
Die Wölbkrafttorsion - Theorie, Anwendung und Implementierung in Software zur Tragwerksplanung

Masterarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Engineering
im Studiengang Bauingenieurwesen
an der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umwelttechnik
der Technischen Hochschule Köln

vorgelegt von: Martin Erfurt
Matrikel-Nr.: 11134675
Adresse: Pestalozzistr. 58
79540 Lörrach
martin.erfurt@smail.th-koeln.de

eingereicht bei: Prof. Dr.-Ing. Ansgar Neuenhofer
Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Johannes Lange

Lörrach, 09.07.2024

Abstract

In der Elastostatik werden Torsionsbeanspruchungen meist nach der St. Venantschen Torsionstheorie statisch ausgewertet. Dabei wird ein kreisrunder Balkenquerschnitt betrachtet, der sich ausschließlich verdreht, sodass der Querschnitt eben bleibt. In der Praxis, insbesondere im Stahlbau, werden jedoch meist dünnwandige Profile unter Torsion beansprucht. Hierbei stellt sich neben der reinen Verdrehung auch eine komplexe Verwölbung des Querschnitts in der Querschnittsebene ein. Wenn diese Verwölbungen behindert werden, entstehen Wölbspannungen. Zur Berechnung dieser Wölbspannungen wurde die St. Venantsche Torsionstheorie zur Wölbkrafttorsionstheorie erweitert. Ziel dieser Arbeit ist es, die Wölbkrafttorsionstheorie anschaulich aufzubereiten, um einfache statische Systeme händisch zu berechnen und die Ergebnisse mit der Modellierung und Implementierung in kommerzieller Statiksoftware zu vergleichen.

Inhalt

Abstract	I
Tabellenverzeichnis	IV
Abbildungsverzeichnis	VI
1 Einleitung	1
2 Balkentheorie	4
2.1 Modellannahmen	4
2.2 Gleichgewichtsbedingung	5
2.3 Äquivalenzbedingung	6
2.4 Kinematische Beziehung	8
2.5 Elastizitätsgesetz für Biegemoment und Querkraft	10
2.6 Differenzialgleichung der Biegelinie	12
2.7 Spannungen infolge Biegemoment und Querkraft	13
3 St. Venantsche Torsion (Primäre Torsion)	14
3.1 Modellannahmen	14
3.2 Gleichgewichtsbedingungen	15
3.3 Äquivalenzbedingung	16
3.4 Kinematische Beziehung	17
3.5 Elastizitätsgesetz der St. Venantschen Torsion	18
3.6 Differenzialgleichung der St. Venantschen Torsion	19
3.7 Spannungen infolge St. Venantschen Torsion	20
4 Wölbkrafttorsion (Sekundäre Torsion)	22
4.1 Modellannahmen	22
4.2 Gleichgewichtsbedingung	25
4.3 Äquivalenzbedingungen	27
4.4 Kinematische Beziehung	28
4.5 Elastizitätsgesetz der Wölbkrafttorsion	39
4.6 Differenzialgleichung der Wölbkrafttorsion	42
4.7 Spannungen infolge Wölbkrafttorsion	44
5 Handrechnung einfacher Balken unter Wölbkrafttorsionsbeanspruchung	45
5.1 Zielsetzung	45
5.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger	46
5.2.1 Aufgabenstellung	46
5.2.2 Einheitsverwölbung $\omega A(s)$	47
5.2.3 Wölbfläche $S\omega A(s)$	51
5.2.4 Wölbwiderstand $I\omega A$ und Torsionsflächenmoment 2. Grades IT	54
5.2.5 Schnittgrößenverläufe $MT_1(x)$, $MT_2(x)$ und $M\omega(x)$	57
5.2.6 Spannungen $\tau_{1s,x}$, $\sigma_{2A}(s,x)$ und $\tau_{2A}(s,x)$	62
5.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm	65

5.3.1 Aufgabenstellung	65
5.3.2 Schnittgrößenverläufe $MT1(x)$, $MT2(x)$ und $M\omega(x)$	66
5.3.3 Spannungen $\tau1s, x$, $\sigma2A(s, x)$ und $\tau2A(s, x)$	72
6 Vergleichsrechnung mit Stabwerksprogramm	75
6.1 Zielsetzung	75
6.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger	77
6.2.1 Modell	77
6.2.2 Eingabe	78
6.2.3 Schnittgrößenverläufe	79
6.2.4 Spannungen	82
6.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm	87
6.3.1 Modell	87
6.3.2 Eingabe	88
6.3.3 Schnittgrößenverläufe	91
6.3.4 Spannungen	93
7 Vergleichsrechnung mit der Finite-Elemente-Methode	96
7.1 Zielsetzung	96
7.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger	97
7.2.1 Modell	97
7.2.2 Eingabe	98
7.2.3 Verformungsfigur	106
7.2.4 Spannungen	107
7.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm	110
7.3.1 Modell	110
7.3.2 Eingabe	111
7.3.3 Verformungsfigur	113
7.3.4 Spannungen	114
8 Diskussion	119
8.1 Stabwerksprogramm RSTAB 9	119
8.2 Finite-Elemente-Methode RFEM 6	120
9 Fazit und Ausblick	121
Literaturverzeichnis	122
Erklärung	123

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1-1: Vorgehen zur Herleitung der Grundgleichungen [1]	1
Tabelle 5-1: Tabellenwerk zur Berechnung der Wölbkrafttorsionsschnittgrößen, Beispiel 1 [4]	57
Tabelle 5-2: Knotenergebnisse der Wölbkrafttorsion, Beispiel 1	59
Tabelle 5-3: Vergleich verschiedener Wölbeinspannungen, Beispiel 2	67
Tabelle 5-4: Knotenergebnisse der Wölbkrafttorsion, Beispiel 2	69
Tabelle 6-1: Vergleich der Querschnittsgrößen, Beispiel 1	78
Tabelle 6-2: Vergleich der primären Torsion $MT1$, Beispiel 1	80
Tabelle 6-3: Vergleich der sekundären Torsion $MT2$, Beispiel 1	80
Tabelle 6-4: Vergleich der gesamten Torsion MT , Beispiel 1	81
Tabelle 6-5: Vergleich des Wölbbimoments $M\omega$, Beispiel 1	81
Tabelle 6-6: Spannungspunkte für τ_1, τ_2, σ_2 , Beispiel 1	83
Tabelle 6-7: Vergleich der primären Schubspannung τ_1 bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	85
Tabelle 6-8: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	85
Tabelle 6-9: Vergleich der gesamten Schubspannung τ bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	86
Tabelle 6-10: Vergleich der sekundären Normalspannung σ_2 bei $x = 100$ cm, Beispiel 1	86
Tabelle 6-11: Vergleich der Stabverdrehung δx für unterschiedliche Wölbeinspannungen, Beispiel 2	90
Tabelle 6-12: Vergleich der primären Torsion $MT1$, Beispiel 2	91
Tabelle 6-13: Vergleich der sekundären Torsion $MT2$, Beispiel 2	91
Tabelle 6-14: Vergleich der gesamten Torsion MT , Beispiel 2	92
Tabelle 6-15: Vergleich des Wölbbimoments $M\omega$, Beispiel 2	92
Tabelle 6-16: Vergleich der primären Schubspannung τ_1 bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	93
Tabelle 6-17: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	93
Tabelle 6-18: Vergleich der gesamten Schubspannung τ bei $x = 200$ cm, Beispiel 294	
Tabelle 6-19: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	95
Tabelle 6-20: Vergleich der sekundären Normalspannung σ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	95

Tabelle 7-1: Festlegung der Diskretisierung durch ausprobieren, Beispiel 1.....	105
Tabelle 7-2: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	107
Tabelle 7-3: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1.....	108
Tabelle 7-4: Vergleich der Normalspannung σ_x bei $x = 100$ cm, Beispiel 1	109
Tabelle 7-5: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	114
Tabelle 7-6: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2.....	115
Tabelle 7-7: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	116
Tabelle 7-8: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2.....	117
Tabelle 7-9: Vergleich der Normalspannung σ_x bei $x = 0$ cm, Beispiel 2.....	118

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1: Zusammenhänge und Beziehungen der Elastostatik [1]	3
Abbildung 2-1: Balken mit einer beliebigen Streckenlast $q(x)$ [Quelle: Skript zu Baustatik 1]	5
Abbildung 2-2: Stabelement dx mit Streckenlast $q(x)$ [Quelle: Skript zu Baustatik 1]	5
Abbildung 2-3: Normalspannung infolge Biegung [Quelle: Skript zu Baustatik 1]	7
Abbildung 2-4: Schubspannung infolge Querkraft [Quelle: Skript zu Baustatik 1]	7
Abbildung 2-5: Balkenelement dx unter reiner Biegung [3]	8
Abbildung 2-6: Schubverzerrung eines Volumenelements dV	9
Abbildung 3-1: Betrachtetes Modell der St. Venantschen Torsion [3]	14
Abbildung 3-2: Stabelement dx mit Torsionsstreckenmoment [2]	15
Abbildung 3-3: Torsionsmoment als resultierende der Schubspannungen [Quelle: Skript zu Baustatik 2]	16
Abbildung 3-4: Stabelement dx mit Verdrehung $d\vartheta$	17
Abbildung 3-5: Schubfluss in einem I-Profil [3]	21
Abbildung 3-6: Korrekturbeiwert η für verschiedene Profile [2]	21
Abbildung 4-1: Wölbfreie, quasi-wölbfreie und nicht wölbfreie Querschnitte [Quelle: Schineis, Torsion, FH München 1971]	23
Abbildung 4-2: Freie Verwölbungen an Stellen A für verschiedene statische Systeme [4]	24
Abbildung 4-3: Spannungsverteilung der sekundären Normalspannung σ_2 und dem resultierenden sekundären Schubspannung τ_2 [4]	26
Abbildung 4-4: Schubfluss der St. Venantschen Torsion und der Wölbkrafttorsion [4]	26
Abbildung 4-5: Betrachtetes Modell für die Herleitung der Grundformeln der Wölbkrafttorsion [2]	27
Abbildung 4-6: Verdrehung des Querschnitts und Verschiebung eines Querschnittspunktes [2]	28
Abbildung 4-7: Schubgleitung eines Elements $dx - ds$ der Profilwandung [2]	29
Abbildung 4-8: Zur Bestimmung der Grundverwölbung [2]	30
Abbildung 4-9: Beispiel eines dünnwandigen geschlitzten Quadratquerschnitts [2] ..	32
Abbildung 4-10: Verwölbung des Querschnitts um die Drehachse S [2]	33
Abbildung 4-11: Verwölbung des Querschnitts um die Drehachse B [2]	34

Abbildung 4-12: Darstellung der Sektorfläche $AB * \text{zum Punkt } 2$	35
Abbildung 4-13: Spannungszustand eines Elements $dx - ds$ der Proflwandung [2]	37
Abbildung 4-14: Darstellung der Flächenintegrale [4]	40
Abbildung 4-15: Vorgefertigte Lösungen für die Wölbkrafttorsionsschnittgrößen für ausgewählte statische Systeme [3]	43
Abbildung 5-1: Querschnittsdimension, Beispiel 1	47
Abbildung 5-2: Ermittlung der Sektorfläche $AM * s$ an Punkt $P1$, Beispiel 1	48
Abbildung 5-3: Einheitsverwölbung $\omega M, 1s$ an Punkt $P1$, Beispiel 1	49
Abbildung 5-4: Endgültiger Verlauf der Einheitsverwölbung ωMs , Beispiel 1	50
Abbildung 5-5: Einheitsverwölbung ωMs links und einzutragende Wölbfläche $S\omega Ms$ rechts, Beispiel 1	51
Abbildung 5-6: Wölbfläche $S\omega M, 5s$ an Punkt $P5$, Beispiel 1	52
Abbildung 5-7: Wölbfläche $S\omega M, 6s$ an Punkt $P6$, Beispiel 1	53
Abbildung 5-8: Endgültiger Verlauf der Wölbfläche $S\omega M(s)$, Beispiel 1	53
Abbildung 5-9: Vergleich der Querschnittsabmessungen, Beispiel 1	55
Abbildung 5-10: Schnittgrößenverlauf $MT1(x)$, Beispiel 1	60
Abbildung 5-11: Schnittgrößenverlauf $MT2(x)$, Beispiel 1	60
Abbildung 5-12: Gesamter Schnittgrößenverlauf $MT(x)$, Beispiel 1	61
Abbildung 5-13: Schnittgrößenverlauf $M\omega(x)$, Beispiel 1	61
Abbildung 5-14: Primärer Schubspannungsverlauf $\tau1(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1	62
Abbildung 5-15: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau2M(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1	63
Abbildung 5-16: Gesamter Schubspannungsverlauf $\tau1 + 2(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1	63
Abbildung 5-17: Sekundärer Normalspannungsverlauf $\sigma2Ms, x$ bei $x = 100 \text{ cm}$, Beispiel 1	64
Abbildung 5-18: Schnittgrößenverlauf $MT1$, Beispiel 2	70
Abbildung 5-19: Schnittgrößenverlauf $MT2$, Beispiel 2	70
Abbildung 5-20: Gesamter Schnittgrößenverlauf MT , Beispiel 2	71
Abbildung 5-21: Schnittgrößenverlauf $M\omega$, Beispiel 2	71
Abbildung 5-22: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau2M(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 2	72

Abbildung 5-23: Sekundärer Normalspannungsverlauf $\sigma_2 M(s, x)$ bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	73
Abbildung 5-24: Primärer Schubspannungsverlauf $\tau_1(s, x)$ bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	73
Abbildung 5-25: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau_2 M(s, x)$ bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	74
Abbildung 5-26: Gesamter Schubspannungsverlauf $\tau_1 + 2(s, x)$ bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	74
Abbildung 6-1: Basiseinstellung in RSTAB 9 zur Berechnung mit Wölbkrafttorsion, Beispiel 1	76
Abbildung 6-2: Querschnittseinstellung für die Wölbkrafttorsion, Beispiel 1	78
Abbildung 6-3: Ergebnisdarstellung für die lokalen Verformungen und Schnittgrößen, Beispiel 1	79
Abbildung 6-4: Auswahl der Spannungspunkte nach dünnwandiger Theorie, Beispiel 1	82
Abbildung 6-5: Ergebnisdarstellung für die Spannungen, Beispiel 1	84
Abbildung 6-6: Volumendarstellung ohne Wölbeinspannung, Beispiel 2	88
Abbildung 6-7: Stabbearbeitung zur Eingabe von Quersteifen, Beispiel 2	89
Abbildung 6-8: Eingabe der starren Wölbeinspannung, Beispiel 2	89
Abbildung 6-9: Volumendarstellung mit starrer Wölbeinspannung, Beispiel 2	90
Abbildung 7-1: Berechnung der Volumenelemente in RFEM 6, Beispiel 2 [Quelle: Onlinehandbuch RFEM 6]	96
Abbildung 7-2: Flächeneingabe durch Auswahl der Profilabgrenzungen, Beispiel 1	98
Abbildung 7-3: Flächeneinstellung, Beispiel 1	99
Abbildung 7-4: Extrusion der Flächen zu einem Volumenkörper, Beispiel 1	99
Abbildung 7-5: Extrudierte Trägerhälften zu einem gesamten Volumenkörper, Beispiel 1	100
Abbildung 7-6: Eingabe der Rollenlager, Beispiel 1	101
Abbildung 7-7: Eingabe der „Gabeln“, Beispiel 1	102
Abbildung 7-8: Horizontale Lagerung in Trägerlängsrichtung, Beispiel 1	103
Abbildung 7-9: Eingabe der Linienlasten, Beispiel 1	104
Abbildung 7-10: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	107
Abbildung 7-11: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1	108
Abbildung 7-12: Ermittlung des FE-Knotens für σ_x bei $x = 100$ cm, Beispiel 1	109

Abbildung 7-13: Extrusion der Fläche zu einem Volumenkörper, Beispiel 2	111
Abbildung 7-14: Abgeschlossenes Volumenmodell, Beispiel 2	112
Abbildung 7-15: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	114
Abbildung 7-16: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2	115
Abbildung 7-17: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	116
Abbildung 7-18: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	117
Abbildung 7-19: Ermittlung des FE-Knotens für σ_x bei $x = 0$ cm, Beispiel 2	118

1 Einleitung

„Wer sich der Praxis hingibt ohne Wissenschaft, ist wie der Steuermann, der ein Schiff ohne Ruder und Kompass besteigt und nie weiß, wohin er fährt.“

Leonardo da Vinci (1452 - 1519), italienisches Universalgenie, Maler, Bildhauer, Baumeister, Zeichner und Naturforscher.

Da Vincis systematische und wissenschaftliche Herangehensweise an Ingenieursprobleme sowie seine Fähigkeit, kreative und praktische Lösungen zu entwickeln, machen ihn zu einem der bedeutendsten Ingenieure, Erfinder und Vorbilder der Geschichte. Seine Vorgehensweise lässt sich in die Schritte Beobachtung, theoretische Grundlage, Experimente und Anwendung zusammenfassen. Im Bauingenieurwesen, insbesondere bei der Anwendung kommerzieller Statiksoftware, wird dieser systematische Ansatz jedoch oft umgekehrt. Durch das Anklicken weniger Kästchen wird schnell ein statisches Dokument erstellt, ohne dass der Anwender genau versteht, was im Hintergrund berechnet wird. Dadurch wird oft versäumt, die Plausibilität der Ergebnisse zu hinterfragen und manuell nachzurechnen.

Während des Bauingenieurstudiums werden die wichtigsten theoretischen Grundlagen der Elastostatik zunächst an einem Einfeldträger gelehrt. Die statische Auswertung eines Einfeldträgers ist umfangreicher als zunächst vermutet. Ein Einfeldträger kann auf Zug/Druck, Biegung, Schub und Torsion belastet werden. Durch die Bildung des Gleichgewichts lassen sich Zusammenhänge zwischen Belastung und Schnittgrößen herstellen. Betrachtet man die Schnittgrößen in der Querschnittsebene, können die Beanspruchungen, also Spannungen, berechnet werden. Anschließend lässt sich das Elastizitätsgesetz ableiten, indem der Zusammenhang von Beanspruchung und Verzerrung gebildet wird. Schließlich können aus den Verzerrungen die Deformationen bestimmt werden. Diese Vorgehensweise lässt sich anschaulich in Abbildung 1-1 und Tabelle 1-1 zusammenfassen. Nach diesem Schema werden die Grundgleichungen der Balken- und St. Venantschen Torsionstheorie hergeleitet.

