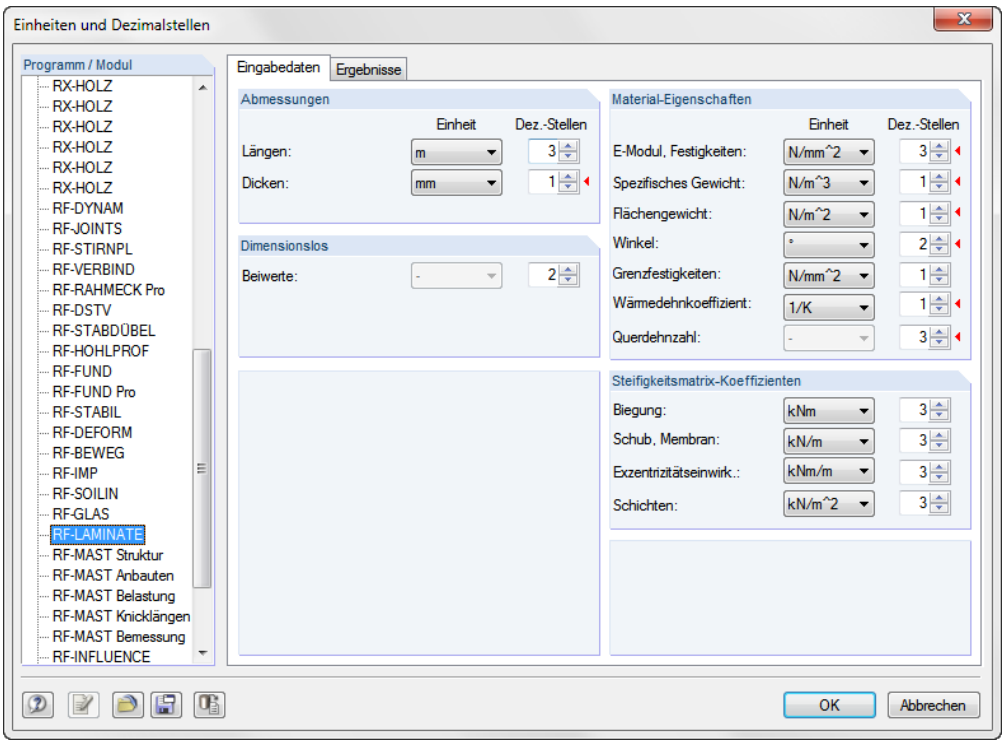


Bild 7.1: Dialog *Einheiten und Dezimalstellen*

Die Einstellungen können als Benutzerprofil gespeichert und in anderen Modellen wiederverwendet werden. Diese Funktionen sind in Kapitel 11.1.3 *Einheiten und Dezimalstellen* des RFEM-Handbuchs beschrieben.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

7.2 Export der Ergebnisse

Die Ergebnisse von RF-LAMINATE lassen sich auch in andere Programme exportieren.

Zwischenablage

Markierte Zellen der Ergebnismasken können mit [Strg]+[C] in die Zwischenablage kopiert und dann mit [Strg]+[V] z. B. in ein Textverarbeitungsprogramm eingefügt werden. Die Überschriften der Tabellenspalten bleiben dabei unberücksichtigt.

Ausdruckprotokoll

Die Daten von RF-LAMINATE können in das Ausdruckprotokoll gedruckt (siehe Kapitel 6.1, Seite 65) und dort exportiert werden über Menü

Datei → **Export in RTF**.

Diese Funktion ist im Kapitel 10.1.11 *Ausdruckprotokoll exportieren* des RFEM-Handbuchs beschrieben.

Excel / OpenOffice

RF-LAMINATE ermöglicht den direkten Datenexport zu MS Excel, OpenOffice.org Calc oder in das CSV-Format.

Diese Funktion wird aufgerufen über das RF-LAMINATE-Menü

Datei → **Tabellen exportieren**.

Es öffnet sich folgender Exportdialog:

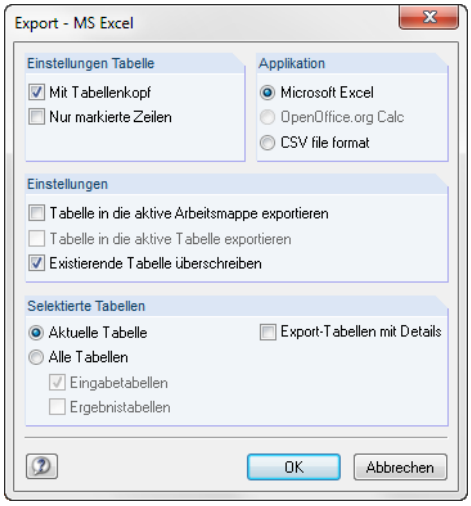
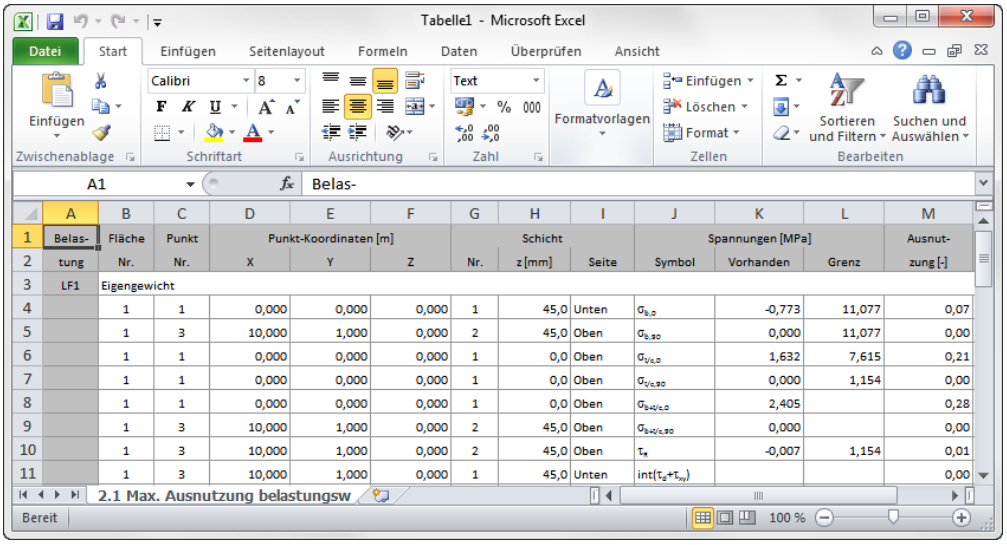


Bild 7.2: Dialog *Export - MS Excel*

Wenn die Auswahl feststeht, kann der Export mit [OK] gestartet werden. Excel bzw. OpenOffice werden automatisch gestartet, d. h. die Programme brauchen nicht zuvor geöffnet werden



Belas-tung	Fläche Nr.	Punkt Nr.	Punkt-Koordinaten [m] X	Y	Z	Schicht Nr.	z [mm]	Seite	Spannungen [MPa] Symbol	Vorhanden	Grenz	Ausnutzung [-]
LF1	Eigengewicht											
	1	1	0,000	0,000	0,000	1	45,0	Unten	$\sigma_{b,0}$	-0,773	11,077	0,07
	1	3	10,000	1,000	0,000	2	45,0	Oben	$\sigma_{b,90}$	0,000	11,077	0,00
	1	1	0,000	0,000	0,000	1	0,0	Oben	$\sigma_{1/c,0}$	1,632	7,615	0,21
	1	1	0,000	0,000	0,000	1	0,0	Oben	$\sigma_{1/c,90}$	0,000	1,154	0,00
	1	1	0,000	0,000	0,000	1	0,0	Oben	$\sigma_{b+t/c,0}$	2,405		0,28
	1	3	10,000	1,000	0,000	2	45,0	Oben	$\sigma_{b+t/c,90}$	0,000		0,00
	1	3	10,000	1,000	0,000	2	45,0	Oben	τ_*	-0,007	1,154	0,01
	1	3	10,000	1,000	0,000	1	45,0	Unten	$int(\tau_d+\tau_{xy})$			0,00

Bild 7.3: Ergebnisse in Excel: Tabelle 2.1 Max. Spannung/Ausnutzung belastungsweise

8. Beispiele

In diesem Kapitel werden verschiedene Beispiele vorgestellt.

8.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrixglieder

Es wird eine Platte untersucht, die aus drei Schichten besteht (siehe Bild 8.1) und die folgenden Materialkennwerte aufweist (siehe Bild 8.2).

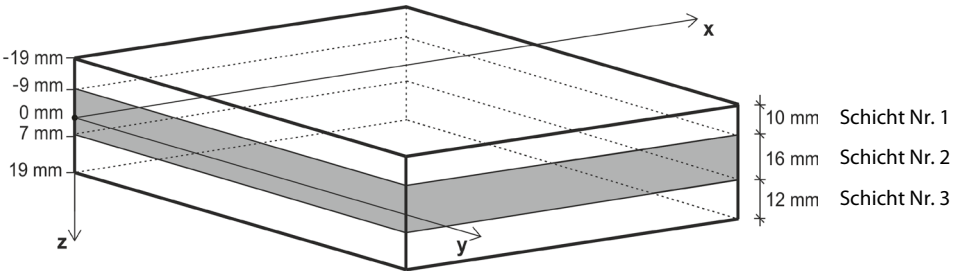


Bild 8.1: Schichtenaufbau

Schichten

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Schicht Nr.	Material-Bezeichnung	Dicke t [mm]	Orthotropie-richtung β [°]	Elastizitätsmodul [N/mm²] E_x	E_y	Schubmodul [N/mm²] G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}	Querdehnzahl [-] ν_{xy}	ν_{yx}	Spez. Gewicht γ [N/m³]
1	Pappel und Nadelholz C16	10.0	0.00	8000.000	270.000	500.000	50.000	500.000	0.200	0.007	3700.0
2	Pappel und Nadelholz C14	16.0	90.00	7000.000	230.000	440.000	44.000	440.000	0.200	0.007	5000.0
3	Pappel und Nadelholz C16	12.0	0.00	8000.000	270.000	500.000	50.000	500.000	0.200	0.007	3700.0

Bild 8.2: Tabelle 1.2 *Materialkennwerte*

Zunächst werden die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Schichten berechnet.

$$\mathbf{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{i;11} & d'_{i;12} & 0 \\ & d'_{i;22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{i;33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{i;x}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & \dfrac{\nu_{i;xy} E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ & \dfrac{E_{i;y}}{1-\nu_{i;xy}^2 \dfrac{E_{i;y}}{E_{i;x}}} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{i;xy} \end{bmatrix} \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.1}$$

$$\mathbf{d}'_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{8000}{1-0.2^2 \dfrac{270}{8000}} & \dfrac{0.2 \cdot 270}{1-0.2^2 \dfrac{270}{8000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0.2^2 \dfrac{270}{8000}} & 0 \\ \text{sym.} & & 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

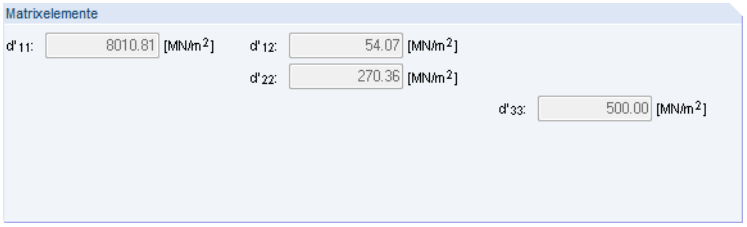


Bild 8.3: Steifigkeitsmatrix Schicht Nr. 1

$$\mathbf{d}_2' = \begin{bmatrix} \dfrac{7000}{1-0.2^2\dfrac{230}{7000}} & \dfrac{0.2\cdot 230}{1-0.2^2\dfrac{270}{7000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0.2^2\dfrac{230}{7000}} & 0 \\ \text{sym.} & & 440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7009.21 & 46.06 & 0 \\ 46.06 & 230.30 & 0 \\ 0 & 0 & 440.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

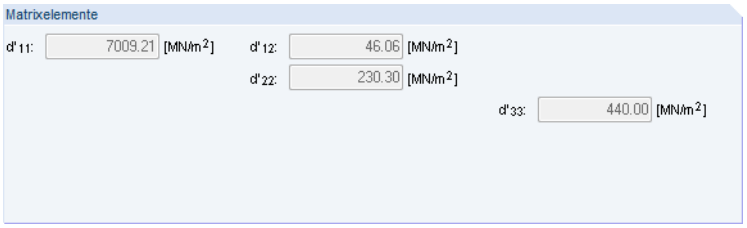


Bild 8.4: Steifigkeitsmatrix Schicht Nr. 2

$$\mathbf{d}_3' = \begin{bmatrix} \dfrac{8000}{1-0.2^2\dfrac{270}{8000}} & \dfrac{0.2\cdot 270}{1-0.2^2\dfrac{270}{8000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0.2^2\dfrac{270}{8000}} & 0 \\ \text{sym.} & & 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

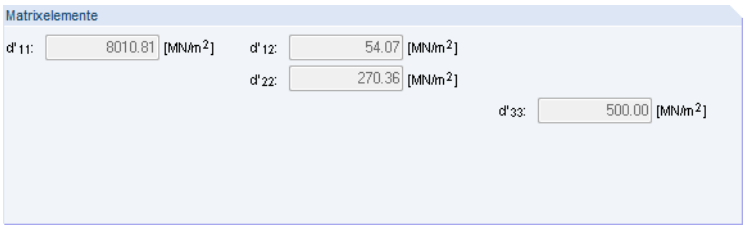
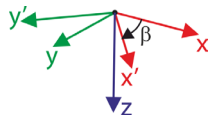


Bild 8.5: Steifigkeitsmatrix Schicht Nr. 3

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH



Nun werden die Schichten rotiert und damit auf ein Koordinatensystem transformiert x, y (lokales Koordinatensystem der Fläche). Die Schichten Nr. 1 und 3 haben die Orthotropierichtung $\beta = 0°$, deshalb gilt

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}'_1 = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}'_3 = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

Da Schicht Nr. 2 um den Winkel $\beta = 90°$ gedreht wird, ist es notwendig, die Steifigkeitsmatrix der Schicht Nr. 2 auf das Koordinatensystem x, y zu transformieren.