Tabelle 1-1: Vorgehen zur Herleitung der Grundgleichungen [1]

Belastungen	→	Schnittgrößen	Gleichgewichtsbedingung
Schnittgrößen	→	Beanspruchungen	Äquivalenzbedingung
Beanspruchungen	→	Verzerrungen	Elastizitätsgesetz
Verzerrungen	→	Deformationen	Kinematische Beziehung

Wie zu sehen ist, wird auch für die statische Berechnung zunächst die theoretische Grundlage gelegt, bevor die Anwendung erfolgt.

Ein besonderes Problem im Bauingenieurwesen ist, dass das Thema Torsion oft zu kurz kommt. Bei der St. Venantschen Torsionstheorie wird von einem kreisrunden Balkenquerschnitt ausgegangen, der sich unter reiner Torsionsbeanspruchung ausschließlich verdreht. Im Stahlbau werden jedoch meist dünnwandige Profile unter Torsion beansprucht, wobei sich neben der reinen Verdrehung auch eine Verwölbung des Querschnitts in der Querschnittsebene einstellt. Durch die Behinderung der Verwölbung entstehen Wölbspannungen, die in sekundäre Normalspannungen σ_2 und sekundäre Schubspannungen τ_2 unterteilt werden. Aus Sicherheitsgründen ist es daher erforderlich, diese nachzuweisen. Diese Erweiterung der St. Venantschen Torsionstheorie ist als Wölbkrafttorsionstheorie bekannt und fand erstmals im Leichtbau Anwendung [2].

Ziel dieser Arbeit ist es, zunächst die herkömmliche Balkentheorie zur Behandlung von Biege- und Schubbeanspruchungen sowie Beanspruchungen durch St. Venantsche Torsion darzustellen. Anschließend wird das Wölbkrafttorsionsproblem erläutert und dessen theoretische Grundlagen stark vereinfacht dargelegt. Abschließend wird die Wölbkrafttorsion anhand eines einfachen Beispiels händisch berechnet, die Implementierung in den DLUBAL-Programmen RSTAB 9 (als Stabtragwerk) und RFEM 6 (als FEM-Modell) vorgestellt und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Die Balkentheorie, die St. Venantsche Torsionstheorie und die Wölbkrafttorsionstheorie werden gemäß der in Tabelle 1-1 und Abbildung 1-1 dargestellten Gliederung aufbereitet.

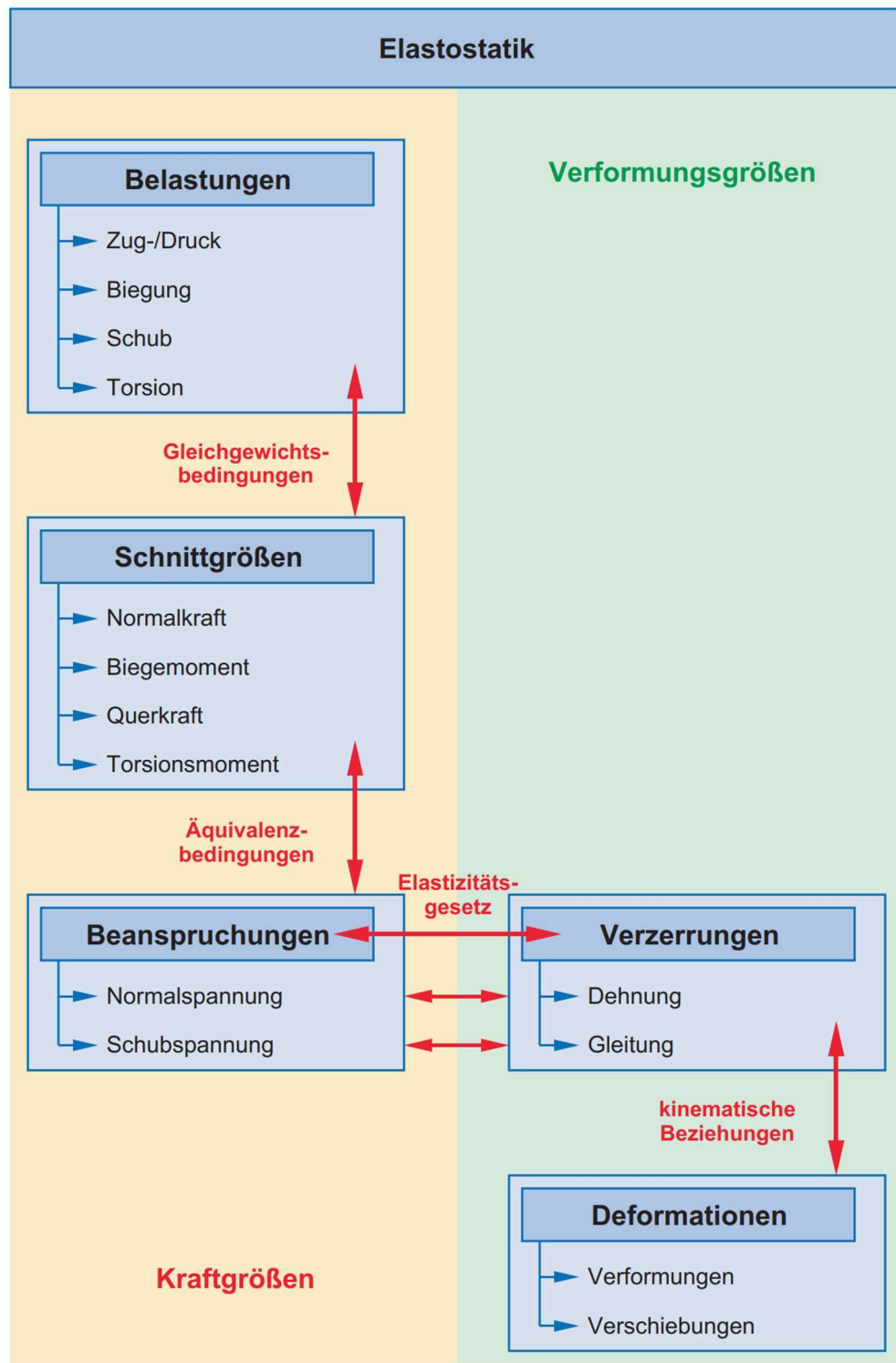


Abbildung 1-1: Zusammenhänge und Beziehungen der Elastostatik [1]

2 Balkentheorie

2.1 Modellannahmen

Es gibt unterschiedliche Herangehensweisen, wobei sich zwei Modelle durchgesetzt haben: Der schubstarre Balken nach Euler-Bernoulli und der schubweiche Balken nach Timoshenko. Letzteres Modell stellt eine Erweiterung dar, indem es Schubverzerrungen im Querschnitt berücksichtigt. Im Bauingenieurwesen findet jedoch hauptsächlich der Euler-Bernoulli-Balken Anwendung, da aufgrund der Bauteilabmessungen Schubverzerrungen oft vernachlässigt werden können. Daher wird hier der Euler-Bernoulli-Balken betrachtet, woraus die Bernoulli-Hypothesen folgen.

1. Bernoulli-Hypothese: Senkrechtbleiben der Querschnitte
2. Bernoulli-Hypothese: Ebenbleiben der Querschnitte (keine Verwölbungen)

Weitere Annahmen für das Modell sind:

- Seine Länge ist viel größer als der Querschnitt
- Eine annähernd gerade Stabachse
- Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes aus Gleichung (2-1) und Gleichung (2-2)
- Nur ein eindimensionaler Spannungszustand tritt auf
- Die Verformungen, die auftreten, sind gering

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-1)$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2-2)$$

2.2 Gleichgewichtsbedingung

Abbildung 2-1 zeigt einen Balken, der durch eine beliebige Streckenlast $q(x)$ belastet wird. Ein infinitesimales Stabelement der Länge dx wird aus dem Balken herausgeschnitten und in Abbildung 2-2 dargestellt. Die Streckenlast $q(x)$ kann als konstant angenommen werden, sodass das Moment M und die Querkraft V entlang der Länge dx von der linken zur rechten Seite eine infinitesimale Änderung erfahren. Zur Vollständigkeit wird auch die Normalkraft N eingeführt, die dieselbe infinitesimale Änderung aufgrund einer Streckenlast $n(x)$ (in den Abbildungen nicht eingezeichnet) erfährt. Durch Aufstellen des Gleichgewichts ergeben sich nach Umformen die Gleichgewichtsbedingungen für die Balkentheorie.

$$\begin{aligned} \sum N &= 0 = -N + n(x) \cdot dx + \left(N + \frac{dN}{dx} \cdot dx \right) \\ \rightarrow N' &= -n(x) \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \sum V &= 0 = V - q(x) \cdot dx - \left(V + \frac{dV}{dx} \cdot dx \right) \\ \rightarrow Q' &= -q(x) \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \sum M &= 0 = -M - V \cdot dx + q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} + \left(M + \frac{dM}{dx} \cdot dx \right) \\ \rightarrow M' &= Q \end{aligned} \quad (2-5)$$

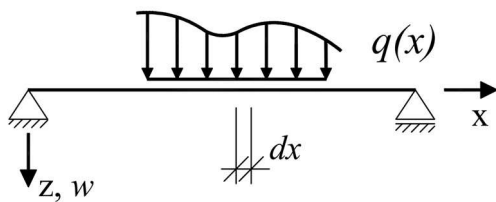


Abbildung 2-1: Balken mit einer beliebigen Streckenlast $q(x)$ [Quelle: Skript zu Baustatik 1]

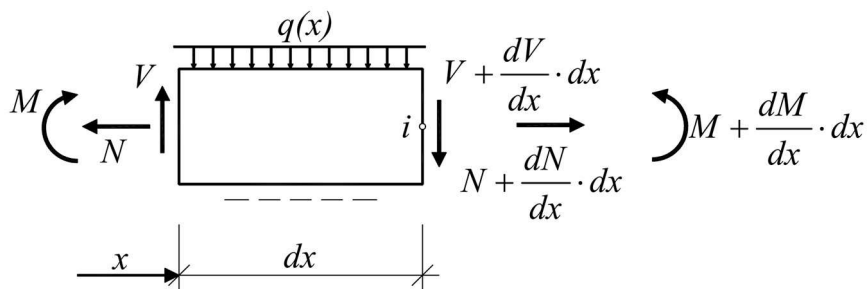


Abbildung 2-2: Stabelement dx mit Streckenlast $q(x)$ [Quelle: Skript zu Baustatik 1]

2.3 Äquivalenzbedingung

Infolge eines inneren Biegemoments M_y ergibt sich eine linear entlang der Balkenhöhe verlaufende Normalspannungsverteilung $\sigma_x(z)$, siehe Abbildung 2-3. Dabei erfährt die Balkenunterseite eine Zug- und die Oberseite eine Druckspannung. Werden die Normalspannungen über die Querschnittsfläche A integriert, erhält man die Normalkraft N . Bei reiner Biegung ist die resultierende Normalkraft $N = 0$.

$$N = \int_A \sigma_x(z) \cdot dA \quad (2-6)$$

Das Biegemoment M_y wird berechnet, indem die Normalkraft N mit dem Hebelarm z über die gesamte Querschnittsfläche A integriert wird.

$$M_y = \int_A z \cdot dN = \int_A z \cdot \sigma_x(z) \cdot dA \quad (2-7)$$

Infolge einer inneren Querkraft V_z entstehen Schubspannungen $\tau_x(z)$ in der gleichen Richtung, siehe Abbildung 2-4. Die Verteilung der Schubspannungen $\tau_x(z)$ über die Breite y wird als konstant angenommen. Die Verteilung über die Höhe z hängt jedoch stets von der Querschnittsform ab. Werden die Schubspannungen über die Querschnittsfläche A integriert, erhält man die Querkraft V_z .

$$V_z = \int_A \tau_x(z) \cdot dA \quad (2-8)$$

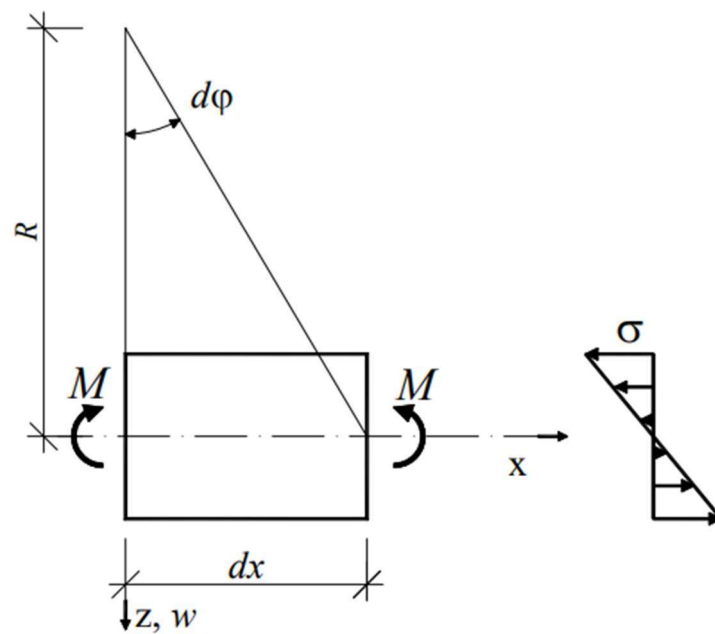


Abbildung 2-3: Normalspannung infolge Biegung [Quelle: Skript zu Baustatik 1]

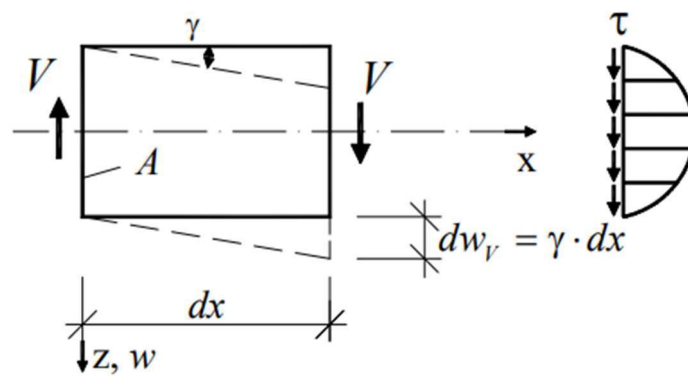


Abbildung 2-4: Schubspannung infolge Querkraft [Quelle: Skript zu Baustatik 1]

2.4 Kinematische Beziehung

Das Ziel ist es eine Beziehung zwischen der Dehnung ε und der Verformung w herzustellen. Abbildung 2-5 zeigt einen Balken, der unter reiner Biegung beansprucht wird. Die neutrale Faser verläuft in der Mitte des Balkens. Da die Querschnittsfläche A immer senkrecht zur neutralen Faser steht (1. Bernoulli-Hypothese) gilt für die Verdrehung $\varphi(x)$ und die Neigung $w'(x)$ der folgende Zusammenhang:

$$\varphi(x) = -w'(x) \quad (2-9)$$

Die Durchbiegung $w(x)$ ist nach unten positiv, weshalb die Neigung $w'(x)$ ein negatives Vorzeichen erhält. Da der Querschnitt A eben bleibt (2. Bernoulli-Hypothese), kann zur Beschreibung der Verschiebung u in Richtung der x -Achse in jeder beliebigen Querschnittshöhe z die Verdrehung $\varphi(x)$ verwendet werden. Setzt man (2-9) ein, erhält man:

$$u(x, z) = \varphi(x) \cdot z = -w'(x) \cdot z \quad (2-10)$$

Die zugehörige Dehnung $\varepsilon(x, z)$ an der Unterseite des Balkens lässt sich mit der Verschiebung $u(x, z)$ ausdrücken:

$$\varepsilon(x, z) = \frac{du(x, z)}{dx} = u'(x, z) \quad (2-11)$$

Wird für $u'(x, z)$ die Gleichung (2-10) eingesetzt, ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Dehnung $\varepsilon(x, z)$ und der Krümmung $w''(x)$:

$$\varepsilon(x, z) = -w''(x) \cdot z \quad (2-12)$$

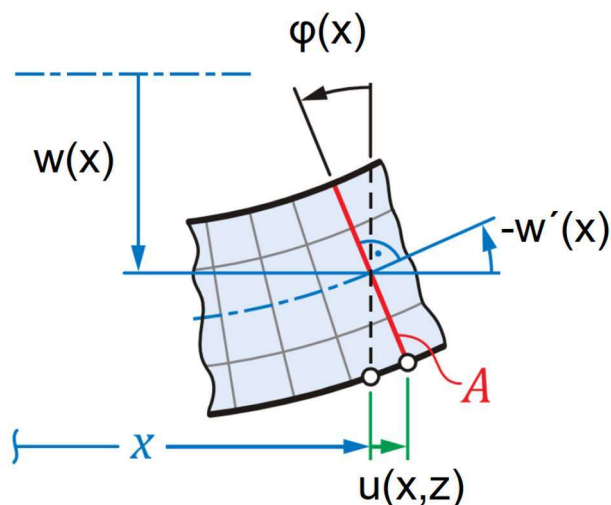


Abbildung 2-5: Balkenelement dx unter reiner Biegung [3]

Zuletzt wird eine Beziehung zwischen dem Gleitwinkel γ und der resultierenden Verformung hergestellt. Obwohl Schubstarrheit aufgrund der Bernoulli-Hypothesen vorausgesetzt wird, müssen zur Berechnung der Querkraft V_z Querschnittsverwölbungen beachtet werden. Abbildung 2-6 zeigt die Schubverzerrung eines Volumenelements dV , wobei die Schubspannungen in x – Richtung und in z – Richtung den gesamten Gleitwinkel γ des Elements bewirken:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi + w' \quad (2-13)$$

Später wird gezeigt, dass ein Gleitwinkel angenommen werden muss, um die Schubstarrheit zu berücksichtigen.