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_{i;11} & d_{i;12} & d_{i;13} \\ & d_{i;22} & d_{i;23} \\ \text{sym.} & & d_{i;33} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{3\times3;i}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{d}'_i \mathbf{T}_{3\times3;i} \tag{8.2}$$

mit

$$\mathbf{T}_{3\times3;i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i) \tag{8.3}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu

$$d_{i;11} = c^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + s^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33}$$

$$d_{i;12} = c^2 s^2 d'_{i;11} + s^4 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} - 4c^2 s^2 d'_{i;33}$$

$$d_{i;13} = c^3 s d'_{i;11} + c s^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;12} - c s^3 d'_{i;22} - 2c^3 s d'_{i;33} + 2c s^3 d'_{i;33}$$

$$d_{i;22} = s^4 d'_{i;11} + 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^4 d'_{i;22} + 4c^2 s^2 d'_{i;33}$$

$$d_{i;23} = c s^3 d'_{i;11} + c^3 s d'_{i;12} - c s^3 d'_{i;12} - c^3 s d'_{i;22} + 2c^3 s d'_{i;33} - 2c s^3 d'_{i;33}$$

$$d_{i;33} = c^2 s^2 d'_{i;11} - 2c^2 s^2 d'_{i;12} + c^2 s^2 d'_{i;22} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{i;33}$$

$$c = \cos 90° = 0,\ s = \sin 90° = 1$$

$$d_{2;11} = 0^4 \cdot 7009.21 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 46.06 + 1^4 \cdot 230.30 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 230.30 \text{ MN/m}^2$$

$$d_{2;12} = 0^2 \cdot 1^2 \cdot 7009.21 + 1^4 \cdot 46.06 + 0^4 \cdot 46.06 + 0^2 \cdot 1^2 \cdot 230.30 - 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 46.06 \text{ MN/m}^2$$

$$d_{2;13} = 0^3 \cdot 1 \cdot 7009.21 + 0 \cdot 1^3 \cdot 46.06 - 0^3 \cdot 1 \cdot 46.06 - 0 \cdot 1^3 \cdot 230.30 - 2 \cdot 0^3 \cdot 1 \cdot 440 + 2 \cdot 0 \cdot 1^3 \cdot 440 =$$
$$= 0 \text{ MN/m}^2$$

$$d_{2;22} = 1^4 \cdot 7009.21 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 46.06 + 0^4 \cdot 230.30 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 7009.21 \text{ MN/m}^2$$

$$d_{2;23} = 0 \cdot 1^3 \cdot 7009.21 + 0^3 \cdot 1 \cdot 46.06 - 0 \cdot 1^3 \cdot 46.06 - 0^3 \cdot 1 \cdot 230.30 + 2 \cdot 0^3 \cdot 1 \cdot 440 - 2 \cdot 0 \cdot 1^3 \cdot 440 =$$
$$= 0 \text{ MN/m}^2$$

$$d_{2;33} = 0^2 \cdot 1^2 \cdot 7009.21 - 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 46.06 + 0^2 \cdot 1^2 \cdot 230.30 + \left(0^2 - 1^2\right)^2 440 = 440.00 \text{ MN/m}^2$$

Die ebene Gesamtsteifigkeitsmatrix der Schicht Nr. 2 ergibt sich dann wie folgt:

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 230.30 & 46.06 & 0 \\ 46.06 & 7009.21 & 0 \\ 0 & 0 & 440.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

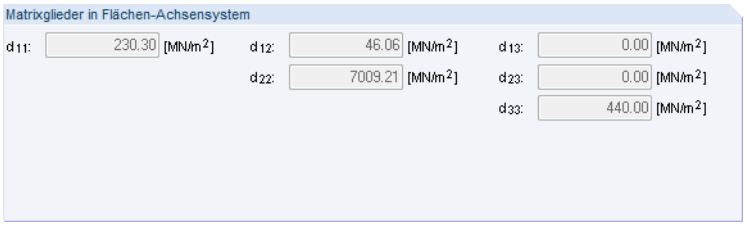


Bild 8.6: Steifigkeitsmatrix Schicht Nr. 2

8.1.1 Berücksichtigung des Schubverbunds zwischen den Schichten

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix nimmt folgende Form an:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sym.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sym.} & \text{sym.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Biege- und Drillsteifigkeitsglieder

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;11} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;12} \qquad D_{13} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;13}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;22} \qquad D_{23} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;23}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i;\max}^3 - z_{i;\min}^3}{3} d_{i;33}$$

$$D_{11} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3 - (-19\cdot10^{-3})^3}{3} 8010.81\cdot10^3 + \frac{(7\cdot10^{-3})^3 - (-9\cdot10^{-3})^3}{3} 230.30\cdot10^3 + \\ + \frac{(19\cdot10^{-3})^3 - (7\cdot10^{-3})^3}{3} 8010.81\cdot10^3 = 33.85 \text{ kNm}$$

$$D_{12} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3 - (-19\cdot10^{-3})^3}{3} 54.07\cdot10^3 + \frac{(7\cdot10^{-3})^3 - (-9\cdot10^{-3})^3}{3} 46.06\cdot10^3 + \\ + \frac{(19\cdot10^{-3})^3 - (7\cdot10^{-3})^3}{3} 54.07\cdot10^3 = 0.24 \text{ kNm}$$

$$D_{13} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3 - (-19\cdot10^{-3})^3}{3} 0\cdot10^3 + \frac{(7\cdot10^{-3})^3 - (-9\cdot10^{-3})^3}{3} 0\cdot10^3 + \\ + \frac{(19\cdot10^{-3})^3 - (7\cdot10^{-3})^3}{3} 0\cdot10^3 = 0 \text{ kNm}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

$$D_{22} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3-(-19\cdot10^{-3})^3}{3}270.36\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^3-(-9\cdot10^{-3})^3}{3}7009.21\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^3-(7\cdot10^{-3})^3}{3}270.36\cdot10^3 = 3.64\text{ kNm}$$

$$D_{23} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3-(-19\cdot10^{-3})^3}{3}0\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^3-(-9\cdot10^{-3})^3}{3}0\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^3-(7\cdot10^{-3})^3}{3}0\cdot10^3 = 0\text{ kNm}$$

$$D_{33} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^3-(-19\cdot10^{-3})^3}{3}500\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^3-(-9\cdot10^{-3})^3}{3}440.00\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^3-(7\cdot10^{-3})^3}{3}500\cdot10^3 = 2.26\text{ kNm}$$

Exzentrizitätsglieder

$$D_{16} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;11} \qquad D_{17} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;12} \qquad D_{18} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;13}$$

$$D_{27} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;22} \qquad D_{28} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;23}$$

$$D_{38} = \sum_{i=1}^{n}\frac{z_{i;\max}^2-z_{i;\min}^2}{2}d_{i;33}$$

$$D_{16} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}8010.81\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}230.30\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}8010.81\cdot10^3 = 124.49\text{ kNm/m}$$

$$D_{17} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}54.07\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}46.06\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}54.07\cdot10^3 = 0.13\text{ kNm/m}$$

$$D_{18} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3 = 0\text{ kNm/m}$$

$$D_{27} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}270.36\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}7009.21\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}270.36\cdot10^3 = -107.82\text{ kNm/m}$$

$$D_{28} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}0\cdot10^3 = 0\text{ kNm/m}$$

$$D_{38} = \frac{(-9\cdot10^{-3})^2-(-19\cdot10^{-3})^2}{2}500\cdot10^3+\frac{(7\cdot10^{-3})^2-(-9\cdot10^{-3})^2}{2}440.00\cdot10^3+$$
$$+\frac{(19\cdot10^{-3})^2-(7\cdot10^{-3})^2}{2}500\cdot10^3 = 0.96\text{ kNm/m}$$

Membranglieder

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;11} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;12} \qquad D_{68} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;13}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;22} \qquad D_{78} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;23}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;33}$$

$$D_{66} = 10\cdot10^{-3}\cdot8010.81\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot230.30\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot8010.81\cdot10^{3} = 179923\ \text{N/m}$$

$$D_{67} = 10\cdot10^{-3}\cdot54.07\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot46.06\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot54.07\cdot10^{3} = 1927\ \text{N/m}$$

$$D_{68} = 10\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} = 0\ \text{N/m}$$

$$D_{77} = 10\cdot10^{-3}\cdot270.36\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot7009.21\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot270.36\cdot10^{3} = 118095\ \text{N/m}$$

$$D_{78} = 10\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot0\cdot10^{3} = 0\ \text{N/m}$$

$$D_{88} = 10\cdot10^{-3}\cdot500\cdot10^{3} + 16\cdot10^{-3}\cdot440\cdot10^{3} + 12\cdot10^{-3}\cdot500\cdot10^{3} = 18040\ \text{N/m}$$

Schubglieder

Wie in Kapitel 2.3 erwähnt, wird hier der Berechnungsablauf für Schubelemente der Steifigkeitsmatrix nicht näher erläutert. An dieser Stelle sei lediglich folgende Bedingung aufgeführt:

$$D_{44,\text{calc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G_{11}(z)} \left(\frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{z} d_{11}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,x})\,\mathrm{d}\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,x})^2\,\mathrm{d}\bar{z}} \right)^2 \mathrm{d}z}, \quad z_{0,x} = \frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})\bar{z}\,\mathrm{d}\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z}} \tag{8.5}$$

$$D_{44,calc} = 2128.07\ \text{kN/m}$$

$$D_{55,\text{calc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G_{22}(z)} \left(\frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{z} d_{22}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,y})\,\mathrm{d}\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{22}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,y})^2\,\mathrm{d}\bar{z}} \right)^2 \mathrm{d}z}, \quad z_{0,y} = \frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{22}(\bar{z})\bar{z}\,\mathrm{d}\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} d_{22}(\bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z}} \tag{8.6}$$

$$D_{55,calc} = 7085.28\ \text{kN/m}$$

$$D_{44} = \max\left(D_{44,\text{calc}},\ \frac{48}{5l^2} \frac{1}{\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{x,i} \frac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{x,i} \frac{z_{\max,i}^3 - z_{\min,i}^3}{3}}} \right) \tag{8.7}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

$$D_{55} = \max\left(D_{55,\text{calc}}, \frac{48}{5l^2} \frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{y,i} \dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{y,i} \dfrac{z_{\max,i}^3 - z_{\min,i}^3}{3}}} \right) \tag{8.8}$$

l beschreibt die mittlere Länge der jeweiligen Fläche.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x,i} &= c_i^4 E_{x,i} + s_i^4 E_{y,i} + 4 c_i^2 s_i^2 G_{xy,i} \\ \tilde{E}_{y,i} &= s_i^4 E_{x,i} + c_i^4 E_{y,i} + 4 c_i^2 s_i^2 G_{xy,i} \end{aligned}, \text{ where } c_i = \cos(\beta_i),\ s_i = \sin(\beta_i) \tag{8.9}$$

$c_1 = \cos 0° = 1,\ s_1 = \sin 0° = 0$

$\tilde{E}_{x,1} = 1^4 \cdot 8000 + 0^4 \cdot 270 + 4 \cdot 1^2 \cdot 0^2 \cdot 500 = 8000 \text{ MN/m}^2$

$\tilde{E}_{y,1} = 0^4 \cdot 8000 + 1^4 \cdot 270 + 4 \cdot 1^2 \cdot 0^2 \cdot 500 = 270 \text{ MN/m}^2$

$c_2 = \cos 90° = 0,\ s_1 = \sin 90° = 1$

$\tilde{E}_{x,1} = 0^4 \cdot 7000 + 1^4 \cdot 230 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 230 \text{ MN/m}^2$

$\tilde{E}_{y,1} = 1^4 \cdot 7000 + 0^4 \cdot 230 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 7000 \text{ MN/m}^2$

$c_3 = \cos 0° = 1,\ s_3 = \sin 0° = 0$

$\tilde{E}_{x,3} = 1^4 \cdot 8000 + 0^4 \cdot 270 + 4 \cdot 1^2 \cdot 0^2 \cdot 500 = 8000 \text{ MN/m}^2$

$\tilde{E}_{y,3} = 0^4 \cdot 8000 + 1^4 \cdot 270 + 4 \cdot 1^2 \cdot 0^2 \cdot 500 = 270 \text{ MN/m}^2$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{x,i} \frac{t_i^3}{12} = 8000000 \frac{0.010^3}{12} + 230000 \frac{0.016^3}{12} + 8000000 \frac{0.012^3}{12} = 1.897 \text{ kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{x,i} \frac{z_{\max,i}^3 - z_{\min,i}^3}{3} =$$

$$= 8000000 \frac{(-0.009)^3 - (-0.019)^3}{3} + 230000 \frac{0.007^3 - (-0.009)^3}{3} + 8000000 \frac{0.019^3 - 0.007^3}{3} =$$

$$= 33.805 \text{ kNm}$$

$$D_{44} = \max\left(2128.07, \frac{48}{5 \cdot 1^2} \frac{1}{\dfrac{1}{1.897} - \dfrac{1}{33.805}} \right) = \max(2128.07, 19.30) = 2128.07 \text{ kN/m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{y,i} \frac{t_i^3}{12} = 270000 \frac{0.010^3}{12} + 7000000 \frac{0.016^3}{12} + 270000 \frac{0.012^3}{12} = 2.451 \text{ kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{E}_{y,i} \frac{z_{\max,i}^3 - z_{\min,i}^3}{3} =$$

$$= 270000 \frac{(-0.009)^3 - (-0.019)^3}{3} + 7000000 \frac{0.007^3 - (-0.009)^3}{3} + 270000 \frac{0.019^3 - 0.007^3}{3} = 3.640 \text{ kNm}$$

$$D_{55} = \max\left(7085.28, \frac{48}{5 \cdot 1^2} \frac{1}{\dfrac{1}{2.451} - \dfrac{1}{3.640}} \right) = \max(7085.28, 72.03) = 7085.28 \text{ kN/m}$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
33.85 & 0.24 & 0 & 0 & 0 & 124.49 & 0.13 & 0 \\
 & 3.64 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & -107.82 & 0 \\
 & & 2.26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96 \\
 & & & 2128.07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 7085.28 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{sym.} & & & 179923 & 1927 & 0 \\
 & & & & & & 118095 & 0 \\
 & & & & & & & 18040
\end{bmatrix}
$$

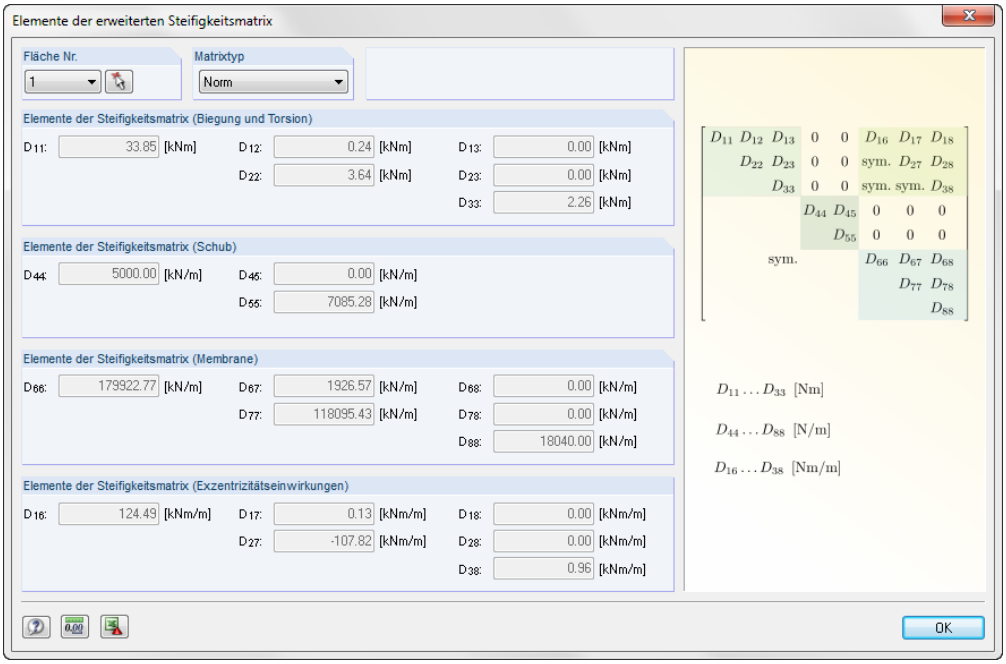


Bild 8.7: RF-LAMINATE-Dialog *Elemente der erweiterten Steifigkeitsmatrix* – mit Schubverbund zwischen den Schichten

8.1.2 Keine Berücksichtigung des Schubverbunds zwischen den Schichten

Da die Winkel β_i Vielfache von $90°$ sind, nimmt die Gesamtsteifigkeitsmatrix folgende Form an:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

Biege- und Drillsteifigkeitsglieder

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;11} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;12}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;22}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{i;33}$$

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 230.30 & 46.06 & 0 \\ 46.06 & 7009.21 & 0 \\ 0 & 0 & 440.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} 8010.81 & 54.07 & 0 \\ 54.07 & 270.36 & 0 \\ 0 & 0 & 500.00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$D_{11} = \frac{0.010^3}{12} 8010.81 \cdot 10^3 + \frac{0.016^3}{12} 230.30 \cdot 10^3 + \frac{0.012^3}{12} 8010.81 \cdot 10^3 = 1.900 \text{ kNm}$$

$$D_{12} = \frac{0.010^3}{12} 54.07 \cdot 10^3 + \frac{0.016^3}{12} 46.06 \cdot 10^3 + \frac{0.012^3}{12} 54.07 \cdot 10^3 = 0.028 \text{ kNm}$$

$$D_{22} = \frac{0.010^3}{12} 270.36 \cdot 10^3 + \frac{0.016^3}{12} 7009.21 \cdot 10^3 + \frac{0.012^3}{12} 270.36 \cdot 10^3 = 2.454 \text{ kNm}$$

$$D_{33} = \frac{0.010^3}{12} 500 \cdot 10^3 + \frac{0.016^3}{12} 440.00 \cdot 10^3 + \frac{0.012^3}{12} 500 \cdot 10^3 = 0.264 \text{ kNm}$$

Membranglieder

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;11} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;12}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;22}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i\, d_{i;33}$$

$$D_{66} = 10\cdot 10^{-3}\cdot 8010.81\cdot 10^{3} + 16\cdot 10^{-3}\cdot 230.30\cdot 10^{3} + 12\cdot 10^{-3}\cdot 8010.81\cdot 10^{3} = 179923\ \text{N/m}$$

$$D_{67} = 10\cdot 10^{-3}\cdot 54.07\cdot 10^{3} + 16\cdot 10^{-3}\cdot 46.06\cdot 10^{3} + 12\cdot 10^{-3}\cdot 54.07\cdot 10^{3} = 1927\ \text{N/m}$$

$$D_{77} = 10\cdot 10^{-3}\cdot 270.36\cdot 10^{3} + 16\cdot 10^{-3}\cdot 7009.21\cdot 10^{3} + 12\cdot 10^{-3}\cdot 270.36\cdot 10^{3} = 118095\ \text{N/m}$$

$$D_{88} = 10\cdot 10^{-3}\cdot 500\cdot 10^{3} + 16\cdot 10^{-3}\cdot 440\cdot 10^{3} + 12\cdot 10^{-3}\cdot 500\cdot 10^{3} = 18040\ \text{N/m}$$

Schubglieder

$$D_{44} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{6} G_{i;11}\, t_i \qquad D_{55} = \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{6} G_{i;22}\, t_i$$

mit

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{i;11} & G_{i;12} \\ \text{sym.} & G_{i;22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{2\times 2;i}{}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{G}_i'\, \mathbf{T}_{2\times 2;i}, \text{ mit } \mathbf{G}_i' = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$\mathbf{T}_{2\times 2;i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & \sin(\beta_i) \\ -\sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Elemente ergeben sich dann zu

$$G_{i;11} = c^2 G_{i;xz} + s^2 G_{i;yz}$$

$$G_{i;12} = cs G_{i;xz} - cs G_{i;yz}$$

$$G_{i;22} = s^2 G_{i;xz} + c^2 G_{i;yz}, \text{ mit } c = \cos(\beta_i),\ s = \sin(\beta_i)$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1' = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_3' = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_2' = \begin{bmatrix} 440 & 0 \\ 0 & 44 \end{bmatrix},\ c = \cos 90° = 0,\ s = \sin 90° = 1$$

$$G_{2;11} = 0^2\cdot 440 + 1^2\cdot 44 = 44\ \text{MPa}$$

$$G_{2;12} = 0\cdot 1\cdot 440 - 0\cdot 1\cdot 44 = 0\ \text{MPa}$$

$$G_{2;22} = 1^2\cdot 440 + 0^2\cdot 44 = 440\ \text{MPa}$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 44 & 0 \\ 0 & 440 \end{bmatrix}$$

$$D_{44} = \frac{5}{6} 500\cdot 10^{3}\cdot 0.010 + \frac{5}{6} 44\cdot 10^{3}\cdot 0.016 + \frac{5}{6} 500\cdot 10^{3}\cdot 0.012 = 9753\ \text{kN/m}$$

$$D_{55} = \frac{5}{6} 50\cdot 10^{3}\cdot 0.010 + \frac{5}{6} 440\cdot 10^{3}\cdot 0.016 + \frac{5}{6} 50\cdot 10^{3}\cdot 0.012 = 6783\ \text{kN/m}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.900 & 0.028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.454 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 9753 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6783 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & 179923 & 1927 & 0 \\ & & & & & & 118095 & 0 \\ & & & & & & & 18040 \end{bmatrix}$$

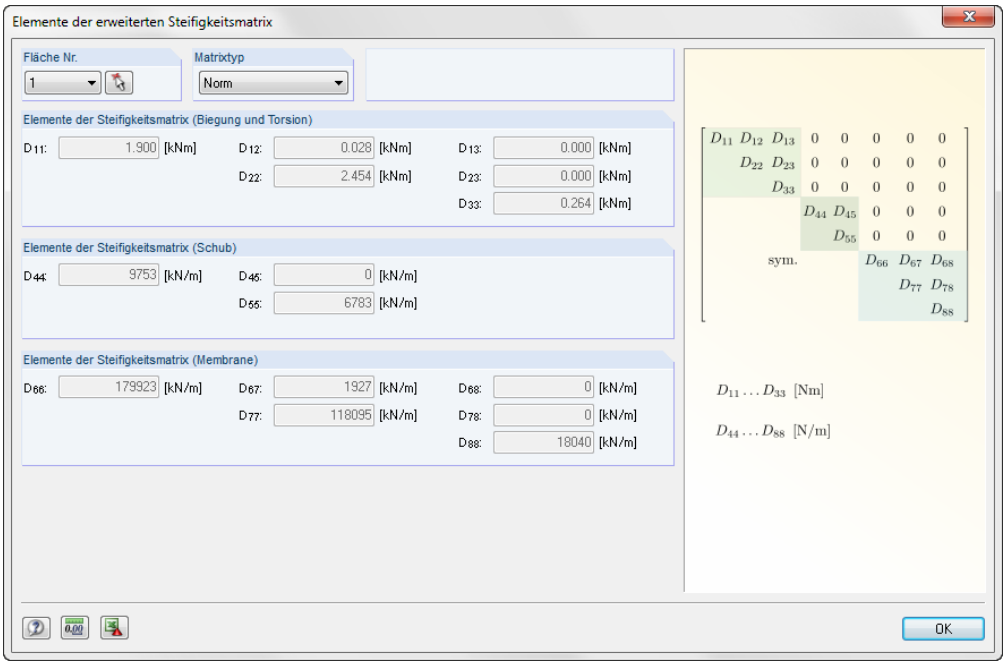


Bild 8.8: RF-LAMINATE-Dialog *Elemente der erweiterten Steifigkeitsmatrix*– ohne Schubverbund zwischen Schichten

8.2 Berechnung der Spannungen

Es wird ein Verbundglas untersucht, das aus folgenden drei Schichten mit den folgenden Materialkennwerten besteht (siehe Bild 8.10):

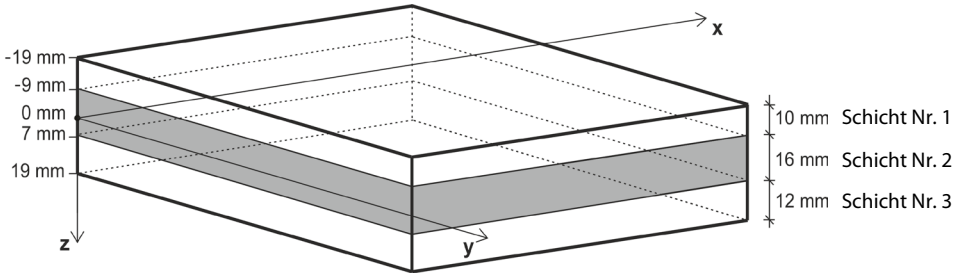


Bild 8.9: Schichtenaufbau

Schichten

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Schicht Nr.	Material-Bezeichnung	Dicke t [mm]	Orthotropie-richtung β [°]	Elastizitätsmodul [N/mm²] E_x	E_y	Schubmodul [N/mm²] G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}	Querdehnzahl [-] ν_{xy}	ν_{yx}	Spez. Gewicht γ [N/m³]
1	Pappel und Nadelholz C16	10.0	0.00	8000.000	270.000	500.000	50.000	500.000	0.200	0.007	3700.0
2	Pappel und Nadelholz C14	16.0	90.00	7000.000	230.000	440.000	44.000	440.000	0.200	0.007	5000.0
3	Pappel und Nadelholz C16	12.0	0.00	8000.000	270.000	500.000	50.000	500.000	0.200	0.007	3700.0

Bild 8.10: Maske 1.2 *Materialkennwerte*

Im vorhergehenden Beispiel aus Kapitel 8.1 wird die Berechnung der Steifigkeitsmatrixglieder jeweils mit und ohne Schubverbund zwischen den Schichten dargestellt. Im Weiteren folgt die Berechnung der Spannungen.

Die Platte mit den Abmessungen 1,0 x 1,5 m ist gelenkig gelagert und weist eine Flächenlast von 5 kN/m² auf.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

8.2.1 Berechnung der einzelnen Spannungskomponenten

Die FE-Methode in RFEM liefert die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Die Spannungswerte im Punkt [0.8, 0.8, 0] in der mittleren Schicht sind in den folgenden zwei Bildern gezeigt. Im ersten Fall wird der Schubverbund zwischen den Schichten berücksichtigt, im zweiten nicht.

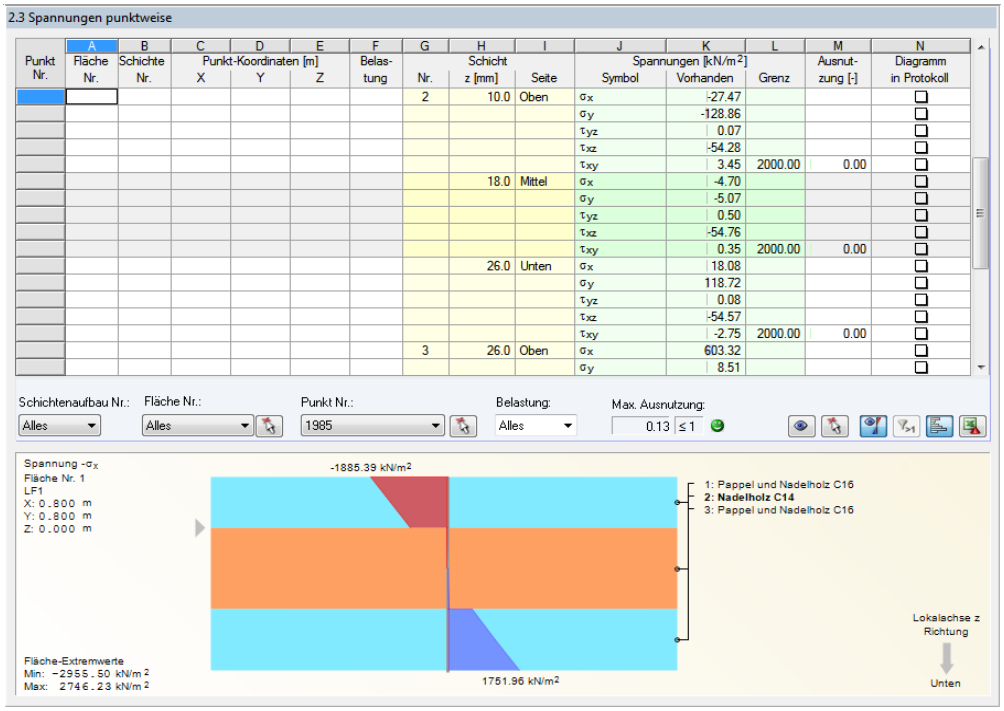


Bild 8.11: Maske 2.3 *Spannungen in allen Punkten* –mit Berücksichtigung des Schubverbundes zwischen Schichten