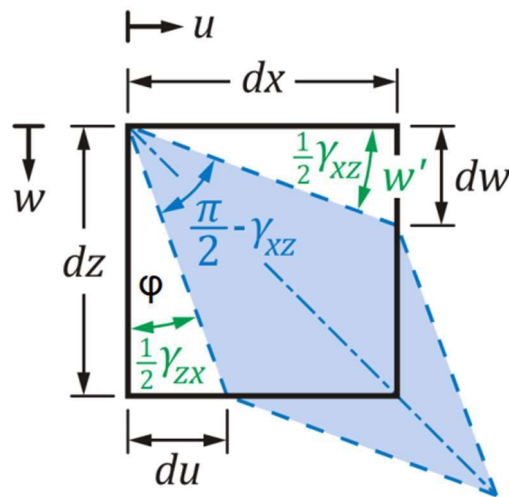


Abbildung 2-6: Schubverzerrung eines Volumenelements dV

2.5 Elastizitätsgesetz für Biegemoment und Querkraft

Setzen man für M_y aus Gleichung (2-7) das Hookesche Gesetz nach Gleichung (2-1) ein, erhält man:

$$M_y = \int_A z \cdot E \cdot \varepsilon \cdot dA \quad (2-14)$$

Durch das Einsetzen der kinematischen Beziehung aus Gleichung (2-12) erhält man:

$$M_y = \int_A z \cdot E \cdot (-w'' \cdot z) \cdot dA = -E \cdot w'' \cdot \int_A z^2 \cdot dA \quad (2-15)$$

Hierbei wird das Flächenmoment 2. Grades I_y für das Integral eingesetzt. Es verbleibt das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment:

$$M_y = -E \cdot I_y \cdot w'' \quad (2-16)$$

Analog zum Biegemoment wird die Querkraft bestimmt, indem für V_z aus Gleichung (2-8) das Hookesche Gesetz für Schub nach Gleichung (2-2) eingesetzt wird.

$$V_z = \int_A G \cdot \gamma \cdot dA \quad (2-17)$$

Die Schubverzerrung aus Gleichung (2-13) wird eingesetzt. Da das Schubmodul G , der Verdrehwinkel φ und die Neigung w' unabhängig von der Querschnittsfläche sind, können diese vor das Integral gezogen werden.

$$V_z = \int_A G \cdot (\varphi + w') \cdot dA = G \cdot (\varphi + w') \cdot \int_A dA \quad (2-18)$$

Aufgrund der durch die Querkraft V_z hervorgerufenen Vorwölbungen bleibt der Querschnitt A nicht mehr eben und verliert somit einen Teil seiner Fläche zur Aufnahme der Querkraft V_z . Die reduzierte Querschnittsfläche zur Aufnahme der Querkraft V_z wird als Schubfläche A_S bezeichnet:

$$V_z = G \cdot A_S \cdot (\varphi + w') \quad (2-19)$$

Die Reduzierung der Querschnittsfläche A wird durch den sogenannten Schubkorrekturfaktor κ berücksichtigt. Das resultierende Elastizitätsgesetz für die Querkraft lautet:

$$V_z = \kappa \cdot G \cdot A \cdot (\varphi + w') \quad (2-20)$$

Die Schubfläche A_S wird in der Praxis näherungsweise ermittelt, wobei kommerzielle Bemessungsprogramme dies unterschiedlich handhaben. Bei geschweißten I-Profilen ist die Bestimmung einfacher: Aufgrund des unterbrochenen Schubflusses zwischen Steg und Flansch kann nur die Stegfläche die Querkraft aufnehmen.

Das Produkt $(\kappa \cdot G \cdot A)$ definiert die Schubsteifigkeit des Balkens. Unter der Annahme der 2. Bernoulli-Hypothese, bei der von ebenen Querschnittsflächen ausgegangen wird und die zuvor beschriebene Verwölbung der Querschnittsfläche vernachlässigt wird, muss die Schubsteifigkeit in Gleichung (2-20) gegen unendlich gehen: $\kappa \cdot G \cdot A \rightarrow \infty$. Trotz dieser unendlich großen Schubsteifigkeit soll eine endliche Querkraft V_z resultieren. Dies erfordert, dass die Schubverzerrung in Gleichung (2-13) gegen Null strebt: $\varphi + w' \rightarrow 0$. Damit bestätigt sich der Zusammenhang aus Gleichung (2-9) für die reine Biegung.

$$\gamma = \varphi + w' = 0 \quad (2-21)$$

2.6 Differenzialgleichung der Biegelinie

Das Elastizitätsgesetz aus Gleichung (2-16) wird nach x differenziert und mit der Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (2-4) und (2-5) verknüpft. Es verbleibt eine gewöhnliche Differenzialgleichung vierter Ordnung. Die gesamte Lösung lautet:

$$\begin{aligned} E \cdot I_y \cdot w'''' &= q \\ E \cdot I_y \cdot w''' &= q \cdot x + C_1 \\ E \cdot I_y \cdot w'' &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \\ E \cdot I_y \cdot w' &= \frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3 \\ E \cdot I_y \cdot w &= \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \end{aligned} \tag{2-22}$$

Mithilfe von Randbedingungen lassen sich Lösungen für die Durchbiegung w und deren Ableitungen w', w'', w''' finden, um die Durchbiegung händisch zu berechnen.

2.7 Spannungen infolge Biegemoment und Querkraft

Um die Biegespannung $\sigma_x(z)$ zu berechnen, wird die kinematische Beziehung aus Gleichung (2-12) in das Elastizitätsgesetz aus Gleichung (2-16) eingesetzt.

$$M_y = -\frac{\sigma_x(z)}{\varepsilon} \cdot I_y \cdot w''(x) \quad (2-23)$$

Hier wird das Hookesche Gesetz aus Gleichung (2-1) eingesetzt.

$$M_y = -\frac{\sigma_x(z)}{-w''(x) \cdot z} \cdot I_y \cdot w''(x) = \sigma_x(z) \cdot \frac{I_y}{z} \quad (2-24)$$

Zuletzt wird nach der Biegespannung $\sigma_x(z)$ umgestellt.

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (2-25)$$

Für die Herleitung der Schubspannung $\tau_x(z)$ wird ein separates Modell benötigt. Da dies jedoch für diese Arbeit kaum relevant ist, wird darauf hier nicht weiter eingegangen. Zusammengefasst ergibt sich für die Schubspannung $\tau_x(z)$:

$$\tau_x(z) = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b} \quad (2-26)$$

3 St. Venantsche Torsion (Primäre Torsion)

3.1 Modellannahmen

Die Torsionstheorie kann nicht mit einem einzigen Berechnungsschema behandelt werden. Durch eine Verdrehung $\vartheta(x)$ des Stabes können abhängig von der Querschnittsform Querschnittsverwölbungen entstehen, bei denen der Querschnitt nicht mehr eben bleibt. Die St. Venantsche Torsion setzt voraus, dass entweder keine Querschnittsverwölbungen auftreten oder dass entstehende Verwölbungen nicht verhindert werden. Verwölbungen werden beispielsweise durch eine Einspannung oder durch einen nicht konstanten Torsionsverlauf entlang der Stabachse verhindert. Weitere Voraussetzungen für die St. Venantsche Torsion sind:

- Eine ideale Stabachse
- Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes
- Erhaltung der Querschnittsform
- Verdrehung um den Schubmittelpunkt
- Die Verformungen, die auftreten, sind gering

Für das Verständnis der Torsionstheorie wird zunächst ein vereinfachtes Modell mit einem wölbfreien Querschnitt gewählt, sodass der Querschnitt eben bleibt. Dies trifft auf rotationssymmetrische Querschnitte zu, wie etwa den Kreis- und Kreisringquerschnitt. Abbildung 3-1 zeigt das Betrachtete Modell mit einem Kreisquerschnitt. Der Drehwinkel $\vartheta(x)$ nimmt entlang der Stabachse x linear zu. Der Zuwachs des Drehwinkels $\vartheta'(x)$ wird als Verdrillung bezeichnet und ist entlang der Stabachse x konstant. Damit ist ein konstanter Torsionsverlauf gewährleistet. Alle Querschnitte sind somit gleichwertig zu betrachten.

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \vartheta'(x) = \text{konst.}$$

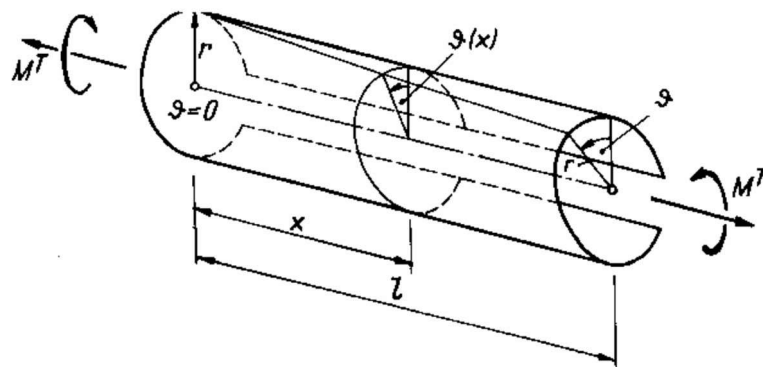


Abbildung 3-1: Betrachtetes Modell der St. Venantschen Torsion [4]

3.2 Gleichgewichtsbedingungen

Abbildung 3-2 zeigt einen Balken, der durch zwei Torsionsmomente M_T und ein beliebiges Torsionsstreckenmoment $m_T(x)$ belastet wird. An einer beliebigen Stelle x des Balkens wird ein infinitesimales Stabelement der Länge dx herausgeschnitten. Das Torsionsstreckenmoment $m_T(x)$ wird als konstant angenommen, sodass das Torsionsmoment M_T entlang der Länge dx von der linken Seite zur rechten Seite eine infinitesimale Änderung um $M_T' \cdot dx$ erfährt. Das Momentengleichgewicht wird um die Achse x gebildet und ergibt nach umformen die Gleichgewichtsbedingung für die Torsion.

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 = m_T \cdot dx + (M_T + M_T' \cdot dx) - M_T \\ \rightarrow M_T' &= -m_T \end{aligned} \quad (3-1)$$

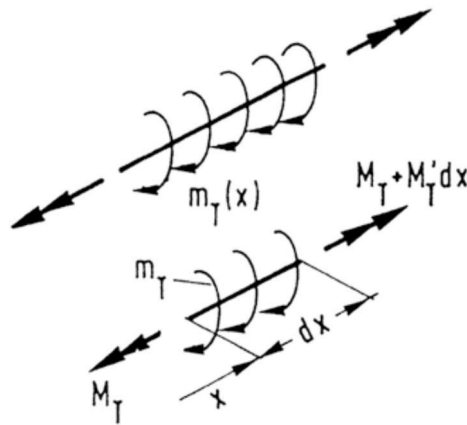


Abbildung 3-2: Stabelement dx mit Torsionsstreckenmoment [2]

3.3 Äquivalenzbedingung

Das Torsionsmoment M_T ergibt sich durch Integration der Schubspannungen τ über den gesamten Querschnitt. Die Schubspannungen τ verlaufen tangential zum Radius r in Drehrichtung. Das durch die Schubspannungen τ_z und τ_y übertragene Torsionsmoment M_T beträgt:

$$M_T = \int_A (\tau_z \cdot y + \tau_y \cdot z) \cdot dA \quad (3-2)$$

Mit dem Radius r vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$M_T = \int_A \tau \cdot r \cdot dA \quad (3-3)$$

Wird ein Schnitt durch den Querschnitt geführt, zeigt sich deutlich, dass die Schubspannungsverteilung linear verläuft und in der Profilmittellinie spannungsfrei ist.

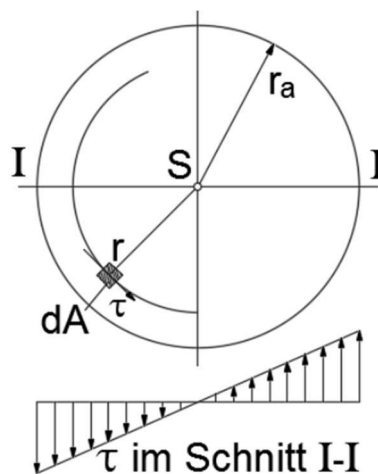


Abbildung 3-3: Torsionsmoment als resultierende der Schubspannungen [Quelle: Skript zu Baustatik 2]

3.4 Kinematische Beziehung

Wie bereits in der Balkentheorie wird ein Zusammenhang zwischen dem Gleitwinkel γ und der Verdrehung ϑ gesucht. Abbildung 3-4 zeigt ein herausgeschnittenes Stabelement der Länge dx und die dazugehörige Verdrehung $d\vartheta$. Durch die Verdrehung $d\vartheta$ wird die ursprünglich aufgespannte Fläche $ACDB$ um den Gleitwinkel γ zu $AC'D'B$ verschoben. Da stets kleine Verformungen betrachtet werden, gilt für den Abschnitt $\overline{CC'}$:

$$\overline{CC'} = \gamma \cdot dx = d\vartheta \cdot r \quad (3-4)$$

Daraus erhält man durch Umstellen eine Beziehung zwischen dem Gleitwinkel γ und der Verdrillung ϑ' :

$$\gamma = \frac{d\vartheta}{dx} \cdot r = \vartheta' \cdot r \quad (3-5)$$

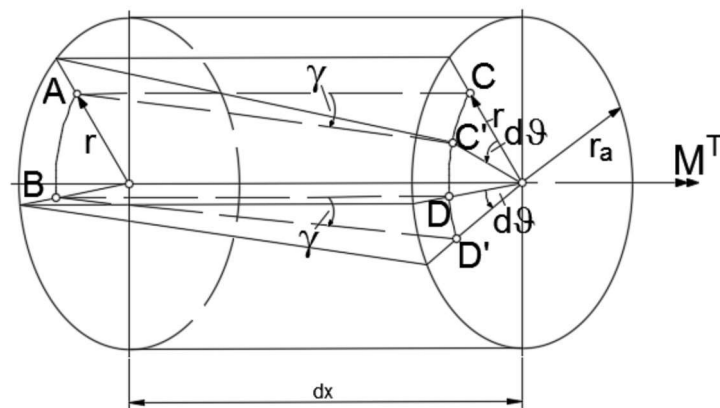


Abbildung 3-4: Stabelement dx mit Verdrehung $d\vartheta$

3.5 Elastizitätsgesetz der St. Venantschen Torsion

Setzen man für M_T aus Gleichung (3-3) das Hookesche Gesetz für Schub nach Gleichung (2-2) ein, erhält man:

$$M_T = \int_A G \cdot \gamma \cdot r \cdot dA \quad (3-6)$$

Durch das Einsetzen der kinematischen Beziehung aus Gleichung (3-5) erhält man:

$$M_T = \int_A G \cdot \vartheta' \cdot r^2 \cdot dA = G \cdot \vartheta' \cdot \int_A r^2 \cdot dA \quad (3-7)$$

Es verbleibt das Elastizitätsgesetz der St. Venantschen Torsion.

$$M_T = G \cdot \vartheta' \cdot I_T \quad (3-8)$$

Gleichung (3-8) stellt das Elastizitätsgesetz der St. Venantschen Torsion dar, also die Grundbeziehung zwischen dem Torsionsmoment M_T und Verdrillung ϑ' . Dabei ist I_T das Torsionsflächenmoment 2. Grades. Aufgrund des gewählten wölbfreien Querschnitts tritt hier der Sonderfall ein, dass das Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T gleichzeitig das polare Flächenmoment 2. Grades I_P ist.

$$I_T = I_P = \int_A r^2 \cdot dA \quad (3-9)$$

3.6 Differenzialgleichung der St. Venantschen Torsion

Das Elastizitätsgesetz aus Gleichung (3-8) wird nach x differenziert und mit der Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (3-1) verknüpft. Es verbleibt eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Die gesamte Lösung lautet:

$$\begin{aligned} G \cdot I_T \cdot \vartheta'' &= -m_T \\ G \cdot I_T \cdot \vartheta' &= -m_T \cdot x + C_1 \\ G \cdot I_T \cdot \vartheta &= -\frac{1}{2} \cdot m_T \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (3-10)$$

Analog zur Biegelinie können mithilfe von Randbedingungen Lösungen für die Verdrehung ϑ und deren Ableitungen ϑ', ϑ'' gefunden werden.

3.7 Spannungen infolge St. Venantschen Torsion

Um die Schubspannungen im Kreis- und Kreisringquerschnitt zu berechnen, wird das Hookesche Gesetz für Schub aus Gleichung (2-2) in das Elastizitätsgesetz aus Gleichung (3-8) eingesetzt.

$$M_T = \frac{\tau}{\gamma} \cdot I_T \cdot \vartheta' \quad (3-11)$$

Durch Einsetzen der kinematischen Beziehung aus Gleichung (3-5) lässt sich die Verdrillung ϑ' eliminieren.

$$M_T = \frac{\tau}{\vartheta' \cdot r} \cdot I_T \cdot \vartheta' = \tau \cdot \frac{I_T}{r} \quad (3-12)$$

Durch Umstellen erhält man die Torsionsspannung als:

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} \cdot r \quad (3-13)$$

Für die weitere Bearbeitung dieser Arbeit ist es erforderlich, die Grundformeln für dünnwandige offene Profile aufzulisten. Der Schubfluss verläuft hier anders als bei geschlossenen Querschnitten. In Abbildung 3-5 ist der Schubfluss eines I-Profils dargestellt, der entlang der Profildicke linear verläuft. Zusammengefasst berechnen sich die Schubspannungen analog zu Gleichung (3-13) für Kreis- und Kreisringquerschnitte. Anstelle des Radius r wird die Dicke der Profilwandung t verwendet.

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} \cdot t \quad (3-14)$$

Ebenso setzt sich das Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T aus dem Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T für Rechtecke zusammen, sodass es wie folgt berechnet wird:

$$I_T = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot t_i^3 \quad (3-15)$$

Der Korrekturbeiwert η wird nach Abbildung 3-6 bestimmt.

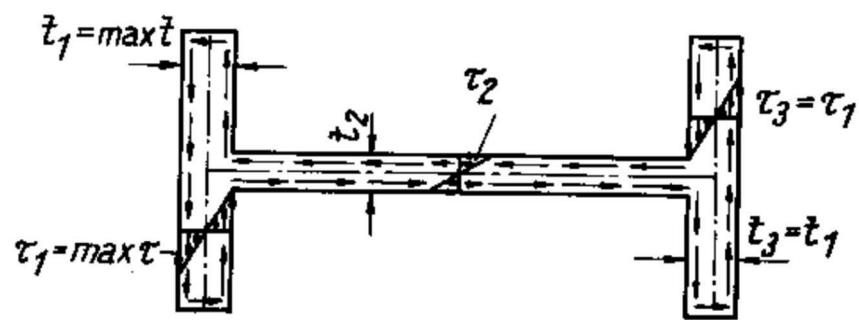


Abbildung 3-5: Schubfluss in einem I-Profil [4]

Profil	η
L	1,00 / 1,03
C	1,06 / 1,12
T	1,12
I	1,22 / 1,31
IPE	1,33
HE	1,16 / 1,29
U	1,16

Abbildung 3-6: Korrekturbeiwert η für verschiedene Profile [2]

4 Wölbkrafttorsion (Sekundäre Torsion)

4.1 Modellannahmen

Die Wölbkrafttorsion ist eine Erweiterung der St. Venantschen Torsion und wird ebenfalls nicht mit einem einzigen Berechnungsschema behandelt. Aufgrund der Wölbbehinderung treten Zwängungen auf, die Wölbspannungen (auch Sekundärspannungen genannt) erzeugen. Solche Zwängungen entstehen beispielsweise an starren Einspannungen und an Stellen des Stabes, an denen das Torsionsmoment eine Änderung erfährt. Dies führt dazu, dass die Verdrillung über die Stablänge nicht mehr konstant verläuft.