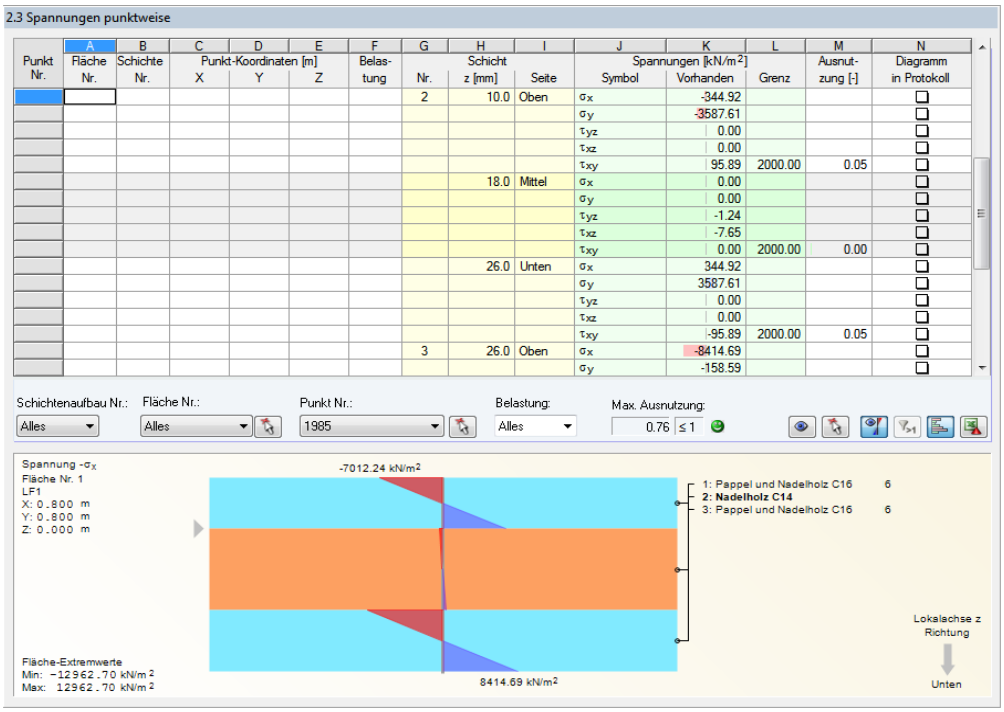


Bild 8.12: Maske 2.3 *Spannungen punktweise* – Beispiel ohne Berücksichtigung des Schubverbundes zwischen Schichten

Da die Berechnung für die einzelnen Spannungskomponenten in beiden Fällen gleich abläuft, wird hier nur der Fall mit Schubverbund zwischen Schichten dargestellt. Es gelten die Werte:

Punkt	*Seite*	σ_x [kPa]	σ_y [kPa]	τ_{xy} [kPa]
x = 0.8 m, y = 0.8 m, Schicht Nr. 2	Oben	-27.47	-128.75	3.44
	Mitte	-4.70	-5.05	0.35
	Unten	18.07	118.65	-2.75

Tabelle 8.1: Spannungen in Schicht Nr. 2 in Punkt [0.8;0.8]

Die mittlere Schicht wird rotiert um den Winkel $\beta = 90°$

$$\sigma_{b+t/c,0} = \sigma_x \cos^2\beta + \tau_{xy}\sin 2\beta + \sigma_y \sin^2\beta$$

$$\sigma_{b+t/c,0(Oben)} = -27.47\cos^2 90° + 3.45\cdot\sin(2\cdot 90°) - 128.86\sin^2 90° = -128.86 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,0(Mitte)} = -4.70\cos^2 90° + 0.35\cdot\sin(2\cdot 90°) - 5.07\sin^2 90° = -5.07 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,0(Unten)} = 18.08\cos^2 90° - 2.75\cdot\sin(2\cdot 90°) + 118.72\sin^2 90° = 118.72 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90} = \sigma_x \sin^2\beta - \tau_{xy}\sin 2\beta + \sigma_y \cos^2\beta$$

$$\sigma_{b+t/c,90(Oben)} = -27.47\sin^2 90° - 3.45\sin(2\cdot 90°) - 128.86\cos^2 90° = -27.47 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90(Mitte)} = -4.70\sin^2 90° - 0.35\sin(2\cdot 90°) - 5.07\cos^2 90° = -4.70 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90(Unten)} = 18.08\sin^2 90° - (-2.75)\sin(2\cdot 90°) + 118.72\cos^2 90° = 18.08 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{t/c,0} = \frac{\sigma_{b+t/c,0(Oben)} + \sigma_{b+t/c,0(Mitte)} + \sigma_{b+t/c,0(Unten)}}{3}$$

$$\sigma_{t/c,0} = \frac{-128.86 - 5.07 + 118.72}{3} = -5.07 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{t/c,90} = \frac{\sigma_{b+t/c,90(Oben)} + \sigma_{b+t/c,90(Mitte)} + \sigma_{b+t/c,90(Unten)}}{3}$$

$$\sigma_{t/c,90} = \frac{-27.47 - 4.70 + 18.08}{3} = -4.70 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0} = \sigma_{b+t/c,0} - \sigma_{t/c,0}$$

$$\sigma_{b,0(Oben)} = -128.86 - (-5.07) = -123.79 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0(Mitte)} = -5.07 - (-5.07) = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0(Unten)} = 118.72 - (-5.07) = 123.79 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90} = \sigma_{b+t/c,90} - \sigma_{t/c,90}$$

$$\sigma_{b,90(Oben)} = -27.47 - (-4.70) = -22.77 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90(Mitte)} = -4.70 - (-4.70) = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90(Unten)} = 18.08 - (-4.70) = 22.77 \text{ kPa}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

8.2.2 Berechnungsablauf in RF-LAMINATE

Zunächst legen wir ein *Neues Modell* in RFEM an.

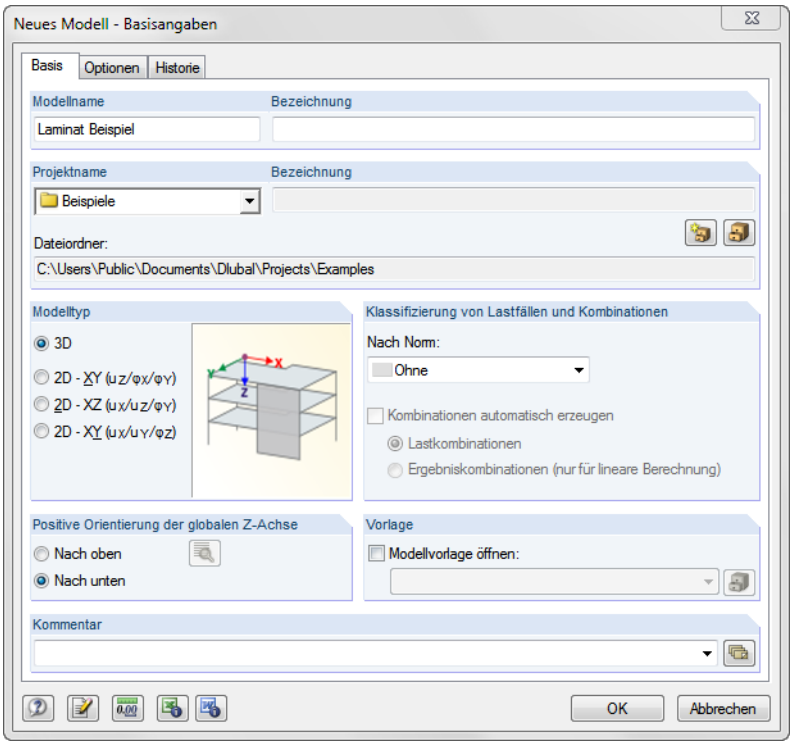


Bild 8.13: Neues Modell anlegen

Danach erzeugen wir eine *Neu Rechteckplatte*. Hierbei ist *Laminate* als Flächentyp auszuwählen und anschließend im RFEM-Arbeitsfenster die Plattenabmessung 1,0 x 1,5 m zu definieren.

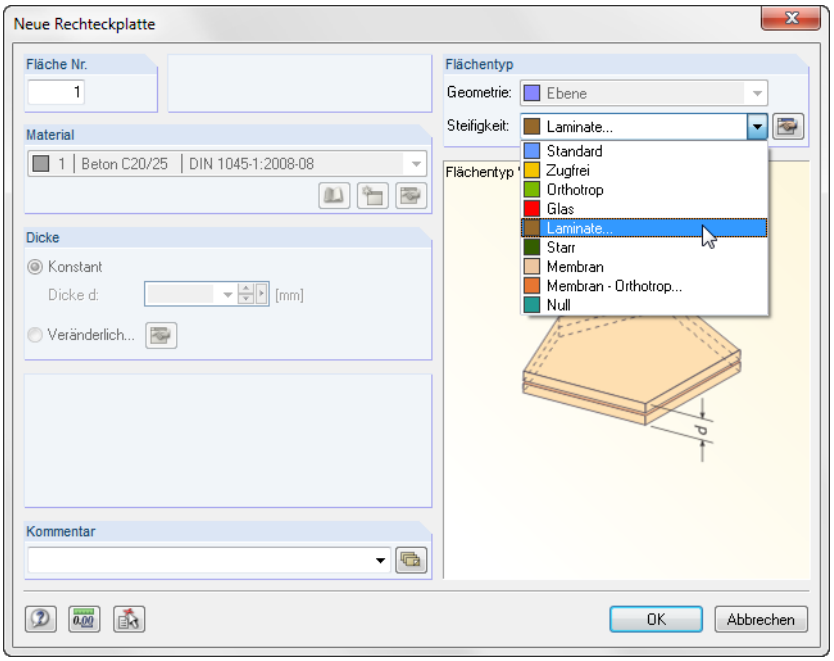


Bild 8.14: Dialog *Neue Rechteckplatte*

Die Linienlager für die Fläche werden nach Bild 8.15 definiert.

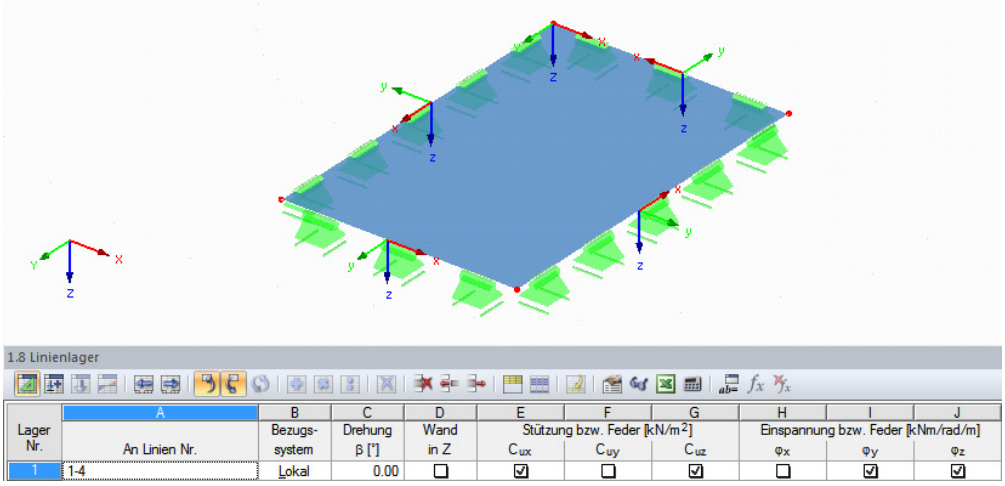


Bild 8.15: Tabelle *Linienlager*

Als nächstes legen einen *Neuen Lastfall* an. Das Eigengewicht soll **nicht** *Aktiv* sein.

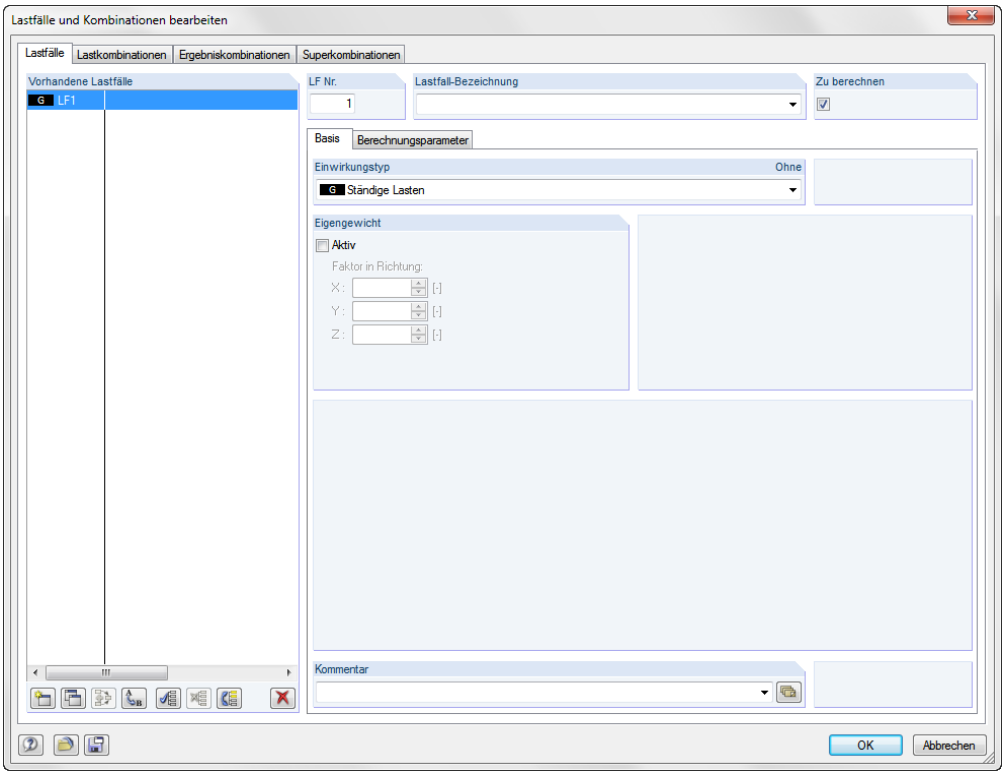


Bild 8.16: Dialog *Lastfälle und Kombinationen bearbeiten*, Register *Lastfälle*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Wir weisen der Fläche nun eine *Neue Flächenlast* entsprechend dem folgenden Bild zu.

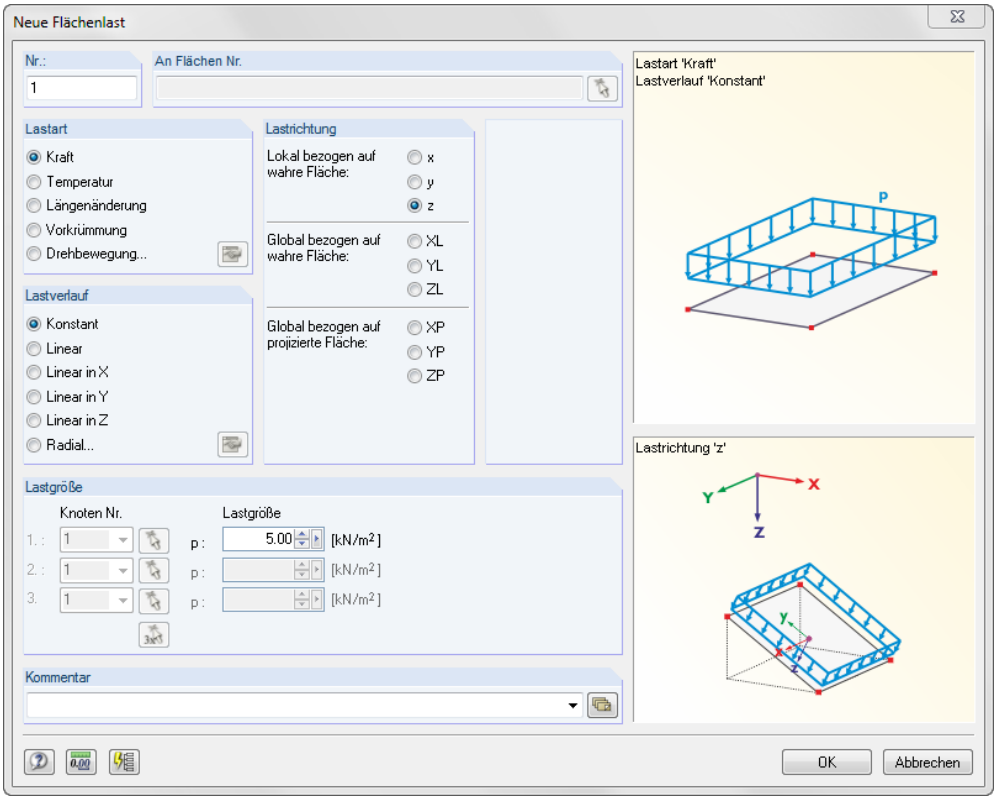


Bild 8.17: Dialog *Neue Flächenlast*

Im Dialog *FE-Netz-Einstellungen* ist die angestrebte Länge der finiten Elemente auf 25 mm einzustellen.

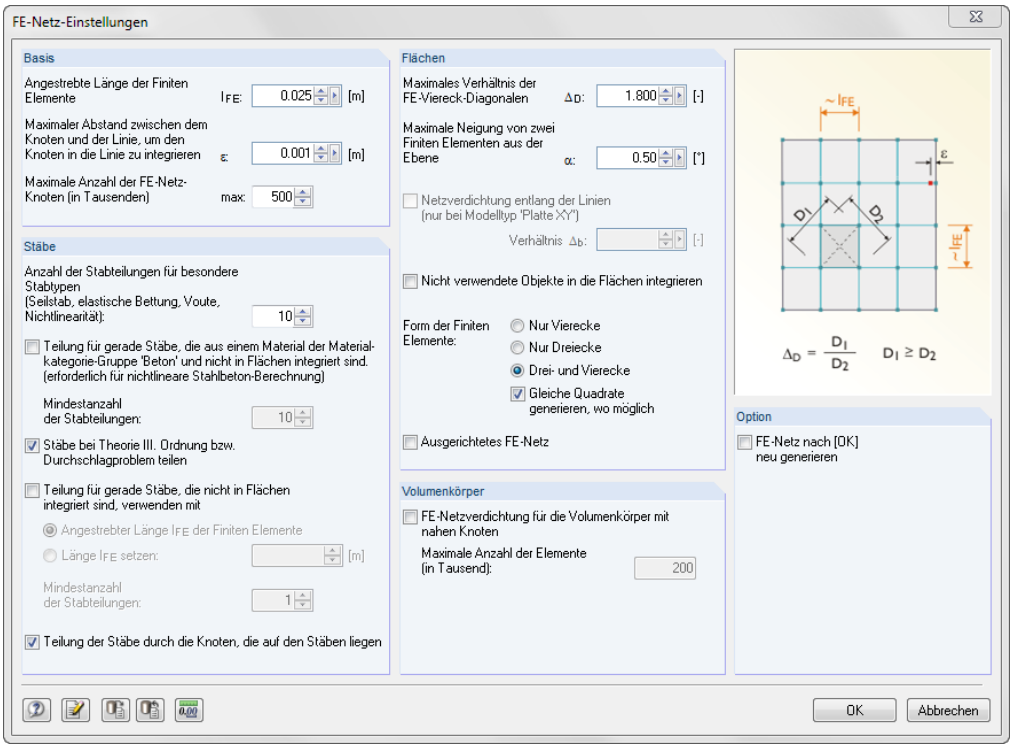


Bild 8.18: Dialog *FE-Netz-Einstellungen*

Als Nächstes rufen wir das Modul RF-LAMINATE auf.

In Maske 1.1 *Basisangaben* wählen wir Fläche Nr. 1 aus. Danach wählen wir das orthotrope Materialmodell und wählen LF1 für die Bemessung in den beiden Registern *Tragfähigkeit* und *Gebrauchstauglichkeit* aus.

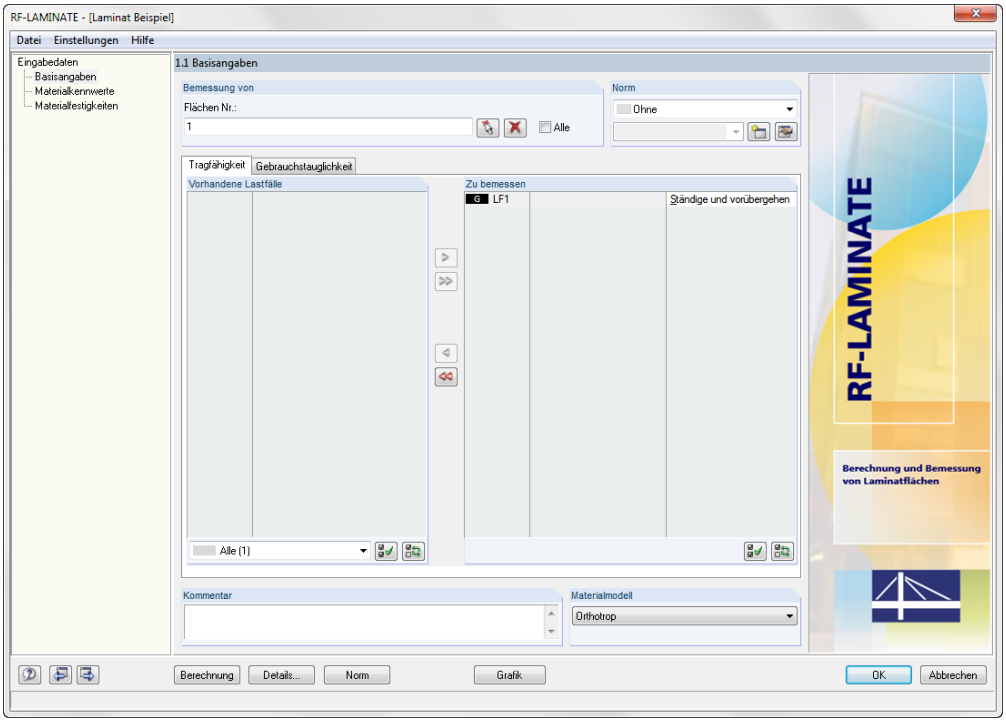


Bild 8.19: Maske 1.1 *Basisangaben*

In Maske 1.2 *Materialkennwerte* wählen wir die einzelnen Schichten aus der Materialbibliothek aus und weisen den erzeugten Schichtenaufbau der Fläche Nr. 1 zu.

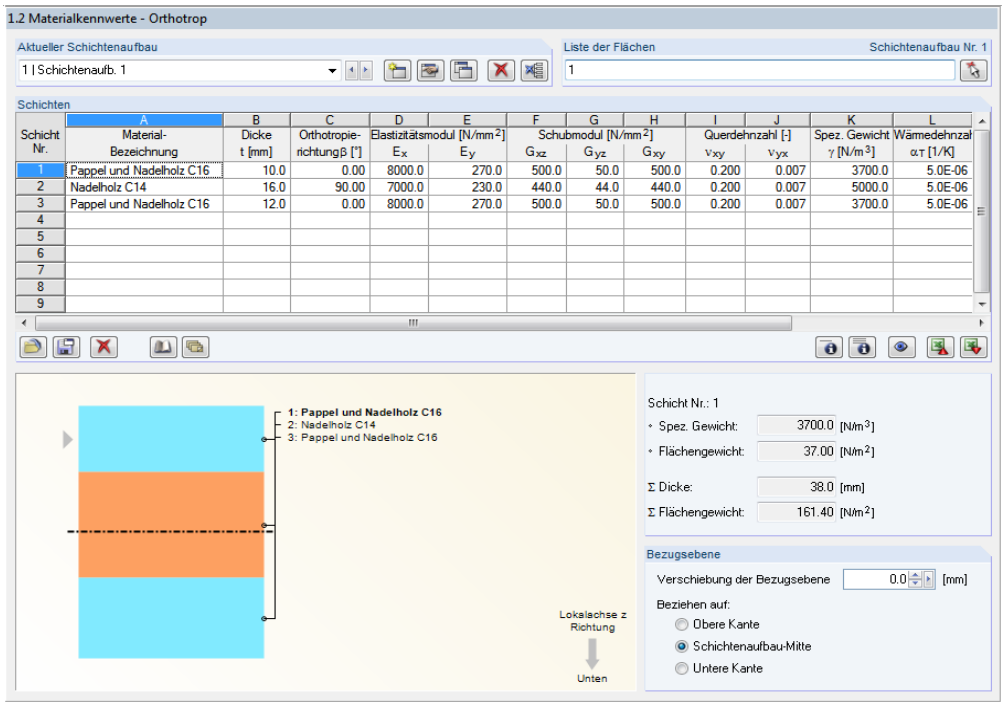


Bild 8.20: Maske 1.2 *Materialkennwerte*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

In Maske 1.3 *Materialfestigkeiten* werden die charakteristischen Werte automatisch aus der Materialbibliothek übernommen.

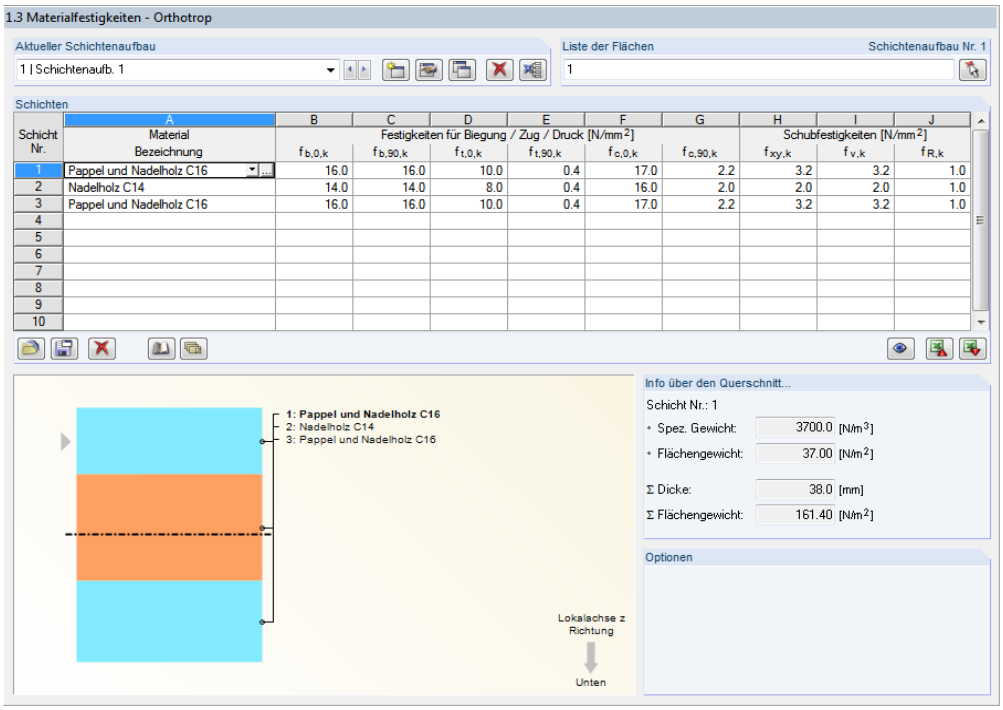


Bild 8.21: Maske 1.3 *Materialfestigkeiten*

In der letzten Eingabemaske geben wir Fläche Nr. 1 in die *Liste der Flächen* ein und wählen *Maximale Grenzlinie* für den *Typ der Bezugslänge*.

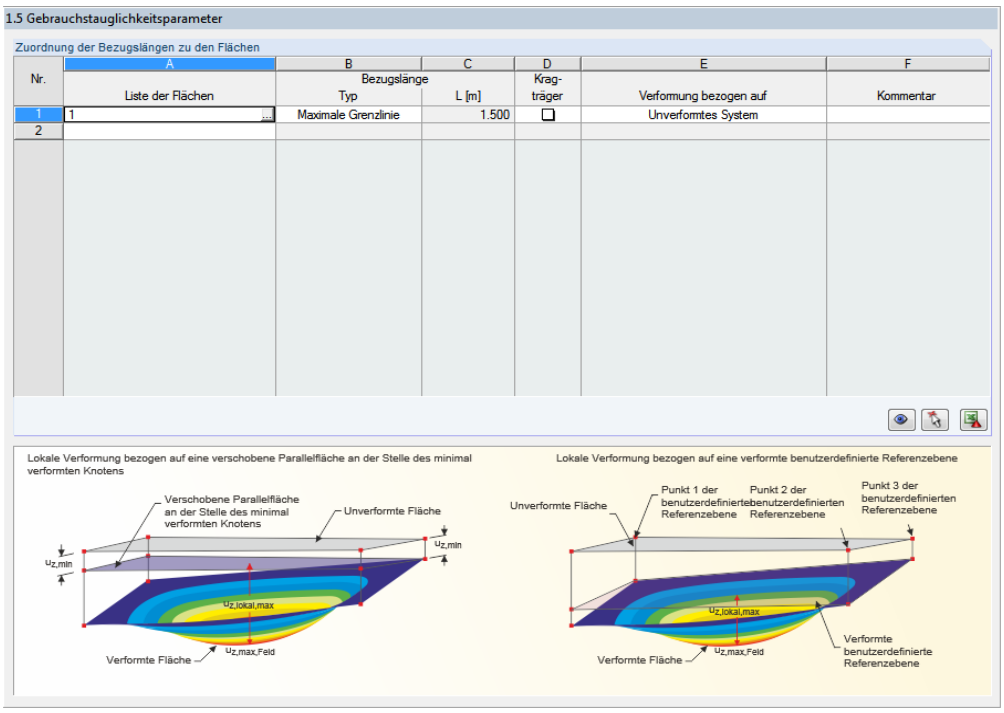


Bild 8.22: Maske 1.5 *Gebrauchstauglichkeitsparameter*

Vor der Berechnung stellen wir noch die anzuzeigenden Spannungen im Dialog *Details* ein.