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \vartheta'(x) \neq \text{konst.}$$

Die Wölbkrafttorsion ist ein komplexes Thema, das vor allem bei dickwandigen Querschnitten schwer nachvollziehbar ist und nur näherungsweise lösbar ist. Neben den wölbfreien Kreis- und Kreisringquerschnitten können auch weitere Querschnittsformen als wölbfrei oder quasi-wölbfrei klassifiziert werden. Aus wirtschaftlichen Gründen werden Querschnitte als quasi-wölbfrei klassifiziert, wenn ihre Wölbspannungen im Vergleich zur St.-Venant'schen Torsion vernachlässigbar sind. Abbildung 4-1 zeigt eine Auflistung von Querschnitten, die entweder der Gruppe

1. Wölbfrei
2. Quasi-Wölbfrei
3. Nicht Wölbfrei

zugeordnet sind.

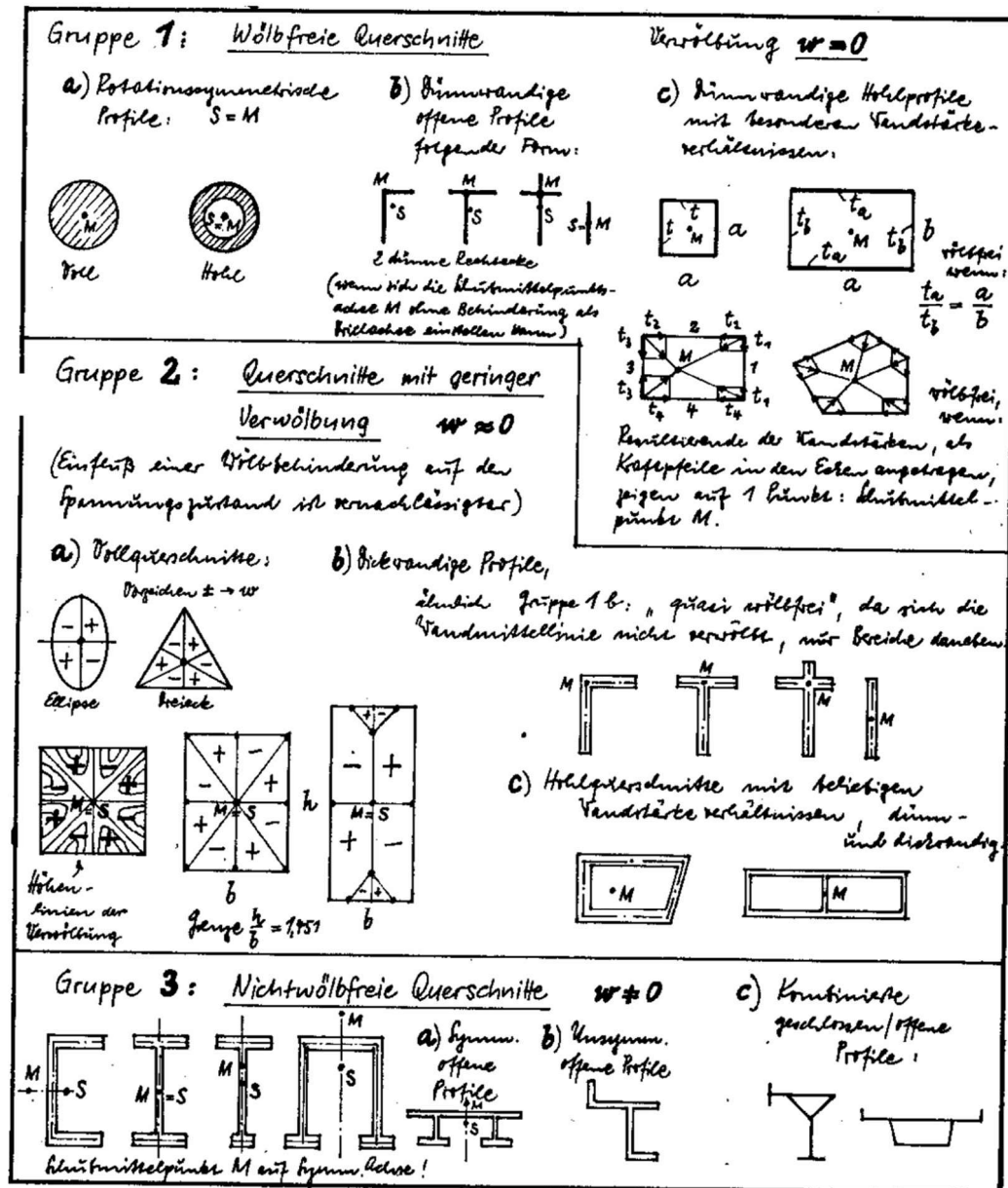


Abbildung 4-1: Wölbfreie, quasi-wölbfreie und nicht wölbfreie Querschnitte [Quelle: Schineis, Torsion, FH München 1971]

Für dünnwandig, offene Querschnitte treten die größten Verwölbungen auf. Obwohl die daraus resultierenden Wölbspannungen relativ klein und zur Stablänge nur lokal auftreten, ist es aus Sicherheitsgründen erforderlich, sie nachzuweisen. In Abbildung 4-2 ist eine freie Verwölbung nur an den Stellen A gewährleistet. Für den einseitig eingespannten Kragarm ist der zugehörige Verdrehungsverlauf $\vartheta(x)$ und Verdrillungsverlauf $\vartheta'(x)$ angegeben. Daraus ist deutlich erkennbar, dass die Verdrillung $\vartheta'(x)$ zur Kragarmspitze bei Stelle A abflacht.

Die Theorie der Wölbkrafttorsion lässt sich besonders für Stahlbauprofile stark vereinfachen. Insbesondere für dünnwandig offene Querschnitte ist die Wölbkrafttorsion durch handschriftliche Berechnungen sehr anschaulich darstellbar. Daher werden, anders als bei der Balkentheorie und der St.-Venant'schen Torsion, die Grundgleichungen anhand eines dünnwandigen offenen Querschnitts hergeleitet.

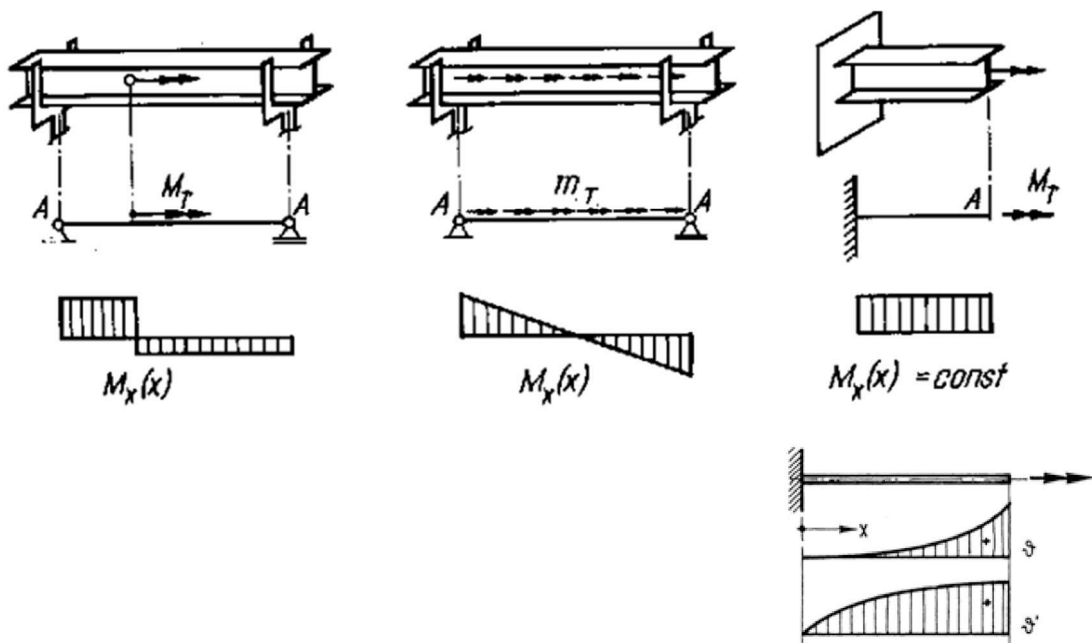


Abbildung 4-2: Freie Verwölbungen an Stellen A für verschiedene statische Systeme [4]

4.2 Gleichgewichtsbedingung

Anders als bei der St. Venantschen Torsion treten bei Wölbbehinderung Wölbspannungen (σ_2, τ_2) auf. Die im Querschnitt wirkenden sekundären Normalspannungen σ_2 sind eine unmittelbare Folge der Verwölbungsbehinderung und stehen proportional zueinander. Abbildung 4-3a zeigt, dass an den Ecken der Flansche die größte Normalspannung σ_2 auftritt, die entlang der Flanschdicke konstant verläuft. Daraus resultiert das sogenannte Bimoment M_ω analog zum Biegemoment M_y aus der Balkentheorie.

Aus Gleichgewichtsgründen treten daraus sekundäre Schubspannungen τ_2 auf, siehe Abbildung 4-3b und Abbildung 4-3c. Die im Querschnitt wirkenden sekundären Schubspannungen τ_2 erzeugen ein sekundäres Torsionsmoment M_{T2} , das einen Teil des gesamten Torsionsmomentes M_T ausmacht. Abbildung 4-4a zeigt den Schubfluss infolge der St. Venantschen Torsion M_{T1} mit einem linearen Spannungsverlauf entlang der Flanschdicke. Daneben zeigt Abbildung 4-4b den Schubfluss infolge der Wölbkrafttorsion M_{T2} , wobei der Spannungsverlauf entlang der Flanschdicke konstant angenommen wird.

Das Torsionsschnittmoment M_T wird demnach im Falle einer Wölbbehinderung in einen primären Anteil M_{T1} , entsprechend dem reinen St. Venantschen Torsionsanteil, und in einen sekundären Anteil M_{T2} aufgrund der Wölbbehinderung aufgeteilt. Es gilt:

$$M_T = M_{T1} + M_{T2} \text{ [kNm]} \quad (4-1)$$

Aufgrund des Zusammenhanges zwischen den sekundären Normalspannungen σ_2 und den sekundären Schubspannungen τ_2 stehen das Wölbmoment M_ω und das sekundäre Torsionsmoment M_{T2} in Beziehung zueinander. Es ist zweckmäßig, die folgende Beziehung vorwegzunehmen. Der Beweis dieser Beziehung wird später erbracht:

$$M'_\omega = M_{T2} \text{ [kNm}^2\text{]} \rightarrow \text{wie } M'_y = V_z \text{ in der Biegetheorie} \quad (4-2)$$

Das Wölbmoment M_ω ist eine theoretische Schnittgröße und schwer vorstellbar. Wie später gezeigt wird, ist das Wölbmoment M_ω notwendig, um das Gleichgewicht der kinematischen Beziehungen zu erfüllen. Zudem wird es benötigt, um die sekundäre Normalspannung σ_2 mithilfe dieser Schnittgröße zu berechnen.

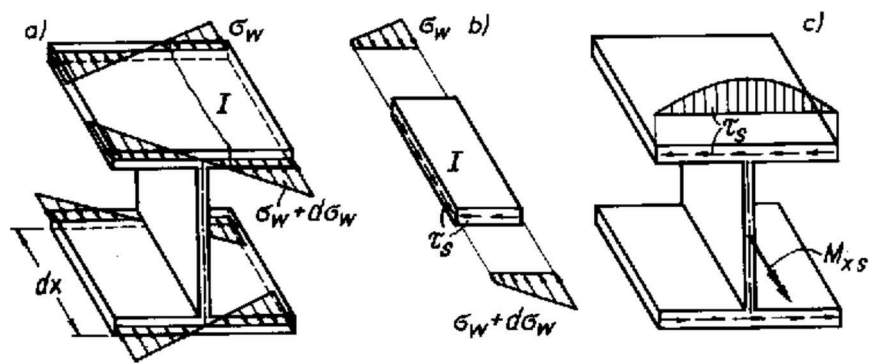


Abbildung 4-3: Spannungsverteilung der sekundären Normalspannung σ_2 und dem resultierenden sekundären Schubspannung τ_2 [4]

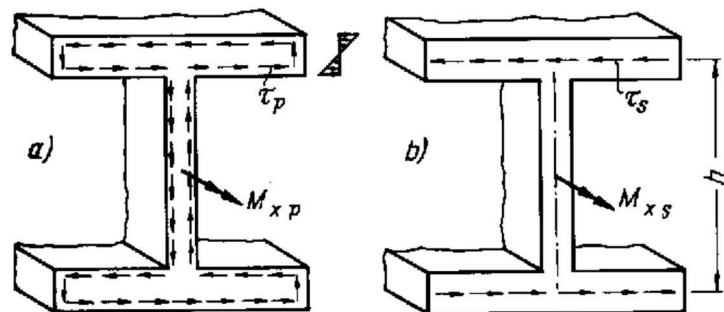


Abbildung 4-4: Schubfluss der St. Venantschen Torsion und der Wölbkrafttorsion [4]

4.3 Äquivalenzbedingungen

Die primäre Torsion M_{T1} entspricht der St. Venantschen Torsion, für die bereits das Elastizitätsgesetz hergeleitet wurde. Im Fall der Wölbkrafttorsion lassen sich die zugehörigen Torsionsmomente M_{T2} und M_ω durch Integration der Spannungen bestimmen. Das Sekundäre Torsionsmoment M_{T2} ergibt sich durch Integration über den gesamten Querschnitt entlang der Umlaufkoordinate s . Abbildung 4-5 zeigt das Modell, an dem das Elastizitätsgesetz in den nächsten Schritten nähergeleitet wird. Links wird dabei der Schubfluss der primären Torsion M_{T1} und rechts der Schubfluss der sekundären Torsion M_{T2} abgebildet.

$$M_{T2} = \oint \tau_2(s, x) \cdot t(s) \cdot r(s) \cdot ds \quad (4-3)$$

Das Wölbmoment M_ω ergibt sich analog zur Biegetheorie durch Integration der Wölbnormalspannung σ_{2A} mit der neu eingeführten Verschiebungsgröße ω_A , die als Einheitsverwölbung bezeichnet wird und im nächsten Abschnitt erläutert wird. Das Vorzeichen des Wölbungsmoments kann je nach Literatur unterschiedlich sein, da es sich aus der kinematischen Herleitung ergibt. Im Index wird die Drehachse A beschrieben.

$$M_\omega = - \int_A \sigma_{2A} \cdot \omega_A \cdot dA \quad (4-4)$$

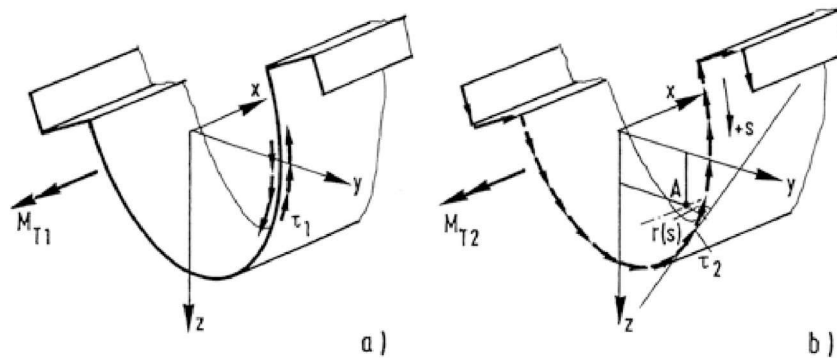


Abbildung 4-5: Betrachtetes Modell für die Herleitung der Grundformeln der Wölbkrafttorsion [2]

4.4 Kinematische Beziehung

Die kinematischen Beziehungen basieren auf [2] und bilden die Grundlage.

Abbildung 4-6 zeigt das Betrachtete Modell. Im Folgenden wird angenommen, dass der Stab um die Drehachse A mit den Querschnittskordinaten y_A, z_A verdreht wird. Ein Querschnittspunkt $P(s)$ an der Stelle s erfährt bei der Verdrehung ϑ die Verschiebung $\delta_A = \rho_A \cdot \vartheta$, wobei ρ_A der Radiusvektor zwischen A und P ist. Der Index A zeigt an, dass sich der Stab um die Achse A dreht. Die Verschiebungskomponente v_A entlang der Tangente an der Profilmittellinie im Punkt P beträgt dann:

$$v_A(s, x) = r_A(s) \cdot \vartheta(x) \quad (4-5)$$

Der Ausdruck $r_A(s)$ bezeichnet den Normalabstand zwischen A und der Tangente. Im Folgenden wird nun das Ziel verfolgt, eine Beziehung zwischen der Schubgleitung γ und der Verschiebung u in Stablängsrichtung (Verwölbung) herzustellen, um schließlich einen Ausdruck für die zu Beginn erwähnte Einheitsverwölbung ω_A zu erhalten.

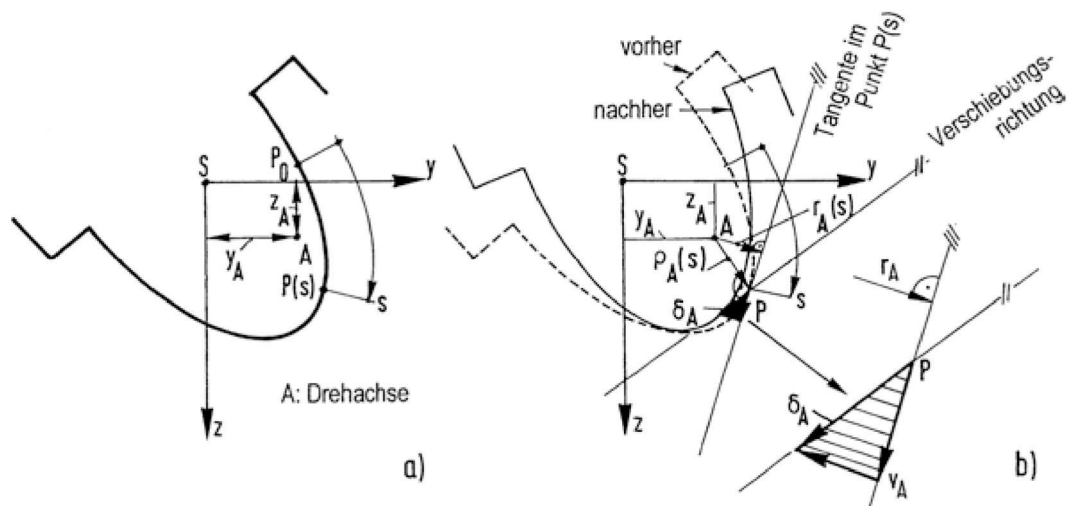


Abbildung 4-6: Verdrehung des Querschnitts und Verschiebung eines Querschnittspunktes [2]

Hierfür wird aus der Mittelebene der Profilwandung ein Element $dx - ds$ herausgetrennt, wie in Abbildung 4-7a. Die Achse s verläuft in Richtung v und die Achse x verläuft in Richtung u . Die Schubgleitung γ setzt sich aus den Verschiebungsänderungen v' und \dot{u} zusammen, siehe Abbildung 4-7b. Dabei bedeutet $()'$ die Ableitung nach x und $\dot{()}$ die Ableitung nach s . Die Schubgleitung γ beträgt dann:

$$\gamma_A = \frac{v' \cdot dx}{dx} + \frac{\dot{u} \cdot ds}{ds} = v'_A + \dot{u}_A \quad (4-6)$$

Da in der Profilmittellinie die primären Torsionsschubspannungen $\tau_1 = 0$ sind, sind auch die primären Schubgleitungen γ_1 null. Die sekundären Schubspannungen τ_2 sind über die Wanddicke gleichförmig verteilt. Mit diesen Spannungen folgen jedoch sekundären Schubgleitungen γ_2 . Da die sekundären Schubspannungen τ_2 sehr gering sind, wird die sekundären Schubgleitungen γ_2 vernachlässigt. Dieser Ansatz entspricht der Vernachlässigung der Querkraft-Schubverzerrung in der Euler-Bernoulli-Balkentheorie. Mit dieser Annahme lässt sich Gleichung (4-6) wie folgt umstellen:

$$\gamma_A = 0 \rightarrow \dot{u}_A = -v'_A \quad (4-7)$$

Für die tangentielle Verschiebung v_A wird Gleichung (4-5) nach Differentiation eingesetzt. Damit ist die Verwölbung u nur von der Verdrehung ϑ des Stabes abhängig.

$$\dot{u}_A = -r_A(s) \cdot \vartheta'(x) \quad (4-8)$$

Im Allgemeinen wird zur Beschreibung der Verwölbung die Größe ω_A eingeführt.

$$u_A = \omega_A(s) \cdot \vartheta'(x) \quad (4-9)$$

ω_A ist die Einheitsverwölbung und ist laut Definition identisch mit der Verwölbung u_A , wenn die Verdrillung $\vartheta' = 1$ ist.

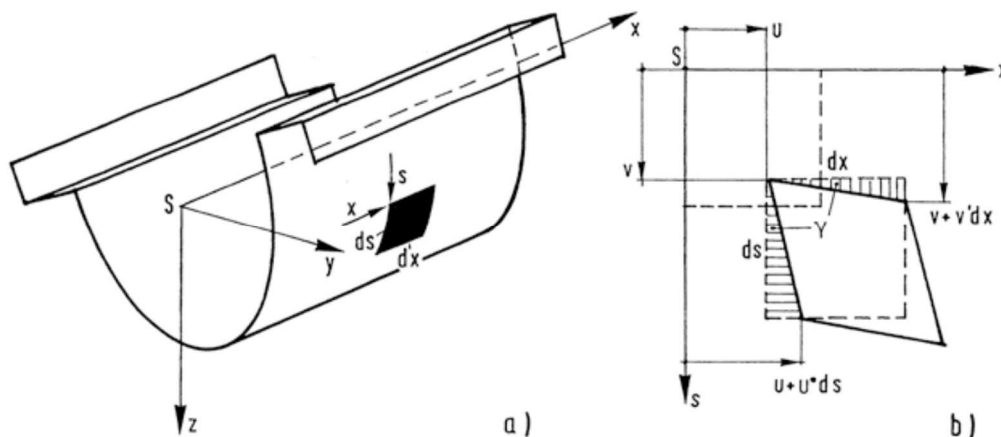


Abbildung 4-7: Schubgleitung eines Elements $dx - ds$ der Profilwandung [2]

Durch Verknüpfen der Gleichungen (4-8) und (4-9) ergibt sich:

$$\dot{u}_A = \dot{\omega}_A(s) \cdot \vartheta'(x) = -r_A(s) \cdot \vartheta'(x) \quad (4-10)$$

Nach umstellen der Gleichung (4-10) lässt sich die Einheitsverwölbung ω_A berechnen.

$$\omega_A(s) = - \int r_A(s) \cdot ds + \omega_{A0} \quad (4-11)$$

Die Integrationskonstante ω_{A0} beschreibt die Einheitsverwölbung im Ursprung P_0 der Umlaufkoordinate s . Der erste Term wird abgekürzt mit:

$$\bar{\omega}_A(s) = - \int r_A(s) \cdot ds \quad (4-12)$$

$\bar{\omega}_A$ heißt Grundverwölbung. Die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ wird in Abbildung 4-8 veranschaulicht. Ausgangspunkt ist der Ursprung der Laufkoordinate s bei $s = 0$. Von dort aus wird der senkrechte Radius $r_A(s)$ bestimmt, siehe Abbildung 4-8a. In Abbildung 4-8b wird der Radius $r_A(s)$ gemäß Gleichung (4-12) integriert. Wie in Abbildung 4-8b zu sehen, ist das Vorzeichen von $r_A(s)$ mit dem Drehsinn um die Drehachse A verknüpft. Der senkrechte Radius $r_A(s)$ ist positiv, wenn bei positiver Umlaufung, also $+s$, der Drehsinn dem Uhrzeigersinn entspricht.

Die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ ist eine Querschnittsgröße. Wie in Abbildung 4-8c zu erkennen ist, entspricht die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ der doppelten Sektorfläche $A_A^*(s)$, die vom Radiusstrahl $r_A(s)$ überstrichen wird, siehe Gleichung (4-13). Das Vorzeichen der Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ wird durch die Richtung der Laufkoordinate s bestimmt. Ein Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ folgt im Anschluss an die Herleitung.

$$\bar{\omega}_A(s) = \pm 2 \cdot A_A^*(s) \quad (4-13)$$

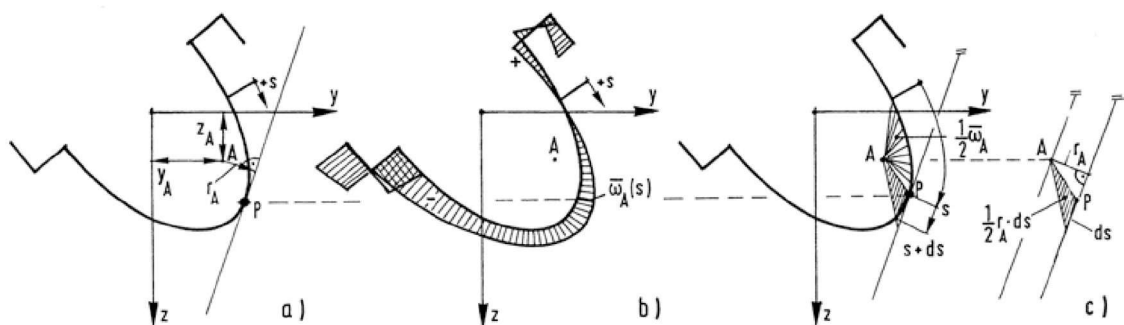


Abbildung 4-8: Zur Bestimmung der Grundverwölbung [2]

Die Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ lässt sich zusammenfassen zu:

$$\omega_A(s) = \bar{\omega}_A(s) + \omega_{A0} \quad (4-14)$$

Die Integrationskonstante ω_{A0} kann unter der Voraussetzung berechnet werden, dass die mittlere Verwölbung null ist, siehe Gleichung (4-15). Dies ergibt sich daraus, dass bei alleiniger Verdrillung des Querschnitts die über den Querschnitt integrierten Wölbnormalspannungen σ_{2A} keine resultierende Normalkraft erzeugen.

$$\int_A \omega_A(s) \cdot dA = 0 \quad (4-15)$$

In Gleichung (4-15) wird Gleichung (4-14) eingesetzt und nach ω_{A0} umgestellt. Dadurch ergibt sich:

$$\int_A \bar{\omega}_A(s) \cdot dA + \omega_{A0} \cdot A = 0 \rightarrow \omega_{A0} = -\frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega}_A(s) \cdot dA \quad (4-16)$$

Die Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ lässt sich ohne die Integrationskonstante ω_{A0} ausdrücken, indem Gleichung (4-16) in Gleichung (4-14) eingesetzt wird.

$$\omega_A(s) = \bar{\omega}_A(s) - \frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega}_A(s) \cdot dA \quad (4-17)$$

Beispiel zur Ermittlung der Einheitsverwölbung $\omega(s)$

In diesem Beispiel soll die Einheitsverwölbung $\omega(s)$ aus Gleichung (4-14) eines dünnwandigen, geschlitzten Quadratrohrs ermittelt werden. Zunächst wird die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ durch Integration berechnet. Anschließend wird die Integrationskonstante ω_{A0} bestimmt.

Abbildung 4-9a zeigt die Dimensionen des Querschnitts. Sofern konstruktiv nicht anders vorgegeben, verläuft die Drehachse durch den Schubmittelpunkt M . Bei dem gewählten Querschnitt ist der Schubmittelpunkt M identisch mit dem Schwerpunkt S . Die Umlaufkoordinate s wird am Schlitz des Querschnitts definiert, wodurch das Vorzeichen von $r_s(s)$ festgelegt wird.

Zur Bestimmung der Grundverwölbung $\bar{\omega}_S(s)$ empfiehlt es sich, zunächst den Verlauf des Radius $r_s(s)$ einzuzichnen, um die Integration zu veranschaulichen, siehe Abbildung 4-9b. Da der Radius $r_s(s)$ immer rechtwinklig zur Profilmittellinie verlaufen muss, beträgt er an jeder Stelle $2,3 \text{ cm}$. Die Grundverwölbung $\bar{\omega}_S(s)$ wird gemäß Gleichung (4-12) an den Punkten 0 – 5 berechnet. Der Ergebnisverlauf für $\bar{\omega}_S(s)$ ist in Abbildung 4-9c dargestellt:

$$\bar{\omega}_S(s) = - \int r_s(s) \cdot ds$$

0:	$\bar{\omega}_S = 0$	$= 0 \text{ cm}^2$
1:	$\bar{\omega}_S = -2,3 \cdot 2,3$	$= -5,29 \text{ cm}^2$
2:	$\bar{\omega}_S = -5,29 - 2,3 \cdot 4,6$	$= -15,87 \text{ cm}^2$
3:	$\bar{\omega}_S = -15,87 - 2,3 \cdot 4,6$	$= -26,46 \text{ cm}^2$
4:	$\bar{\omega}_S = -26,46 - 2,3 \cdot 4,6$	$= -37,03 \text{ cm}^2$
5:	$\bar{\omega}_S = -37,03 - 2,3 \cdot 2,3$	$= -42,32 \text{ cm}^2$

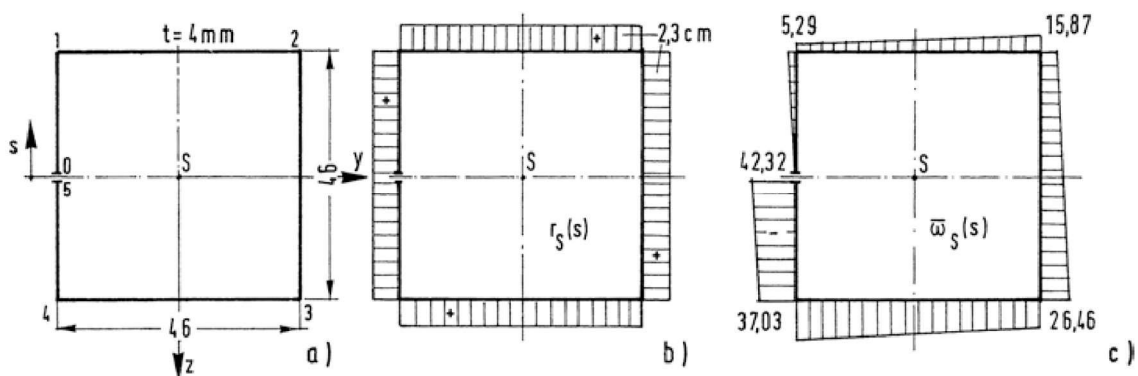


Abbildung 4-9: Beispiel eines dünnwandigen geschlitzten Quadratquerschnitts [2]

Die Integrationskonstante ω_{S0} wird nun gemäß Gleichung (4-16) ermittelt. Bei einer konstanten Profildicke von $t = 0,4 \text{ cm}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\omega_{S0} &= -\frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega}_S(s) \cdot dA = -\frac{t}{A} \cdot \int \bar{\omega}_S(s) \cdot ds \\ \omega_{S0} &= +\frac{0,4}{4 \cdot 0,4 \cdot 4,6} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 5,29 \cdot 2,3 + \frac{1}{2} \cdot (5,29 + 15,87) \cdot 4,6 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (15,87 + 26,46) \cdot 4,6 + \frac{1}{2} \cdot (26,46 + 37,03) \cdot 4,6 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot (37,03 + 42,32) \cdot 2,3 \right] = +21,16 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Nun kann die Einheitsverwölbung $\omega_S(s)$ aus Gleichung (4-14) berechnet werden. Der endgültige Ergebnisverlauf ist in Abbildung 4-10a dargestellt. Hier bestätigt sich die Bedingung, dass die Verwölbung ω im Mittel Null ist. In Abbildung 4-10b ist die Verwölbung räumlich abgebildet.

$$\omega_S(s) = \bar{\omega}_S(s) + \omega_{S0}$$

0:	$\omega_S = 0 + 21,16$	$= +21,16 \text{ cm}^2$
1:	$\omega_S = -5,29 + 21,16$	$= +15,87 \text{ cm}^2$
2:	$\omega_S = -15,87 + 21,16$	$= +5,29 \text{ cm}^2$
3:	$\omega_S = -26,46 + 21,16$	$= -5,29 \text{ cm}^2$
4:	$\omega_S = -37,03 + 21,16$	$= -15,87 \text{ cm}^2$
5:	$\omega_S = -42,32 + 21,16$	$= -21,16 \text{ cm}^2$

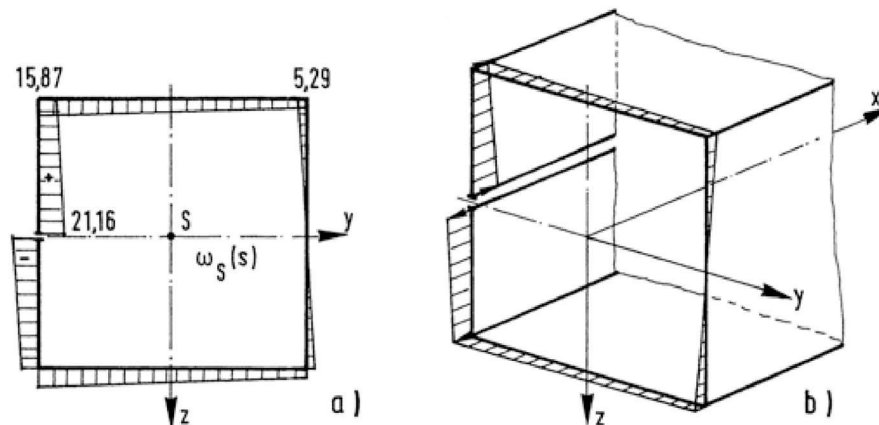


Abbildung 4-10: Verwölbung des Querschnitts um die Drehachse S [2]

Das Beispiel soll nun erweitert werden. Es wird die Einheitsverwölbung $\omega_B(s)$ für eine Drehung um den Punkt B gesucht. Wie zuvor wird in Abbildung 4-11a der Verlauf des Radius $r_B(s)$ rechtwinklig zur Profilmittellinie dargestellt. Um eine umständliche Berechnung der Integrationskonstante zu vermeiden, soll die Unlaufkoordinate s diesmal ihren Ursprung auf der Symmetrieachse haben, die rein zufällig mit Punkt B identisch ist.

Die Grundverwölbung $\bar{\omega}_B(s)$ wird entlang der Punkte 0 – 3 in positiver Richtung von s bis zum Schlitz berechnet. In negativer Richtung ergibt sich das Ergebnis aufgrund der Symmetrie. Der Verlauf der Ergebnisse ist in Abbildung 4-11b dargestellt.

$$\bar{\omega}_B(s) = - \int r_B(s) \cdot ds$$

0:	$\bar{\omega}_B = 0$	$= 0 \text{ cm}^2$
1:	$\bar{\omega}_B = 0$	$= 0 \text{ cm}^2$
2:	$\bar{\omega}_B = -2,3 \cdot 4,6$	$= -10,58 \text{ cm}^2$
3:	$\bar{\omega}_B = -10,58 - 4,6 \cdot 2,3$	$= -21,16 \text{ cm}^2$

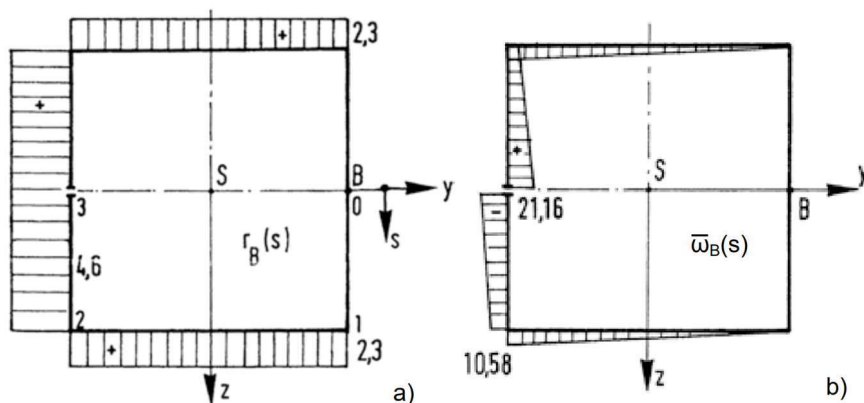


Abbildung 4-11: Verwölbung des Querschnitts um die Drehachse B [2]

Wie in Abbildung 4-11b zu sehen ist, erübrigt sich aufgrund der Symmetrie die Berechnung der Integrationskonstante ω_{B0} , sodass die Einheitsverwölbung $\omega_B(s)$ der Grundverwölbung $\bar{\omega}_B(s)$ entspricht.