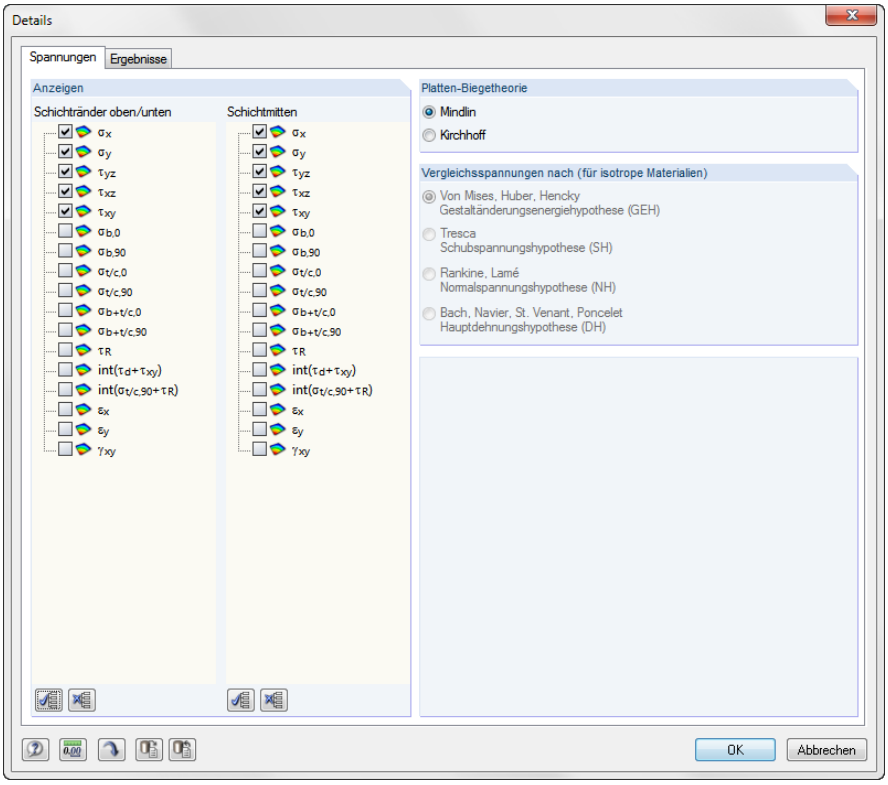


Bild 8.23: Dialog *Details*, Register *Spannungen*

Berechnung

Wir starten nun die [Berechnung].

Anschließend können die Spannungswerte in der Ergebnismaske überprüft und mit der Berechnung im vorhergehenden Kapitel verglichen werden.

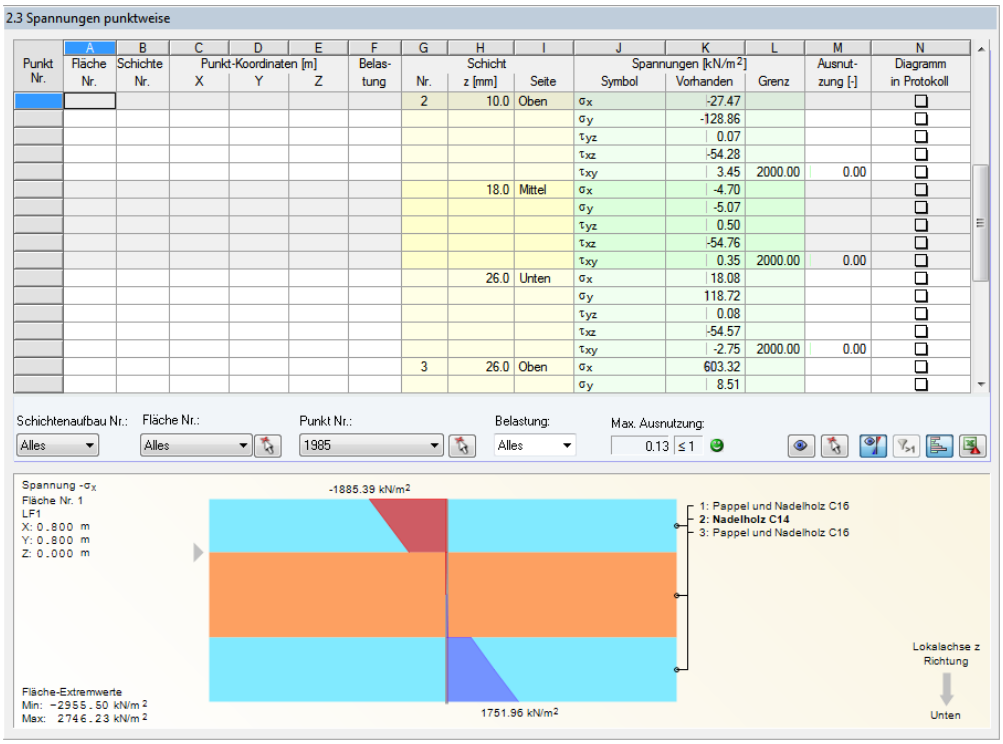


Bild 8.24: Maske 2.3 *Spannungen in allen Punkten*

8.3 Berechnung einer Deckenplatte mit Balkon gemäß DIN EN 1995-1-1

Das folgende Beispiel ist an ein Beispiel aus dem Brettsperrholzleitfaden *Bemessung und Konstruktion nach Eurocode* Abschnitt 10.2 angelehnt.

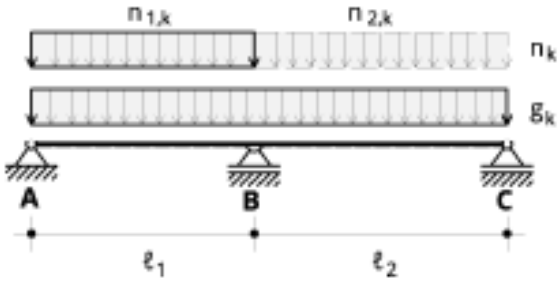


Bild 8.25: System

Gegeben:	Wohnungsdecke
	$l_1 = l_2 = 5{,}20$m
	Nutzungsklasse 1
	Brandanforderung: R60 einseitig
Einwirkungen:	Nutzlast: $n_k = 2{,}5$ kN/m^2 , Kategorie A
	Ständige Auflasten: $g_{2,k} = 2{,}0$ kN/m^2
Gesucht:	Dimensionierung für Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit
Gewählter Querschnitt:	BBS XL (d=200mm)

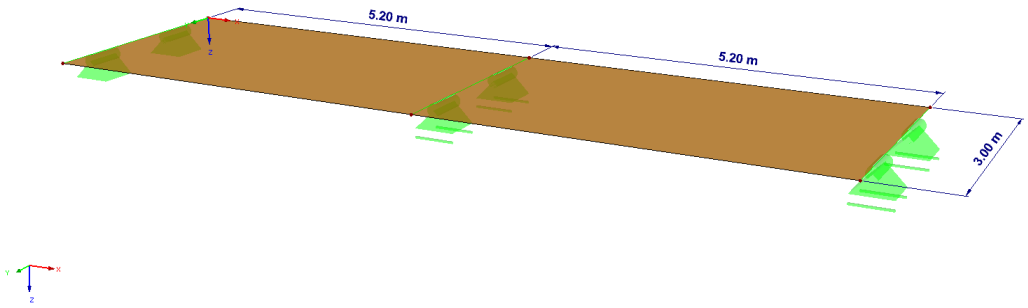


Bild 8.26: System in RFEM

Bereits beim Anlegen der Position wird die Kombinatorik gemäß DIN EN 1995-1-1 ausgewählt. Da es sich um einen Deckenträger handelt, wird die Nutzungsklasse 1 mit dem Kriechfaktor $k_{def} = 0{,}6$ definiert.

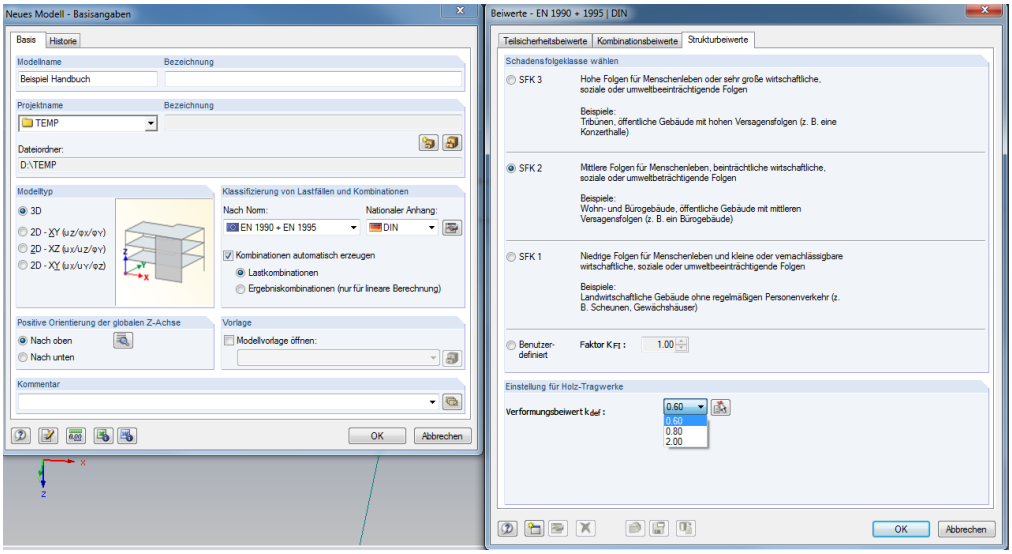


Bild 8.27: Anlegen der Position

Vor dem Festlegen des statischen Systems wird das Material *Orthotrop elastisch 2D* ausgewählt. Weitere Informationen zu diesem Materialmodel befinden sich im Theorieteil dieses Handbuchs oder im Handbuch zu RFEM.

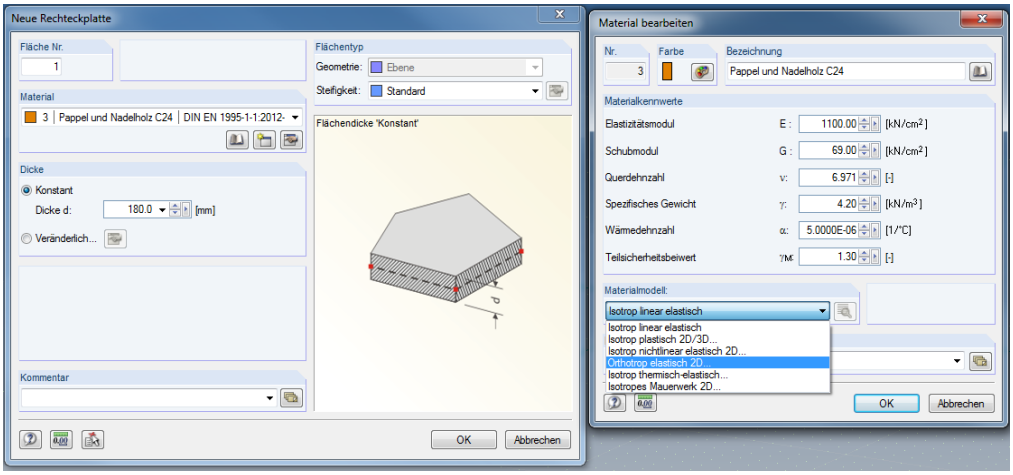


Bild 8.28: Auswahl des Materialmodells

Bei der Definition der Lasten erhält der Anwender durch die Festlegung der automatischen Kombinatorik gemäß DIN EN 1995 bereits hier die Möglichkeit, die Klasse der Lasteinwirkungsdauer (KLED) für die jeweilige Last zu definieren.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

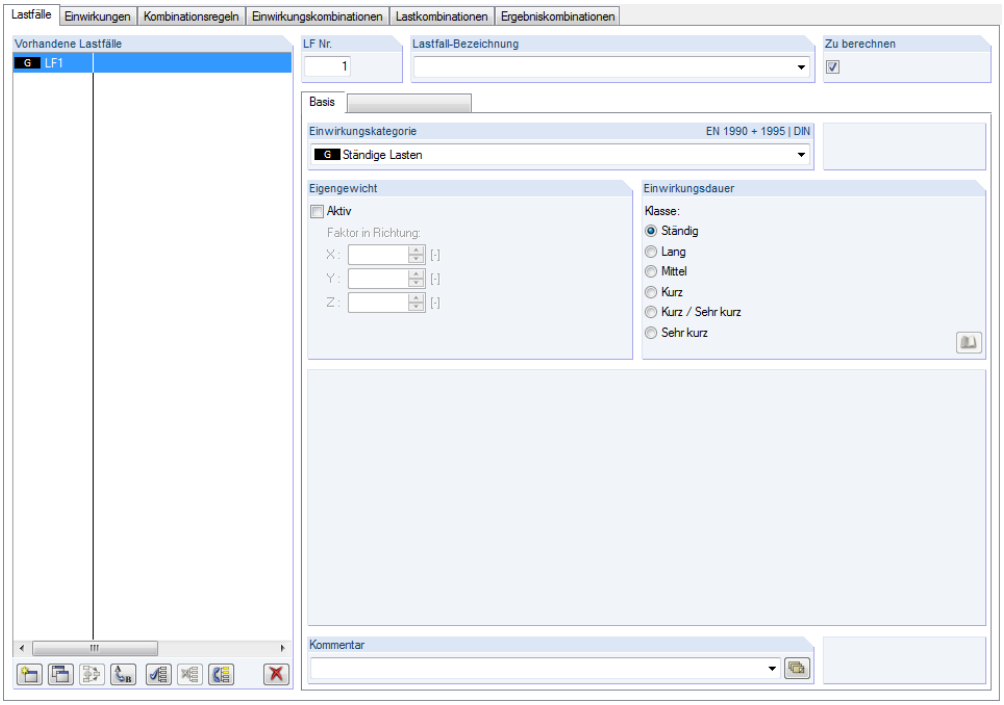


Bild 8.29: Auswahl der KLED

Für den Lastfall 1 wählen wir *Ständig* und für die Nutzlast die KELD *Mittel*. Wenn man sich bei der Definition der KLED unsicher ist, hat man auch die Möglichkeit, den Wert entsprechend der Norm aus der Bibliothek auszusuchen.