Abschließend wird die Bedeutung der Sektorfläche A^* erläutert. Wie bereits in Abbildung 4-8c dargestellt, entspricht die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ dem doppelten Inhalt der vom Fahrstrahl auf dem Integrationsweg überstrichenen Fläche $A_A^*(s)$. Abbildung 4-12 greift das zuvor behandelte Beispiel auf und veranschaulicht, wie die Sektorfläche $A_B^*(s)$ bis zum Punkt 2 aufgespannt wird. Das Vorzeichen wird durch die Richtung der Umlaufkoordinate s bestimmt. Die Ergebnisse für die Punkte 0 – 3 berechnen sich nach dieser Vorgehensweise wie folgt:

$$\bar{\omega}_B(s) = \pm 2 \cdot A_B^*(s)$$

$$0: \quad \bar{\omega}_B = -2 \cdot (0) = 0 \text{ cm}^2$$

$$1: \quad \bar{\omega}_B = -2 \cdot (0) = 0 \text{ cm}^2$$

$$2: \quad \bar{\omega}_B = -2 \cdot (0,5 \cdot 2,3 \cdot 4,6) = -10,58 \text{ cm}^2$$

$$3: \quad \bar{\omega}_B = -2 \cdot (2,3 \cdot 4,6) = -21,16 \text{ cm}^2$$

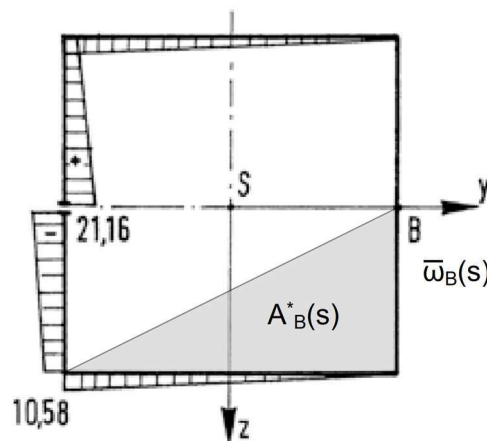


Abbildung 4-12: Darstellung der Sektorfläche A_B^* zum Punkt 2

Zusammenfassend lässt sich folgendes Fazit ziehen: Es spielt keine Rolle, an welchem Punkt der Ursprung der Umlaufkoordinate s definiert wird. Das Endergebnis bleibt immer gleich, allerdings kann der Berechnungsaufwand reduziert werden, indem die Berechnung der Integrationskonstante ω_{B0} umgangen wird. Die Drehachse A bestimmt die Querschnittsverwölbung. Es wird angenommen, dass die Drehachse A durch den Schubmittelpunkt M verläuft, sofern dies nicht konstruktiv anders festgelegt ist. In Profiltabellen werden daher die Querschnittsgrößen immer auf den Schubmittelpunkt M bezogen. Bei einer Handrechnung ist es erforderlich, den Schubmittelpunkt M zuvor zu ermitteln, sofern dieser nicht bekannt ist. Auf die Berechnung des Schubmittelpunkts wird hier nicht weiter eingegangen.

Die Wölbnormalspannungen σ_{2A} sind eine direkte Folge der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$. Als nächstes wird die kinematische Beziehung der Wölbnormalspannungen σ_{2A} hergeleitet.

Die Verschiebung u wird durch Integration von Gleichung (4-8) über die Umlaufkoordinate s bestimmt.

$$u_A = -\vartheta'(x) \cdot \int r_A(s) \cdot ds + f_A(x) \quad (4-18)$$

$f_A(x)$ ist eine unbekannte Integralfunktion. Zur Bestimmung des Integrals wird die Grundverwölbung $\bar{\omega}_A(s)$ aus Gleichung (4-12) eingesetzt.

$$u_A = \vartheta'(x) \cdot \bar{\omega}_A(s) + f_A(x) \quad (4-19)$$

Beim Fortschreiten um dx ändert sich die Verwölbung u_A um $u'_A \cdot dx$. Die Dehnung des Stabes im Punkt $P(s)$ des Stabelements dx beträgt:

$$\varepsilon_A(s, x) = u'_A(s, x) \quad (4-20)$$

Für u'_A wird Gleichung (4-19) eingesetzt und nach x differenziert.

$$\varepsilon_A(s, x) = \vartheta''(x) \cdot \bar{\omega}_A(s) + f'_A(x) \quad (4-21)$$

Um die Wölbnormalspannungen σ_{2A} zu erhalten wird das Hookesche Gesetz aus Gleichung (2-1) verwendet.

$$\sigma_{2A}(s, x) = E \cdot \varepsilon_A(s, x) = E \cdot \vartheta''(x) \cdot \bar{\omega}_A(s) + E \cdot f'_A(x) \quad (4-22)$$

Wie auch zuvor bei der Ermittlung der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ kann sich aufgrund alleiniger Verdrehung im Querschnitt kein Normalkraft aufbauen. Aus Gründen des Gleichgewichts muss daher die resultierende Wölbnormalspannung σ_{2A} in jedem Querschnitt Null sein.

$$\int_A \sigma_{2A} \cdot dA = 0 \quad (4-23)$$

Diese Bedingung aus Gleichung (4-23) wird für Gleichung (4-22) angewendet, indem über die Querschnittsfläche A integriert wird und das Ergebnis Null ergibt. Daraus lässt sich nach der Integralfunktion $f'_A(x)$ umstellen:

$$E \cdot \vartheta''(x) \cdot \int_A \bar{\omega}_A(s) \cdot dA + E \cdot f'_A(x) \cdot A = 0 \rightarrow f'_A(x) = -\vartheta''(x) \cdot \frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega}_A \cdot dA \quad (4-24)$$

Die Lösung der Integralfunktion $f'_A(x)$ aus Gleichung (4-24) wird in Gleichung (4-22) eingesetzt. Daraus kann nun die Formel für die sekundäre Normalspannung σ_{2A} abgeleitet werden.

$$\sigma_{2A}(s, x) = E \cdot \vartheta''(x) \cdot \left[\bar{\omega}_A(s) - \frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega}_A(s) \cdot dA \right] \quad (4-25)$$

Der Klammerausdruck entspricht der Einheitsverwölbung ω_A aus Gleichung (4-17). Somit lässt sich Gleichung (4-25) zusammenfassen zu:

$$\sigma_{2A}(s, x) = E \cdot \vartheta''(x) \cdot \omega_A(s) \quad (4-26)$$

Gemäß Gleichung (4-26) ist die sekundäre Normalspannung σ_{2A} über dem Querschnitt wie die Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ verteilt. Ebenso variiert die sekundäre Normalspannung σ_{2A} entlang der Stablängsrichtung, da ϑ'' normalerweise entlang des Stabes veränderlich ist.

Durch die Änderung $\sigma'_2 \cdot dx$ entstehen Längsschubspannungen τ_2 zwischen den einzelnen Stabfasern. Um eine Beziehung zwischen σ_{2A} und τ_2 zu ermitteln, wird am Profilmantel an der Stelle x, s ein infinitesimales Element $dx - ds$ herausgetrennt, und die Gleichgewichtsgleichung in Richtung x formuliert, siehe Abbildung 4-13.

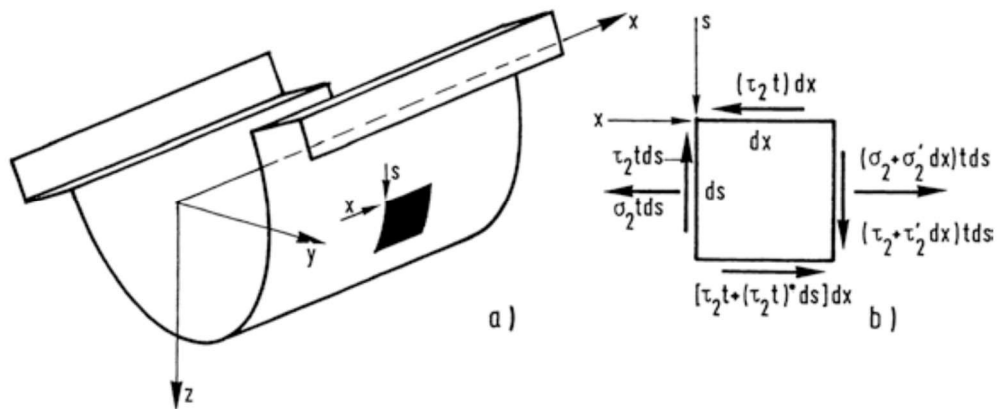


Abbildung 4-13: Spannungszustand eines Elements $dx - ds$ der Profilwandung [2]

Die Indizierung der Drehachse A wird hier aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit nicht verwendet.

$$\begin{aligned} \sigma_2 \cdot t \cdot ds - (\sigma_2 + \sigma_2' \cdot dx) \cdot t \cdot ds + (\tau_2 \cdot t) \cdot dx - [\tau_2 \cdot t + (\tau_2 \cdot t) \cdot ds] \cdot dx &= 0 \\ \rightarrow (\tau_2 \cdot t) + \sigma_2' \cdot t &= 0 \end{aligned} \quad (4-27)$$

Die Auflösung von Gleichung (4-27) nach $T_2 = \tau_2 \cdot t$ ergibt mit Gleichung (4-26)

$$T_2(s, x) = -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int \omega(s) \cdot t(s) \cdot ds + T_{20} \quad (4-28)$$

Das Elastizitätsgesetz der Schubspannung lautet demnach:

$$\tau_2(s, x) = -\frac{E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int \omega(s) \cdot t(s) \cdot ds + T_{20}}{t(s)} \quad (4-29)$$

T_2 wird als Wölbschubfuß bezeichnet. Die Integrationskonstante T_{20} ergibt sich wie bereits für die Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ beschrieben. Wenn die Umlaufkoordinate s ihren Ursprung am Profilrand hat, ist die Integrationskonstante $T_{20} = 0$, denn an freien Rändern wird angenommen, dass die sekundären Schubspannungen $\tau_2 = 0$ sind. Die Wölbspannungen σ_2 und τ_2 sind gleichmäßig über die Wanddicke verteilt.

4.5 Elastizitätsgesetz der Wölbkrafttorsion

Nun wurden alle elementaren Grundgleichungen hergeleitet. Im nächsten Schritt wird das Elastizitätsgesetz der Wölbkrafttorsion durch Zusammenfügen dieser Grundgleichungen hergeleitet.

Hierfür wird für M_{T2} aus Gleichung (4-3) geschickt durch partielle Integration umgeformt:

$$M_{T2} = \left[(\tau_2 \cdot t) \cdot \int_s r \cdot ds \right] - \oint \left[(\tau_2 \cdot t) \cdot \int_s r \cdot ds \right] \cdot ds \quad (4-30)$$

Da die sekundären Schubspannungen τ_2 an allen Rändern Null sind, kann die linke geschweifte Klammer gestrichen werden. Für $(\tau_2 \cdot t)$ wird Gleichung (4-27) und für das übrig gebliebene Integral wird die Grundverwölbung $\bar{\omega}$ aus Gleichung (4-12) eingesetzt.

$$M_{T2} = - \int (\sigma_2' \cdot t) \cdot \bar{\omega} \cdot ds = - \int \sigma_2' \cdot \bar{\omega} \cdot t \cdot ds = - \int_A \sigma_2' \cdot \bar{\omega} \cdot dA \quad (4-31)$$

Für σ_2 wird Gleichung (4-26) eingesetzt.

$$M_{T2} = -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int_A \omega(s) \cdot \bar{\omega}(s) \cdot dA \quad (4-32)$$

Ersetzt man $\omega(s)$ durch Gleichung (4-17), folgt:

$$\begin{aligned} M_{T2} &= -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int_A \left[\bar{\omega} - \frac{1}{A} \cdot \int_A \bar{\omega} \cdot dA \right] \cdot \bar{\omega} \cdot dA \\ M_{T2} &= -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \left[\int_A \bar{\omega}^2 \cdot dA - \frac{1}{A} \left(\int_A \bar{\omega} \cdot dA \right) \cdot \left(\int_A \bar{\omega} \cdot dA \right) \right] \\ M_{T2} &= -E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \left[\int_A \bar{\omega}^2 \cdot dA - \frac{1}{A} \left(\int_A \bar{\omega} \cdot dA \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4-33)$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$M_{T2} = -E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta'''(x) \quad (4-34)$$

An dieser Stelle wird die Indizierung der Drehachse A wieder aufgenommen. $I_{\omega A}$ ist ein neuer Querschnittswert, der als Wölbwiderstand bezeichnet wird und sich auf die Drehachse A bezieht.

$$I_{\omega A} = \int_A \bar{\omega}_A^2 \cdot dA - \frac{1}{A} \left(\int_A \bar{\omega}_A \cdot dA \right)^2 \quad (4-35)$$

Hier kann die Einheitsverwölbung ω_A aus Gleichung (4-17) eingesetzt werden, um den Wölbwiderstand $I_{\omega A}$ zusammenzufassen.

$$I_{\omega A} = \int_A \omega_A^2 \cdot dA \quad (4-36)$$

Um den Wölbwiderstand $I_{\omega A}$ besser zu veranschaulichen, sind in Abbildung 4-14 die verschiedenen Arten der Flächenintegrale zusammengefasst. Die y – Achse verläuft schräg zur rechten Ecke des Dreiecks, während die z – Achse schräg zur linken unteren Ecke verläuft. Die Achse, die geradlinig zur Ecke des Dreiecks nach oben verläuft, ist die Wölbachse ω . Ausgehend von der Querschnittsfläche A bildet sich das Flächenmoment 1. Grades, indem eine Ebene nach außen gewandert wird. Es entstehen dabei die statischen Momente S_y, S_z, S_ω . Eine weitere Ebene nach außen führt zu den Flächenmomenten 2. Grades I_y, I_z, I_ω . Die gemischten Flächenintegrale befinden sich dazwischen.

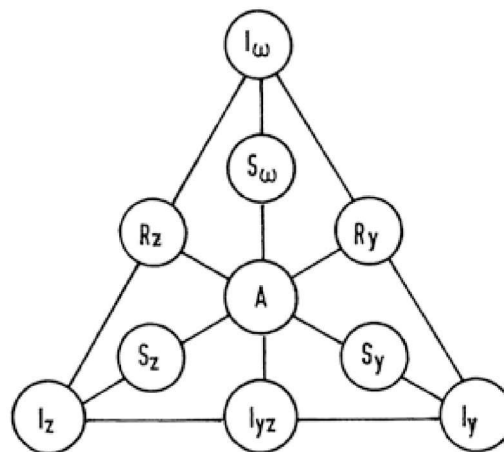


Abbildung 4-14: Darstellung der Flächenintegrale [5]

Es werden M_{T1} aus Gleichung (3-8) und M_{T2} aus Gleichung (4-34) addiert; das liefert das Elastizitätsgesetz der Wölbkrafttorsion:

$$M_T = G \cdot I_T \cdot \vartheta' - E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta''' \quad (4-37)$$

Abschließend wird der Zusammenhang zwischen dem Wölbbimoment M_ω und dem sekundären Torsionsmoment M_{T2} hergeleitet.

Wie bereits erwähnt, entstehen die sekundären Normalspannungen σ_{2A} aus dem Wölbbimoment M_ω . Analog zur Biegetheorie berechnet sich das Wölbbimoment M_ω nach Gleichung (4-4). Für die sekundäre Normalspannung σ_{2A} wird Gleichung (4-26) eingesetzt. Damit ergibt sich:

$$M_\omega = - \int_A \sigma_{2A} \cdot \omega_A \cdot dA = -E \cdot \vartheta'' \cdot \int_A \omega_A^2 \cdot dA \quad (4-38)$$

Hier kann der Wölbwiderstand $I_{\omega A}$ aus Gleichung (4-36) eingesetzt werden, um das Elastizitätsgesetz des Wölbbimoments M_ω zu erhalten.

$$M_\omega = -E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta'' \quad (4-39)$$

Vergleicht man Gleichung (4-39) mit Gleichung (4-34) gilt offensichtlich:

$$M_{T2} = M'_\omega = -E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta''' \quad (4-40)$$

4.6 Differenzialgleichung der Wölbkrafttorsion

Unter der Voraussetzung, dass $G \cdot I_T$ und $E \cdot I_{\omega A}$ in Stablängsrichtung konstant sind, wird Gleichung (4-37) nach x differenziert und mit der Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (3-1) verknüpft. Es verbleibt eine gewöhnliche Differenzialgleichung vierter Ordnung.

$$E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta'''' - G \cdot I_T \cdot \vartheta'' = m_T \quad (4-41)$$

Der homogene Teil kann zusammengefasst werden zu:

$$\vartheta'''' - \lambda^2 \cdot \vartheta'' = 0 \quad (4-42)$$

λ wird als Abklingfaktor bezeichnet, ist dimensionsbehaftet und setzt sich aus Folgenden Komponenten zusammen:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega A}}} \left[\frac{1}{cm} \right] \quad (4-43)$$

Der homogene Teil der Differenzialgleichung hat die allgemeine Lösung:

$$\vartheta_{\text{hom}} = \frac{C_1}{\lambda^2} \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \frac{C_2}{\lambda^2} \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4 \quad (4-44)$$

Die partikuläre Lösung ist von der Art der Torsionsbelastung abhängig. Wird eine konstante Größe für m_T angenommen, ergibt sich:

$$\vartheta_{\text{part}} = -\frac{m_T}{2 \cdot G \cdot I_T} \cdot x^2 \quad (4-45)$$

Die vollständige Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{C_1}{\lambda^2} \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \frac{C_2}{\lambda^2} \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4 - \frac{m_T}{2 \cdot G \cdot I_T} \cdot x^2 \\ \vartheta' &= \frac{C_1}{\lambda} \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{C_2}{\lambda} \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_3 - \frac{m_T}{G \cdot I_T} \cdot x \\ \vartheta'' &= C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{m_T}{G \cdot I_T} \\ \vartheta''' &= C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda \cdot x) \end{aligned} \quad (4-46)$$

Mit dem gleichen Vorgehen wie bei der Biegelinie werden mithilfe von Randbedingungen Lösungen für die Verdrehung ϑ und deren Ableitungen $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$ gesucht. Dies ist erforderlich, um die Torsionsanteile in der Handrechnung mithilfe des Elastizitätsgesetzes zu ermitteln.

Aus zeitlichen Gründen werden hierfür vorgefertigte Tabellenwerke für ausgewählte statische Systeme verwendet, um die Wölbkrafttorsionsanteile $M_{T1}, M_{T2}, M_{\omega}$ zu ermitteln, siehe Abbildung 4-15.

System			
$E I_W \vartheta$	 $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\lambda x - \frac{\sinh \lambda l - \sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$	 $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\frac{b}{l} \lambda x - \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x \right)$ $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\frac{a}{l} \lambda x' - \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x' \right)$	 $\frac{m_T}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda^2 x x' - 1 + \sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$
$M_{px} = \lambda^2 E I_W \vartheta'$	 $M_T \left(1 - \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$	 $M_T \left(\frac{b}{l} - \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x \right)$ $M_T \left(-\frac{a}{l} + \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x' \right)$	 $\frac{m_T}{\lambda} \left[\lambda \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$
$M_W = -E I_W \vartheta''$	 $-\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$	 $\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x$ $\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x'$	 $\frac{m_T}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$
$M_{sx} = -E I_W \vartheta'''$	 $M_T \cdot \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$	 $M_T \cdot \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x$ $-M_T \cdot \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x'$	 $-\frac{m_T}{\lambda} \cdot \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$

Abbildung 4-15: Vorgefertigte Lösungen für die Wölbkrafttorsionsschnittgrößen für ausgewählte statische Systeme [4]

4.7 Spannungen infolge Wölbkrafttorsion

Dieses Kapitel befasst sich mit der Herleitung der sekundären Spannungen, die für die Handrechnung angewendet werden können. Sind die Schnittgrößen und Querschnittskenngößen bekannt, lassen sich daraus die Spannungen ableiten.

Die sekundären Normalspannungen σ_{2A} lassen sich berechnen, indem für das Wölbmoment M_ω in Gleichung (4-39) die sekundäre Normalspannung σ_{2A} aus Gleichung (4-26) eingesetzt wird.

$$M_\omega = -E \cdot I_{\omega A} \cdot \vartheta'' = -\frac{\sigma_{2A} \cdot I_{\omega A}}{\omega_A} \quad (4-47)$$

Durch Umformen nach σ_{2A} ergibt sich der Ausdruck analog zur Biegetheorie.

$$\sigma_{2A}(s, x) = -\frac{M_\omega(x)}{I_{\omega A}} \cdot \omega_A(s) \quad (4-48)$$

Die sekundären Schubspannungen τ_{2A} werden in Gleichung (4-29) ermittelt, indem das sekundäre Torsionsmoment M_{T2} aus Gleichung (4-34) eingesetzt wird.

$$\tau_{2A}(s, x) = \frac{E \cdot \vartheta'''(x) \cdot \int \omega_A(s) \cdot t(s) \cdot ds + T_{2A,0}}{t(s)} = \frac{M_{T2}(x) \cdot S_{\omega A}(s)}{I_{\omega A} \cdot t(s)} + \frac{T_{2A,0}}{t(s)} \quad (4-49)$$

Hier bedeutet:

$$S_{\omega A}(s) = \int \omega_A(s) \cdot t(s) \cdot ds = \int_A \omega_A(s) \cdot dA \quad (4-50)$$

In Anlehnung an die Bezeichnung "Statisches Moment" in der Biegetheorie wird $S_{\omega A}$ als "Statisches Bimoment" oder auch "Wölbfläche" bezeichnet. Die Berechnungsgleichung für die sekundären Schubspannungen τ_{2A} entspricht im Aufbau der Gleichung zur Berechnung der Schubspannung infolge einer Querkraft.

5 Handrechnung einfacher Balken unter Wölbkrafttorsionsbeanspruchung

5.1 Zielsetzung

In diesem Handrechenbeispiel wird die Theorie der Wölbkrafttorsion anhand eines praxisüblichen Beispiels unter reiner Torsionsbeanspruchung angewendet und die Vorgehensweise verdeutlicht.

Gegeben ist ein HEB 300 Profil. Im ersten Schritt werden die unbekannten Querschnittsgrößen ermittelt, die für die Berechnung der Wölbkrafttorsion notwendig sind.

- Verlauf der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ im Querschnitt
- Verlauf der Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$ im Querschnitt
- Berechnung des Wölbwiderstands $I_{\omega A}$ und des Torsionsflächenmoments 2. Grades I_T

Im zweiten Schritt wird der Verlauf der Torsionsschnittgrößen $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$ für zwei verschiedene Fälle untersucht.

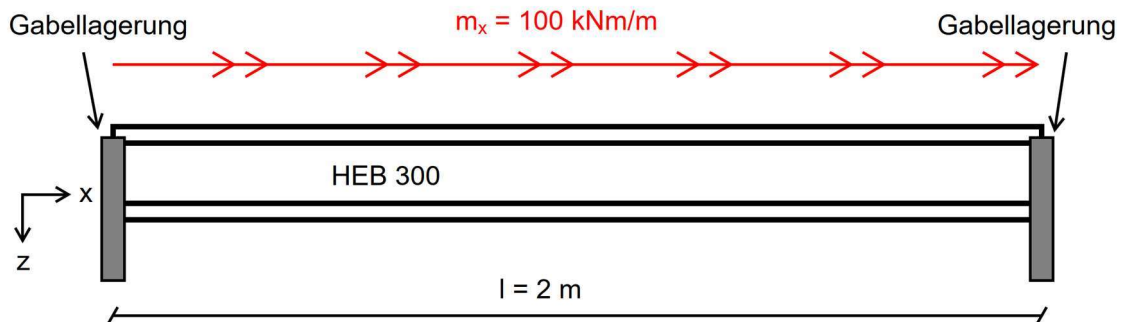
- Einfeldträger der Länge $l = 2$ m mit Gabellagerung
- Kragarm der Länge $l = 2$ m mit Wölbbehinderung an Einspannstelle durch eine Stirnplatte

5.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger

5.2.1 Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Gabelgelagerter Einfeldträger der Länge $l = 2 \text{ m}$ unter reiner gleichmäßig verteilter Torsionsstreckenlast $m_x = 100 \text{ kNm/m}$. Das Profil ist ein HEB 300.

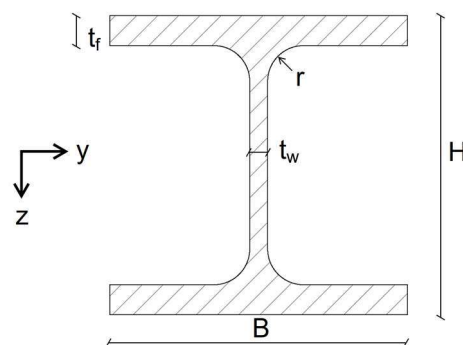
System:



Querschnittsabmessungen:

HEB 300, S355

H	$=$	300	mm
B	$=$	300	mm
t_w	$=$	11	mm
t_f	$=$	19	mm
r	$=$	27	mm



Gesucht:

- Verlauf der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ im Querschnitt
- Verlauf der Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$ im Querschnitt
- Wölbwiderstand $I_{\omega A}$ und Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T
- Schnittgrößenverläufe der Torsionsanteile $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$
- Primäre Schubspannung $\tau_1(s, x)$ und sekundäre Spannungen $\sigma_{2A}(s, x)$, $\tau_{2A}(s, x)$ an den Nachweisstellen

5.2.2 Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$

Die Bestimmung der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ wurde bereits in Kapitel 4.4 ausführlich an einem Beispiel behandelt. In diesem Beispiel wird die Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ mithilfe der Sektorfläche $A_A^*(s)$ berechnet. Abbildung 5-1 zeigt die Dimensionen des Querschnitts. Zunächst wird die Verwölbung $\omega_A(s)$ an der rechten oberen Flanschecke an Punkt P_1 ermittelt. Die Drehachse A verläuft ungehindert durch den Schubmittelpunkt M , der bei diesem Querschnitt mit dem Schwerpunkt S identisch ist. Die Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ ergibt sich gemäß Gleichung (4-14) aus der Summe der Grundverwölbung $\bar{\omega}_M(s)$ und der Integrationskonstante ω_{M0} .

$$\omega_M(s) = \bar{\omega}_M(s) + \omega_{M0}$$

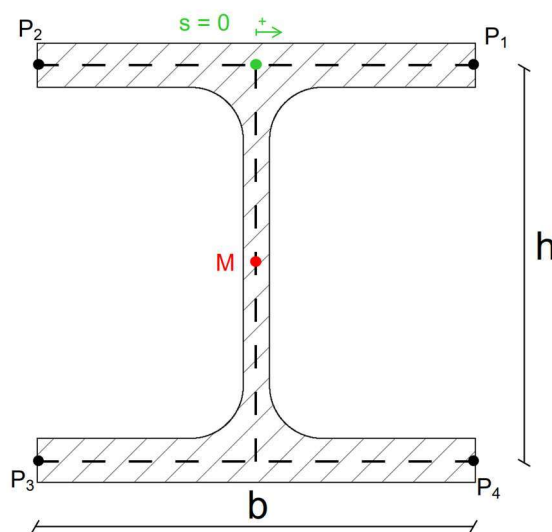


Abbildung 5-1: Querschnittsdimension, Beispiel 1

Im Index wird stets die Drehachse A beschrieben, in diesem Fall der Schubmittelpunkt M . Die Umlaufkoordinate s für die Integration kann an beliebiger Stelle definiert werden. Hier wird sie an der Symmetrieachse am oberen Flansch des Querschnitts festgelegt, wodurch die Berechnung der Integrationskonstante ω_{M0} aufgrund von Symmetriegründen entfällt. Warum dies die Berechnung erheblich vereinfacht, wurde bereits im Beispiel zur Bestimmung der Verwölbung in Kapitel 4.4 erläutert. Somit berechnet sich die Grundverwölbung $\bar{\omega}_M(s)$ gemäß Gleichung (4-12) mithilfe der Sektorfläche $A_M^*(s)$ aus Gleichung (4-13) zu:

$$\bar{\omega}_M(s) = - \int r_M(s) \cdot ds = \pm 2 * A_M^*(s)$$

Es ist wichtig, die Vorzeichenkonvention zu beachten, um den Integrationsweg korrekt zu definieren. Der Querschnitt verdreht sich in der $y - z$ – Ebene aufgrund des positiven Torsionsschnittmoments im Uhrzeigersinn, wodurch der Integrationsweg festgelegt wird. Die Integration erfolgt stets entlang der Profilmittellinie. Nun wird die Verwölbung des rechten oberen Flansches an Punkt P_1 ermittelt. Die Sektorfläche $A_M^*(s)$ ist in Abbildung 5-2 dargestellt und berechnet sich zu:

$$A_{M,1}^*(s) = \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{h \cdot b}{8}$$

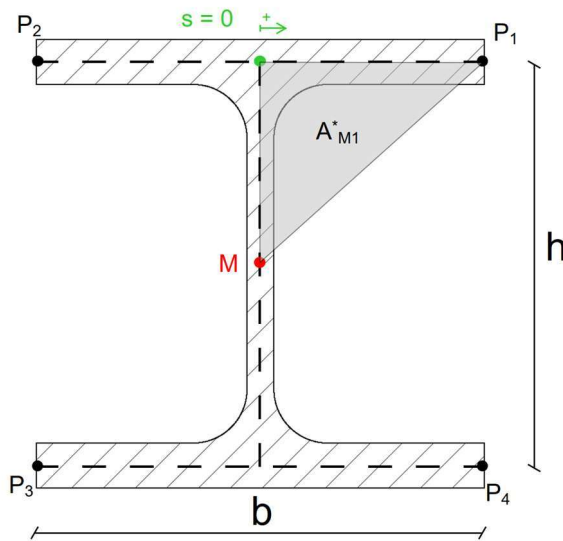
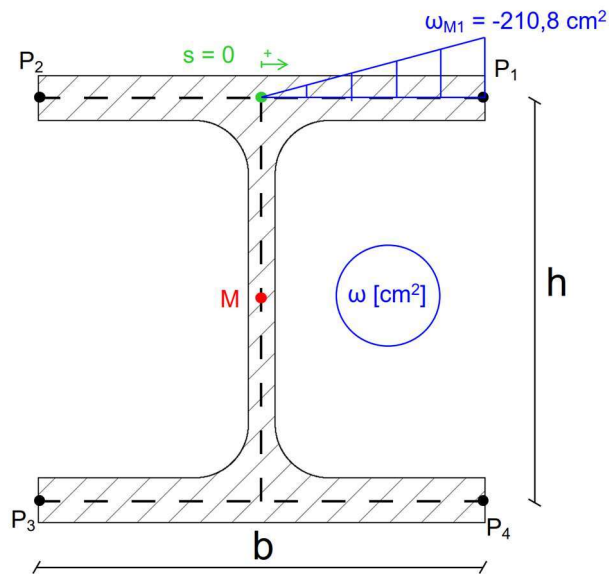


Abbildung 5-2: Ermittlung der Sektorfläche $A_M^*(s)$ an Punkt P_1 , Beispiel 1

Es ist zu beachten, dass die Höhe h nicht die gesamte Profilhöhe H ist, sondern der Abstand zwischen den Profilmittellinien der Flansche. Die Grundverwölbung $\bar{\omega}_M(s)$ berechnet sich schließlich aus dem doppelten Flächeninhalt der Sektorfläche $A_M^*(s)$. Für den rechten oberen Flansch an Punkt P_1 ist die Verwölbung nach Definition des negativen Integrals negativ und verursacht somit eine Drucknormalspannung. Das Ergebnis ist gleichzeitig die Herleitung der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ eines I-Profils um den Schubmittelpunkt M . Die Sektorfläche $A_M^*(s)$ zeigt auch, dass die Verwölbung linear entlang der Flansche verlaufen muss.

$$\omega_M(s) = \bar{\omega}_M(s) = \pm 2 \cdot A_M^*(s)$$

$$1: \quad \omega_{M,1} = -2 \cdot \frac{h \cdot b}{8} = -\frac{h \cdot b}{4} = \frac{(30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm}) \cdot 30 \text{ cm}}{4} = -210,8 \text{ cm}^2$$

Abbildung 5-3: Einheitsverwölbung $\omega_{M,1}(s)$ an Punkt P_1 , Beispiel 1

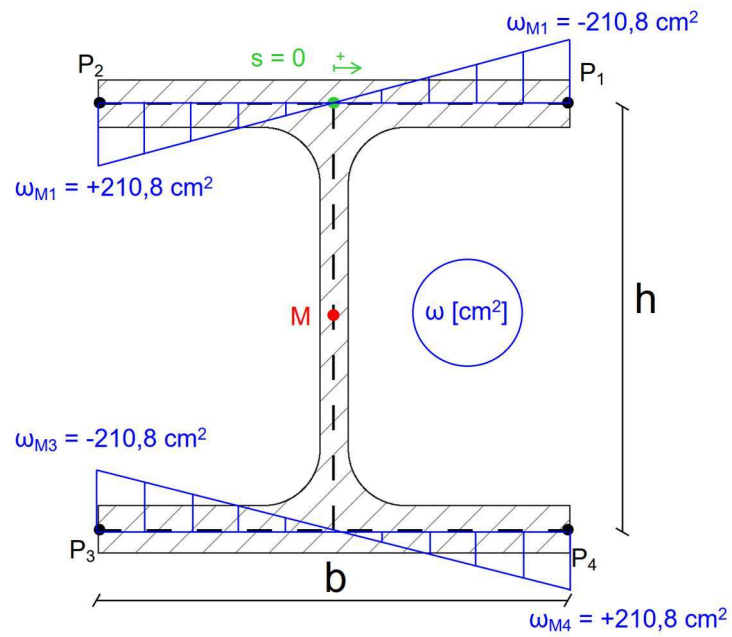
Aus Symmetriegründen ist der Betrag der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ für die Punkte P_2 bis P_4 identisch, es ist lediglich auf das Vorzeichen zu achten. Für Punkt P_2 verläuft die Verwölbung weiterhin linear bis zur linken oberen Flanschecke und führt zu einer positiven Einheitsverwölbung $\omega_{M,2}(s)$ des Querschnitts. Der Steg ist hier frei von Verwölbung, da keine Sektorfläche $A_M^*(s)$ aufgespannt werden kann. Der Vorgang für den unteren Flansch ist unter Berücksichtigung des Vorzeichens und des Drehsinns identisch. Der endgültige Verlauf der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ ist in Abbildung 5-4 dargestellt.

$$\omega_M(s) = \bar{\omega}_M(s) = \pm 2 \cdot A_M^*(s)$$

$$2: \quad \omega_{M,2} = \frac{hb}{4} = \frac{(30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm}) \cdot 30 \text{ cm}}{4} = 210,8 \text{ cm}^2$$

$$3: \quad \omega_{M,3} = -\frac{hb}{4} = -\frac{(30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm}) \cdot 30 \text{ cm}}{4} = -210,8 \text{ cm}^2$$

$$4: \quad \omega_{M,4} = \frac{hb}{4} = \frac{(30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm}) \cdot 30 \text{ cm}}{4} = 210,8 \text{ cm}^2$$

Abbildung 5-4: Endgültiger Verlauf der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$, Beispiel 1

5.2.3 Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$

Um den sekundären Schubspannungsverlauf $\tau_{2A}(s)$ entlang des Querschnitts zu bestimmen, wird der Verlauf der Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$ benötigt. Wie bereits in der Wölbkrafttorsionstheorie erläutert wurde, entspricht die Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$ dem statischen Moment $S_z(s)$ in der Biegetheorie. Gemäß Gleichung (4-50) ist die Wölbfläche $S_{\omega A}(s)$ das Integral der Einheitsverwölbung $\omega_A(s)$ entlang des Querschnitts. Da bei I-Profilen nur die Flansche sich verwölben, erfolgt die Integration entlang der Profilmittellinie nach ds . Wie zuvor bei der Ermittlung der Verwölbung wird im Index die Drehachse A durch den Schubmittelpunkt M beschrieben.

$$S_{\omega M}(s) = \int_A \omega_M(s) \cdot dA = \int \omega_M(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

Nun stellt sich die Frage, an welchem Punkt mit der Integration begonnen werden soll. Logischerweise sollte ein Punkt gewählt werden, an dem die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ bereits null ist, um eine aufwändige Bestimmung der Integrationskonstante zu vermeiden, ähnlich wie bei der Verwölbung. In der Wölbkrafttorsionstheorie treten an freien Rändern keine sekundären Schubspannungen $\tau_{2A}(s)$ auf, was für die Flanschränder an den Punkten P_1 bis P_4 gilt. Der Ursprung der Laufkoordinate s wird bei Punkt P_2 festgelegt. Aufgrund der Querschnittsverdrehung im Uhrzeigersinn erfolgt die positive Integrationsrichtung ebenfalls in Richtung Uhrzeigersinn. Für die Integration wird der zuvor berechnete Verlauf der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ benötigt. Auf Abbildung X ist links der zuvor ermittelte Verlauf der Einheitsverwölbung dargestellt, während rechts der Querschnitt mit dem noch einzutragenden Verlauf der Wölbfläche zu sehen ist.