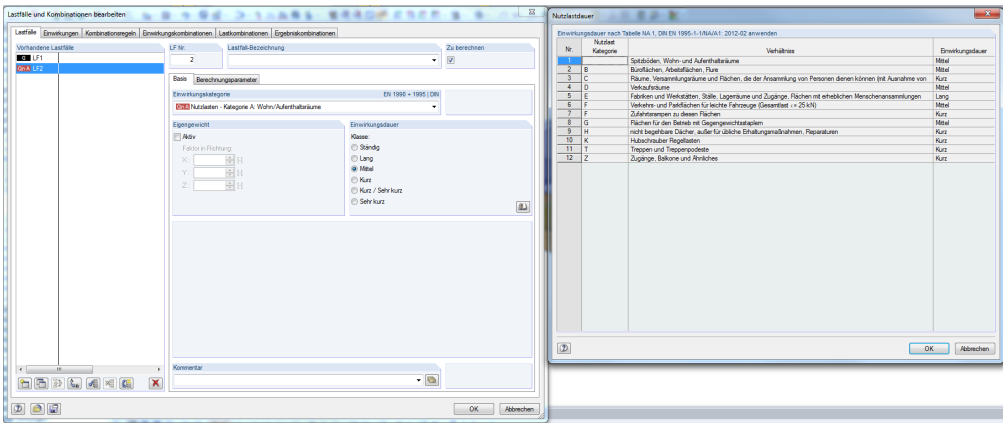


Bild 8.30: Auswahl der KLED

Da ein Nachweis der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit durchgeführt werden soll, werden diese Kombinationsregeln entsprechend festgelegt. Ausführliche Informationen zur Definition der Lasten und zu den Kombinationsregeln finden sich wiederum im RFEM- Handbuch.

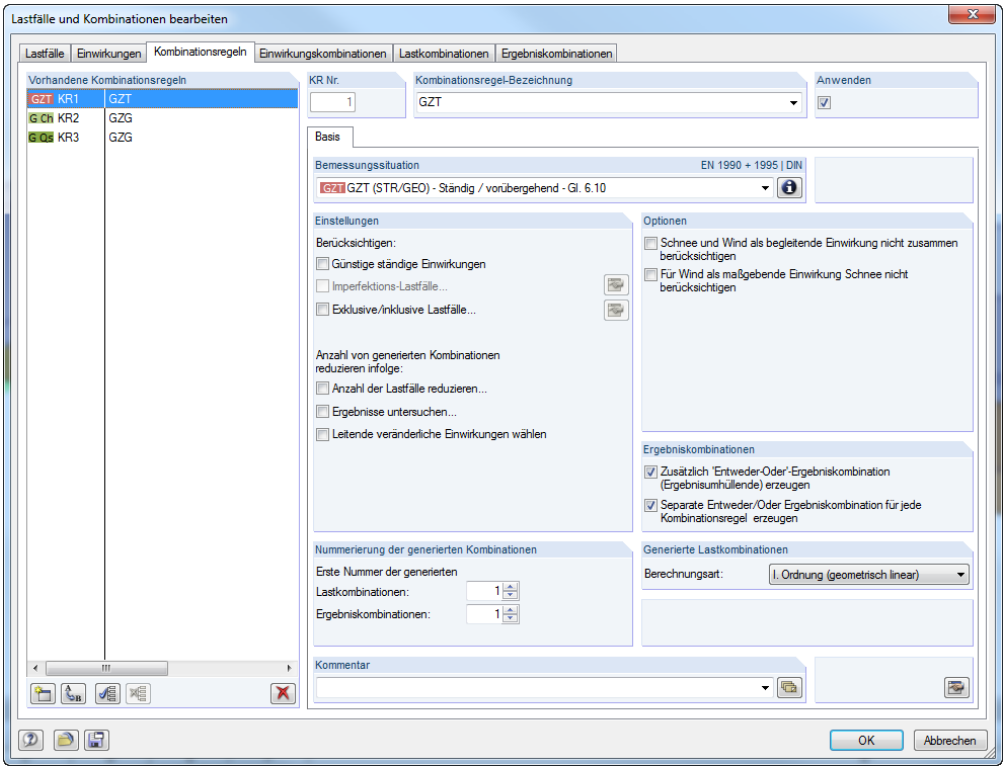


Bild 8.31: Auswahl der Kombinationen

Wenn das System wie in Bild 8.26 gezeigt definiert ist, wechseln wir ins Modul RF-LAMINATE.

Der Dialog *Basisangaben* unterscheidet sich nicht wesentlich von den sicherlich bekannten Stahl- oder Stahlbeton-Bemessungsmodulen.

Die Bemessung soll gemäß DIN EN 1995-1-1 erfolgen:

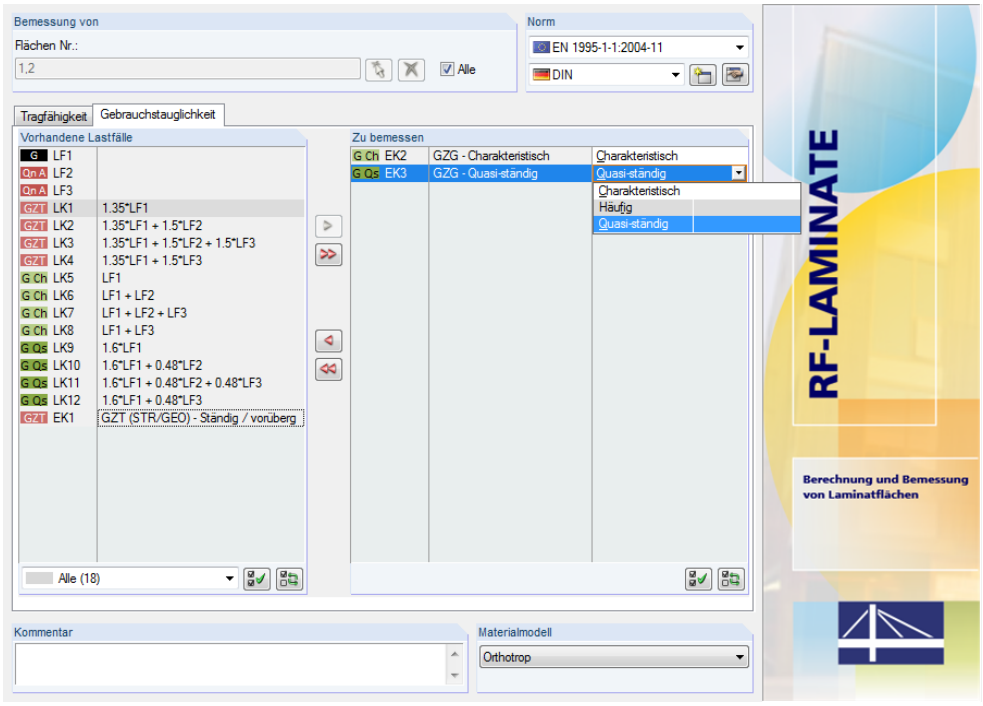


Bild 8.32: Maske 1.1 *Basisangaben*

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Die automatisch gebildete EK1 verwenden wir zur Bemessung der *Tragfähigkeit*, die EK2 und EK3 zur Bemessung der *Gebrauchstauglichkeit*.

Für die EK3 muss ggf. noch die Einwirkungssituation *Quasi-ständig* definiert werden. Die zur Einwirkung gehörenden Grenzwerte werden im Register *Gebrauchstauglichkeit-Grenzwerte* unter den Normparametern eingestellt.

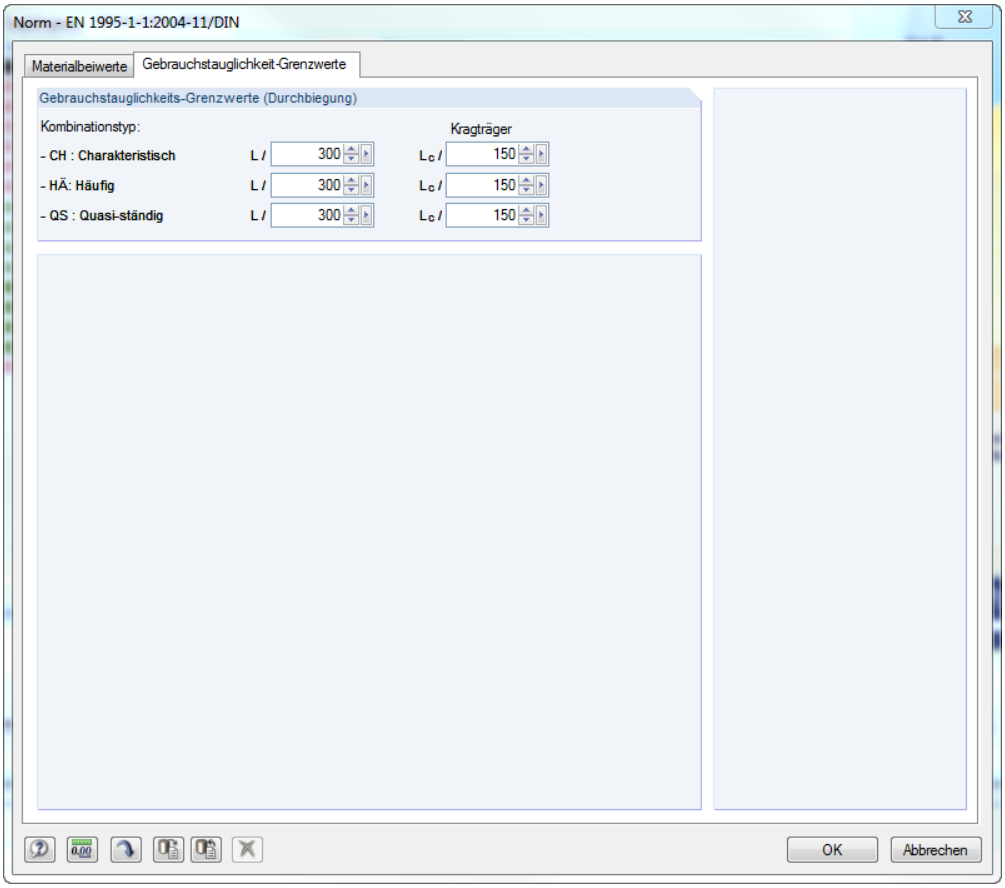


Bild 8.33: Dialog *Norm*, Register *Gebrauchstauglichkeits-Grenzwerte*

Als Querschnitt soll ein BBS XL 200 verwendet werden. Dazu wird in Maske 1.2 *Materialkennwerte - Orthotrop* unter den Herstelleraufbauten der entsprechende Aufbau ausgewählt. Alternativ kann natürlich auch jede Schicht manuell definiert werden.

Schichten

	A	B	C	D	E	F	G	H
Schicht Nr.	Material-Bezeichnung	Beiwert Kategorie	Dicke t [mm]	Orthotropie-richtung β [°]	Elastizitätsmodul [N/mm²] E_x	E_y	Schubmodul [N/mm G_{xz}	G_{yz}
1	Nadelholz C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	50.0
2	Nadelholz C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40.0	90.00	11000.0	370.0	690.0	50.0
3	Nadelholz C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	50.0
4	Nadelholz C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40.0	90.00	11000.0	370.0	690.0	50.0
5	Nadelholz C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	50.0
6								
7								
8								
9								

Bild 8.34: Maske 1.2 *Materialkennwerte - Orthotrop*

Anhand dieses Aufbaus soll noch einmal der Effekt der unteren Grenze der Schubsteifigkeit aus Kapitel 2.3.2.3 erläutert werden.

Bei einer Plattenbreite von 3 m wie im Beispiel hat die erläuterte Grenze aus dem genannten Kapitel geringeren Einfluss. Die Schubsteifigkeit errechnet sich dabei zu:

$$D_{44,\mathrm{calc}} = \frac{1}{\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G_{11}(z)} \left(\frac{\int_{z}^{t/2} d_{11}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,x})\,\mathrm{d}\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})(\bar{z} - z_{0,x})^2\,\mathrm{d}\bar{z}} \right)^2 \mathrm{d}z}, \quad z_{0,x} = \frac{\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})\bar{z}\,\mathrm{d}\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} d_{11}(\bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z}}$$

Gemäß EN 1995 bzw. den zugehörigen Materialnormen wäre lediglich eine 10 % Abminderung der Schubfestigkeiten notwendig. Diese Abminderung berücksichtigt die geringere Festigkeit der parallel zueinander liegenden Fasern des Holzes.

In dem Bild unten ist ersichtlich, dass hiermit das Abscheren der Fasern in radialer bzw. tangentialer Richtung berücksichtigt wird.

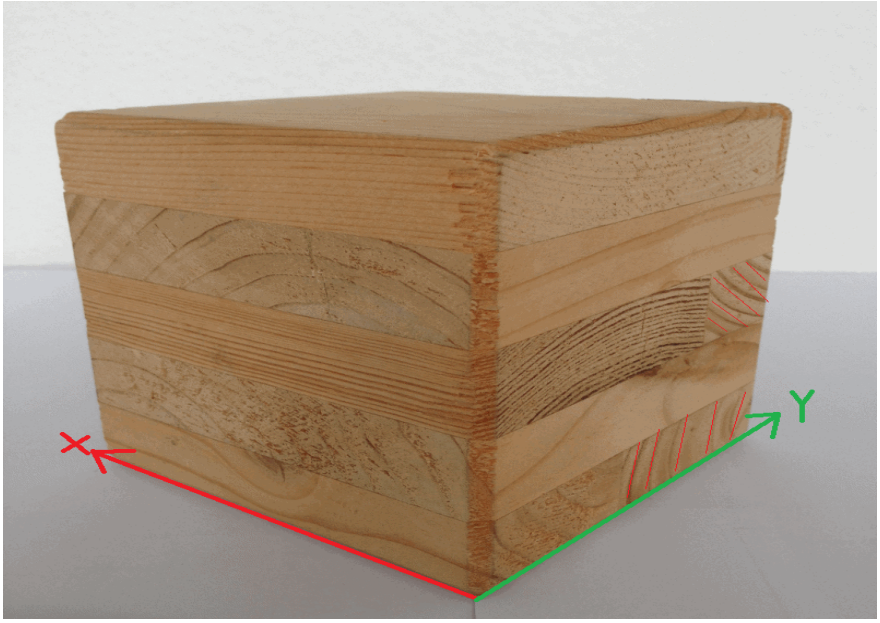


Bild 8.35: Schema zum Abscheren der Fasern in G_{yz}

Für den gewählten Querschnitt ergeben sich folgende Steifigkeiten der einzelnen Lagen:

Schicht	Material	Beiwert	Dicke	Orthotropie-	E-Modul [N/mm²]		Schubmodul [N/mm²]		
Nr.	Nadelholz	Kategorie	t [mm]	richtung β [°]	E_x	E_y	G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}
1	C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40,0	0,00	11000,0	370,0	690,0	50,0	690,0
2	C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40,0	90,00	11000,0	370,0	690,0	50,0	690,0
3	C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40,0	0,00	11000,0	370,0	690,0	50,0	690,0
4	C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40,0	90,00	11000,0	370,0	690,0	50,0	690,0
5	C24 BBS XL	Sperrholz (Teil 2)	40,0	0,00	11000,0	370,0	690,0	50,0	690,0

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

Für die Plattenmaße von 3 m x 5,2 m ergeben sich gemäß obiger Gleichung folgende Schubsteifigkeiten:

D44 = 15921,7 N/mm

D55 = 9776,5 N/mm

Mit der unteren Begrenzung (siehe Theorieteil) ergeben sich folgende Schubsteifigkeiten:

$$\frac{pl^2}{8D_{44}} \leq \frac{5pl^4}{384}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i}\frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i}\frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}\right) \Rightarrow D_{44,\min} := \frac{48}{5l^2}\frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i}\frac{h_i^3}{12}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} E_{x,i}\frac{z_{i,\max}^3 - z_{i,\min}^3}{3}}} \leq D_{44}.$$

D44 = 98,9 N/mm

D55 = 75,8 N/mm

Diese untere Grenze wird jedoch aufgrund der Größe der Schubkraftübertragung erst bei einer sehr schmalen Platte maßgebend.

Wenn der gleiche Aufbau z. B. bei einer 10 cm x 20 cm Platte verwendet wird, wird folglich die untere Grenze berücksichtigt. Die Steifigkeiten ergeben sich dann zu:

D44 = 178222,2 N/mm

D55 = 127452 N/mm

Die Steifigkeiten müssen logischerweise bei schmäleren Platten schubsteifer werden, da die Schubbeanspruchung auf eine kleinere Fläche verteilt wird.

Die Materialfestigkeiten werden entsprechend der Herstellervorgaben vom Programm eingestellt.

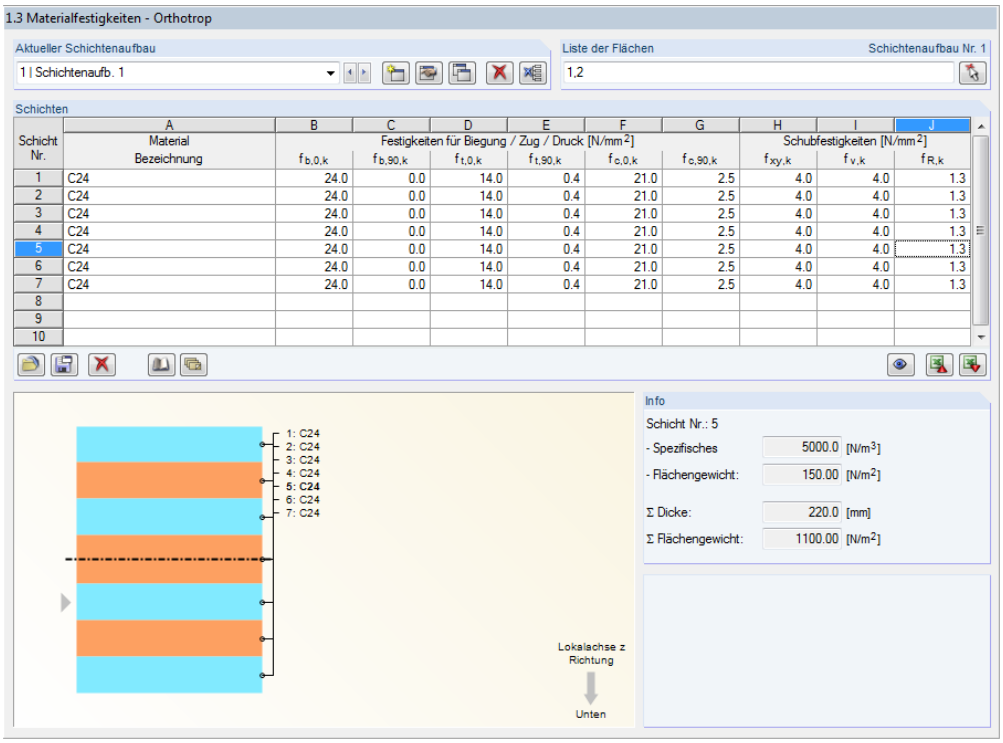


Bild 8.36: Maske 1.3 *Materialfestigkeiten - Orthotrop*

Die Biegesteifigkeiten einer Brettsperrholzplatte sind natürlich in alle Richtungen gleich, da der Werkstoff Holz immer die gleiche Biegefestigkeit besitzt. Allerdings wurde bereits bei der Definition der Steifigkeit in der Nebentragrichtung nur eine geringe Steifigkeit definiert. Wo keine Steifigkeit besteht, entstehen auch keine Spannungen. Demzufolge ist es irrelevant, in der Nebentragrichtung $f_{b,90,k}$ Festigkeiten vorzugeben.

Bei der Betrachtung der einzelnen Lagen sollte man sich immer vor Augen führen, dass die Lagen jeweils um 90° zueinander versetzt angeordnet sind.

Ergebnisse

Wenn wie bei diesem Beispiel die Norm EN 1995 ausgewählt wurde, sind für die jeweiligen Nachweise die relevanten Spannungen in den Details voreingestellt.

Die Nachweise erfolgen gemäß Abschnitt NA 9.3 für Deutschland.

Folgende Nachweise sind erforderlich:

$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \qquad (NA.130)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \qquad (NA.131)$$

$$\left(\frac{\tau_d}{f_{v,d}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{drill,d}}{f_{v,d}}\right)^2 \leq 1 \qquad (NA.132)$$

$$\frac{\sigma_{t,90,d}}{f_{t,90,d}} + \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} \leq 1 \qquad (NA.133)$$

$$\frac{\sigma_{c,90,d}}{f_{c,90,d}} + \frac{\tau_{R,d}}{f_{R,d}} \leq 1 \qquad (NA.134)$$

Bild 8.37: Relevante Spannungsnachweise

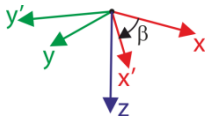
Wenn die Spannungsnachweise erfüllt sind, muss noch der Verformungsnachweis gemäß der jeweiligen Norm erfolgen.

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

9. Anhänge

9.1 Transformationsgleichungen

Es werden im Folgenden die Gleichungen, die für die Transformation der Spannungen, Dehnungen und Steifigkeitsmatrizen an der Drehung des Koordinatensystems x, y, z zum Koordinatensystem x', y', z des Winkels β zusammengefasst. Der Winkel β ist wie folgt definiert:



Die auf das System x, y, z bezogenen Größen wie Spannungen, Dehnungen und Elemente der Steifigkeitsmatrizen werden ohne Strich (′), die Größen des Systems x', y', z mit Strich gekennzeichnet. Es gelten folgende Transformationsverhältnisse für die ebenen Spannungen und Dehnungen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{3\times3}^{-\mathrm{T}}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{\mathrm{b+t/c,0}} \\ \sigma_{\mathrm{b+t/c,90}} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \end{Bmatrix} \tag{8.11}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{3\times3}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{8.12}$$

Die Steifigkeitsmatrix wird gemäß folgender Formel transformiert:

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}_{2\times2}^{\mathrm{T}} \mathbf{d}' \mathbf{T}_{2\times2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d}' = \mathbf{T}_{2\times2}^{-\mathrm{T}} \mathbf{d} \mathbf{T}_{2\times2}^{-1} \tag{8.13}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{sym.} & & d_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & 0 \\ & d'_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & d'_{33} \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

Es gelten folgende Transformationsverhältnisse für Schubspannungen und Dehnungen

$$\begin{Bmatrix} \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{2\times2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_d \\ \tau_{\mathrm{R}} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{Bmatrix} \tag{8.15}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{yz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{2\times2}} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{8.16}$$

Die Steifigkeitsmatrix wird gemäß folgender Formel transformiert:

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_{2\times2}^{\mathrm{T}} \mathbf{G}' \mathbf{T}_{2\times2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{G}' = \mathbf{T}_{2\times2} \mathbf{G} \mathbf{T}_{2\times2}^{\mathrm{T}} \tag{8.17}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \text{sym.} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} G'_{11} & 0 \\ 0 & G'_{22} \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

9.2 Prüfung der positiven Definitheit der Steifigkeitsmatrix

Die positive Definitheit der Gesamtsteifigkeitsmatrix wird für die Berechnung benötigt.

Im Allgemeinen nimmt die Gesamtsteifigkeitsmatrix folgende Form an:

$$\mathbf{D}_{8\times 8} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Biegung}} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Exzentrizität}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2\times 2}^{\text{Schub}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Exzentrizität}} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Membran}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & & & \text{sym.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & & & \text{sym.} & \text{sym.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & & & \\ & & & & D_{55} & & & \\ & & & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & \text{sym.} & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

Die folgenden Bedingungen werden überprüft:

1. Die Matrix $\mathbf{D}$ ist positiv definit (d. h. alle ihre führenden Hauptminoren sind positiv).
2. Ferner müssen alle Submatrizen $\mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Biegung}}$, $\mathbf{D}_{2\times 2}^{\text{Schub}}$, $\mathbf{D}_{3\times 3}^{\text{Membran}}$ in einem engeren Sinn positiv definit sein, d.h. all führenden Hauptminoren müssen folgende Bedingung erfüllen:

$$\det \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{ii} \end{bmatrix} \geq \sqrt{0.001} \prod_{i=1} |D_{ii}|, \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.20}$$

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

A Literatur

[1] ALTENBACH, Holm ; ALTENBACH, Johannes; NAUMENKO, Konstantin. Ebene Flächentragwerke. Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten. Springer Verlag, 2008. 491 S.

[2] DIN 1052. Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken: Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau. 2008. 239 S.

[3] ČSN 73 1702. Navrhování, výpočet a posuzování dřevěných stavebních konstrukcí : Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha : Český normalizační institut, November 2007. 174 S.

[4] HUBER M.T.: The theory of crosswise reinforced ferroconcrete slabs and its application to various constructional problems involving rectangular slabs, Der Bauingenieur, 1923, 4(12), 354-360 and 4(13), 392-395.

B Index

A

Aufruf von RF-LAMINATE ... 6
Ausdruckprotokoll ... 65
Ausnutzung ... 56, 62

B

Bach ... 48
Basisangaben ... 25
Beenden von RF-LAMINATE ... 25, 54
Bemessen ... 26
Benutzerdefiniertes Materialmodell ... 15
Benutzerprofil ... 68
Berechnung ... 25, 41
Berechnung starten ... 53
Bibliothek ... 32, 34
Blättern in Masken ... 25
Brettsperrholz ohne Schmalseitenverklebung ... 30

C

Charakteristische Festigkeit ... 36

D

Details ... 25, 41
Details für Schichtenaufbau ... 30
Dezimalstellen ... 68
Durchbiegung ... 28, 52

E

Eingabemasken ... 25
Einheiten ... 68
Einwirkungskombination ... 52
Ergebnisse ... 49, 54
Export ... 34, 69

F

FE-Netz-Punkt ... 49, 55
Filter ... 61
Formelzeichen ... 8

G

Gebrauchstauglichkeit-Grenzwerte ... 52
Gebrauchstauglichkeitsparameter ... 39
Grafik ... 25, 34
Grafikausdruck ... 65
Grenzspannung ... 56
Grenzwerte ... 28

H

Hybrides Materialmodell ... 15

I

Importieren ... 34
Installation ... 6
Isotropes Materialmodell ... 15

K

Kirchhoff ... 47
Kommentar ... 26
Koordinaten ... 55

L

Lasteinwirkungsdauer ... 37
Lastfall ... 25, 27, 28, 37

M

Materialbeiwerte ... 50
Materialbibliothek ... 31, 34
Materialfestigkeit ... 36
Materialkennwerte ... 29
Materialmodell ... 10, 26
Max. Spannung/Ausnutzung belastungsweise ... 55
Max. Spannung/Ausnutzung flächenweise ... 60
Maximale Verschiebung ... 62
Mindlin ... 47
Mises ... 48
Modifikationsbeiwert ... 37, 51, 56

N

Navigator ... 25, 54
Norm ... 26, 50
Nutzungsklasse ... 37

O

Orthotropes Materialmodell ... 10

P

Panel ... 7
Parallelfläche ... 40
Platten-Biegetheorie ... 47
Positiv definit ... 41, 100

R

Rankine ... 48
Rasterpunkt ... 49, 55
Referenzebene ... 40
Referenzlänge ... 39, 62

Programm RF-LAMINATE © 2013 Dlubal Software GmbH

S

Schubverbund zwischen Schichten..... 19, 30, 74
Spannung 82
Spannungen 42
Spannungen punktweise 60
Spannungskomponenten 65
Steifigkeitsabminderung 31
Steifigkeitsmatrix 71
Stückliste 63
Symbole 8

T

Teilsicherheitsbeiwert 28
Tresca 48

U

Unverformtes System 40

V

Verformungsnachweis 39
Vergleichsspannung 48
Verschobene Referenzebene 40