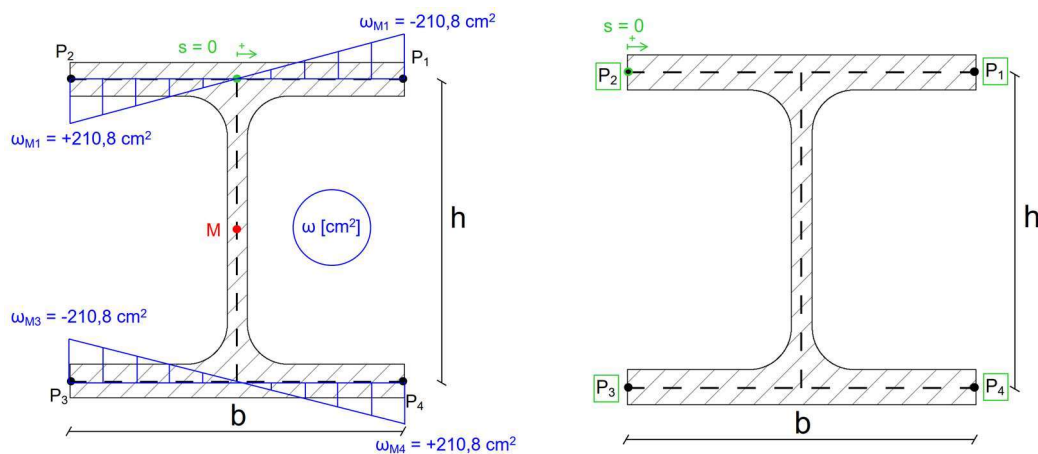


Abbildung 5-5: Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ links und einzutragende Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ rechts, Beispiel 1

Jetzt wird damit begonnen, die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ zu berechnen. Zur Veranschaulichung werden zwei weitere Zwischenpunkte, P_5 und P_6 , entlang des oberen Flansches definiert, an denen zunächst die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ berechnet werden soll. An der Stelle P_5 berechnet sich die Wölbfläche $S_{\omega M,5}(s)$ zu:

$$S_{\omega M}(s) = \int \omega_M(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$2: \quad S_{\omega M,2} = \quad \quad \quad = 0 \text{ cm}^4$$

$$5: \quad S_{\omega M,5} = \frac{210,8 \text{ cm}^2 + 210,8 \text{ cm}^2 / 2}{2} \cdot 1,9 \text{ cm} \cdot \frac{30 \text{ cm}}{4} = 2253 \text{ cm}^4$$

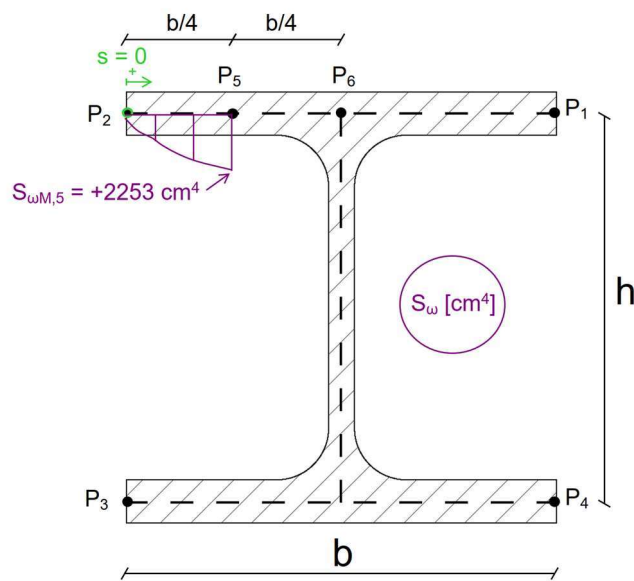


Abbildung 5-6: Wölbfläche $S_{\omega M,5}(s)$ an Punkt P_5 , Beispiel 1

Es wird weiter bis Punkt P_6 integriert.

$$S_{\omega M}(s) = \int \omega_M(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$6: \quad S_{\omega M,6} = 2253 \text{ cm}^4 + \frac{210,8 \text{ cm}^2/2}{2} \cdot 1,9 \text{ cm} \cdot \frac{30 \text{ cm}}{4} = 3004 \text{ cm}^4$$

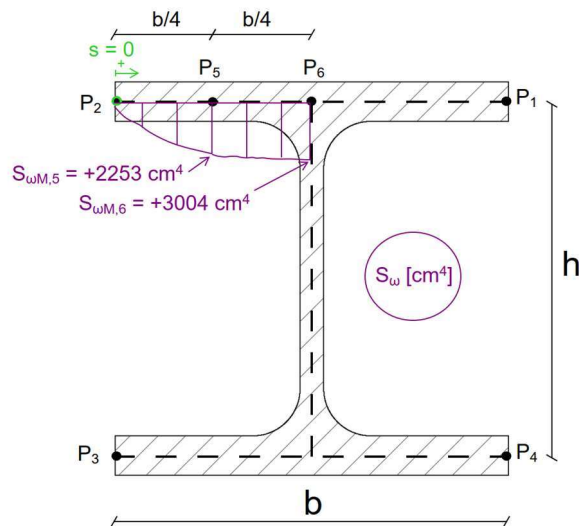


Abbildung 5-7: Wölbfläche $S_{\omega M,6}(s)$ an Punkt P_6 , Beispiel 1

Wie zu sehen ist, verläuft die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ entlang des Flansches parabolisch. Aus Symmetriegründen lässt sich der restliche Verlauf ableiten. Das Endergebnis ist in Abbildung 5-8 dargestellt.

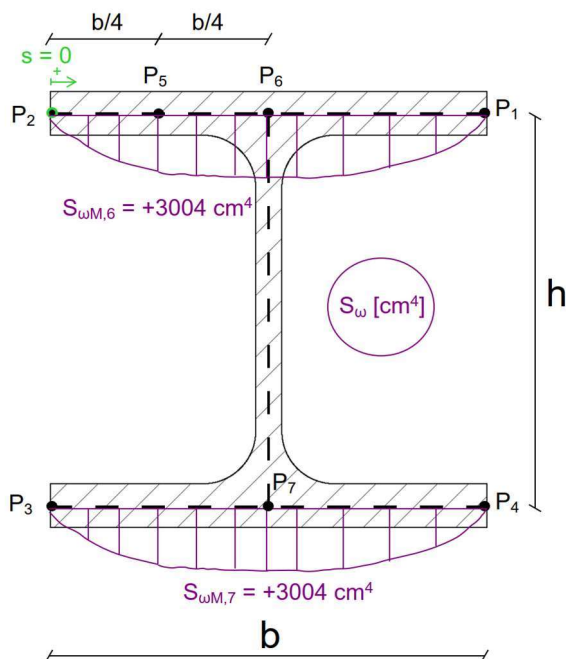


Abbildung 5-8: Endgültiger Verlauf der Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$, Beispiel 1

5.2.4 Wölbwiderstand $I_{\omega A}$ und Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T

Die letzten Querschnittsgrößen zur Berechnung der Wölbkrafttorsion lassen sich besonders schnell für I-Profile ermitteln. Das Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T berechnet sich gemäß Gleichung (3-15), wie bereits in der St. Venantschen Torsionstheorie hergeleitet.

$$I_T = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot t_i^3$$

$$I_T = 1,33 \cdot \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot 30 \text{ cm} \cdot (1,9 \text{ cm})^3 + (30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm}) \cdot (1,1 \text{ cm})^3] = 199,0 \text{ cm}^4$$

$$\text{Nach Profiltabellen: } = 185,0 \text{ cm}^4$$

Die Differenz der Torsionsflächenmomente 2. Grades I_T ergibt sich aufgrund der pauschalen Annahme des Formfaktors η für I-Profile. In Profiltabellen sind genauere Werte angegeben, die auch die Walzradien r berücksichtigen. Für den Wölbwiderstand $I_{\omega M}$ wurde Gleichung (4-36) hergeleitet als Integral der Einheitsverwölbung ω_M über die Querschnittsfläche A . Auch hier zeigt sich im Index, dass der Wölbwiderstand $I_{\omega M}$ von der Drehachse des Schubmittelpunktes M abhängt. Wird eine konstruktiv andere Drehachse verwendet, ändern sich entsprechend die Größen der Einheitsverwölbung ω_M und somit auch der Wölbwiderstand $I_{\omega M}$. Erneut wird auf das Beispiel zur Ermittlung der Einheitsverwölbung ω_M in Kapitel 4.4 hingewiesen, wo bereits unterschiedliche Drehachsen untersucht und deren Verwölbungsverlauf dargestellt wurden.

$$I_{\omega M} = \int_A \omega_M^2 \cdot dA$$

Für I-Profile lässt sich der Integrationsausdruck vereinfachen zu:

$$I_{\omega M} = \int \omega_M^2(s) \cdot t \cdot ds$$

Um die Integration durchführen zu können, ist noch eine Funktion für $\omega_M(s)$ erforderlich. Diese lässt sich leicht herleiten, da die Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ nur in den Flanschen auftritt und linear ansteigt. Es wird für $\omega_M(s)$ folgendes definiert:

$$\omega_M(s) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot s$$

Zur Überprüfung der gerade definierten Funktion wird für $s = b/2$ eingesetzt, also die Hälfte der Flanschlänge.

$$\omega_M(s) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{b}{2} = \frac{b \cdot h}{4}$$

Das Ergebnis stimmt mit der zuvor hergeleiteten Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ für I-Profile überein, was die angenommene Funktion für die Verwölbung $\omega_M(s)$ bestätigt. Es ist entscheidend, dass die Höhe h sich auf die Profilmittellinie der Flansche bezieht und nicht auf die gesamte Profilhöhe H . Dies wurde bereits bei der Berechnung der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ erwähnt. Diese Definition ist erforderlich, um die Ableitung des Wölbwiderstands $I_{\omega M}$ für I-Profile sowie die Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ für I-Profile mit der Literatur [2] in Einklang zu bringen. Abbildung 5-9 zeigt nochmals den Vergleich der Variablendefinition für die Querschnittsabmessungen rechts und die Abmessungen für die Berechnung der Querschnittsgrößen der Wölbkrafttorsion links.

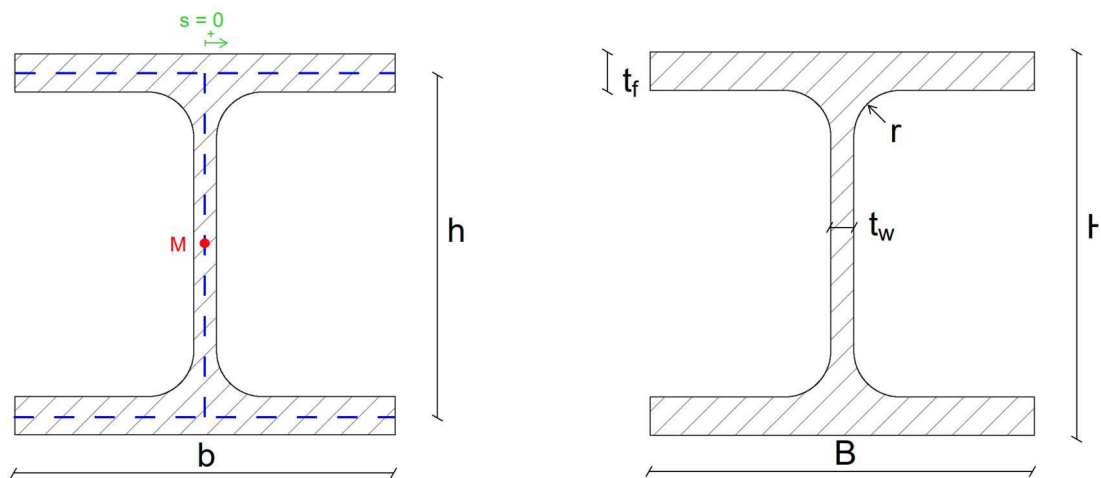


Abbildung 5-9: Vergleich der Querschnittsabmessungen, Beispiel 1

Die Integration wird weiter vereinfacht, da aus Symmetriegründen für beide Flansche $I_{\omega M}/2$ gilt. Die Integration erfolgt demnach entlang eines Flansches, wobei das Ergebnis verdoppelt wird. Für die Flanschdicke t_f wird einfachheitshalber t definiert. Der Ursprung der Laufkoordinate s wird an der Symmetrieachse wie in Abbildung 5-9 festgelegt. Es wäre jedoch ebenso möglich, einen anderen Ursprung für s zu wählen. Die Integrationsgrenzen sind somit ebenfalls festgelegt. Der Wölbwiderstand für I-Profile berechnet sich dann zu:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega M} &= 2 \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{h^2}{4} \cdot s^2 \cdot t \cdot ds = \frac{h^2 \cdot t}{2} \cdot \frac{s^3}{3} \bigg|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{h^2 \cdot t}{6} \cdot \left[\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{h^2 \cdot b^3}{24} \cdot t
 \end{aligned}$$

Damit ist der Wölbwiderstand $I_{\omega M}$ für I-Profile hergeleitet. Setzt man die Abmessungen ein, erhält man:

$$I_{\omega M} = \frac{h^2 \cdot b^3}{24} \cdot t = \frac{(30 \text{ cm} - 1,9 \text{ cm})^2 \cdot (30 \text{ cm})^3}{24} \cdot 1,9 \text{ cm} = 1,688 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$$

$$\text{Nach Profiltabellen: } = 1,688 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$$

Überraschenderweise stimmt die Handrechnung zu 100% mit dem Wert aus den Profiltabellen überein. Daher lässt sich schlussfolgern, dass diese Herleitung auch für Profiltabellen übernommen werden kann, ohne die Walzradien r zu berücksichtigen.

5.2.5 Schnittgrößenverläufe $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$

Nachdem alle notwendigen Querschnittsgrößen berechnet wurden, können die Schnittgrößenverläufe der Torsionsanteile $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$ bestimmt werden. Wie bereits in Kapitel 4.6 beschrieben, erfolgt die händische Berechnung der Schnittgrößenverläufe $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$ über die Differentialgleichung aus Gleichung (4-16), wobei die vorherrschenden Randbedingungen eingesetzt werden, ähnlich der Vorgehensweise zur Ermittlung der Biegelinie. Die Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion ist komplexer als die der Biegelinie, daher wurden Tabellenwerke zur schnelleren Berechnung entwickelt, die bereits eingesetzte Randbedingungen nutzen. Zur Berechnung der Wölbkrafttorsionsschnittgrößen wird die Tabelle aus [4] verwendet, die auf dem Ansatz von Winkelfunktionen basiert. Diese Tabelle wird hier erneut in Tabelle 5-1 dargestellt.

$$\vartheta = \frac{C_1}{\lambda^2} \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \frac{C_2}{\lambda^2} \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4 - \frac{m_T}{2 \cdot G \cdot I_T} \cdot x^2$$

$$\vartheta' = \frac{C_1}{\lambda} \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{C_2}{\lambda} \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_3 - \frac{m_T}{G \cdot I_T} \cdot x$$

$$\vartheta'' = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{m_T}{G \cdot I_T}$$

$$\vartheta''' = C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda \cdot x)$$

Tabelle 5-1: Tabellenwerk zur Berechnung der Wölbkrafttorsionsschnittgrößen, Beispiel 1 [4]

System			
$E I_W \vartheta$	 $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\lambda x - \frac{\sinh \lambda l - \sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$	 $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\frac{b}{l} \lambda x - \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x \right)$ $\frac{M_T}{\lambda^3} \left(\frac{a}{l} \lambda x' - \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x' \right)$	 $\frac{m_T}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda^2 x x' - 1}{2} + \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$
$M_{px} = \lambda^2 E I_W \vartheta'$	 $M_T \left(1 - \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l} \right)$	 $M_x = M_T \cdot \frac{b}{l}$ $M_x = M_T \cdot \frac{a}{l}$ $M_T \left(\frac{b}{l} - \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x \right)$ $M_T \left(-\frac{a}{l} + \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x' \right)$	 $\frac{m_T}{\lambda} \left[\lambda \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right]$
$M_W = -E I_W \vartheta''$	 $-\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$	 $\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x$ $\frac{M_T}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \sinh \lambda x'$	 $\frac{m_T}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\sinh \lambda x + \sinh \lambda x'}{\sinh \lambda l} \right)$
$M_{sx} = -E I_W \vartheta'''$	 $M_T \cdot \frac{\cosh \lambda x'}{\cosh \lambda l}$	 $M_T \cdot \frac{\sinh \lambda b}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x$ $-M_T \cdot \frac{\sinh \lambda a}{\sinh \lambda l} \cdot \cosh \lambda x'$	 $-\frac{m_T}{\lambda} \cdot \frac{\cosh \lambda x - \cosh \lambda x'}{\sinh \lambda l}$

Das statische System entspricht dem in der rechten Spalte dargestellten. Der Abklingfaktor λ berechnet sich gemäß Gleichung (4-43) zu:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega M}}}$$

$$\text{Mit: } I_T = 199 \text{ cm}^4$$

$$I_{\omega M} = 1,688 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$$

$$E = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu = 0,3 \text{ (Querdehnzahl Baustahl)}$$

$$G = \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot E = \frac{1}{2 \cdot (1 + 0,3)} \cdot 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 8077 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{8077 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 199 \text{ cm}^4}{21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 1,688 \cdot 10^6 \text{ cm}^6}} = 6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$

Die Variablenbezeichnungen aus Tabelle 5-1 werden nun angepasst, damit sie mit diesem Beispiel übereinstimmen. Die Torsionsschnittgrößen $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_{\omega}(x)$ werden zunächst an der Stelle $x = 0$ berechnet.

$$m_T = m_x = 100 \text{ kNcm/cm}$$

$$\begin{aligned} M_{px} = M_{T1} &= \frac{m_x}{\lambda} \cdot \left[\lambda \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{\cosh(\lambda \cdot x) - \cosh(\lambda \cdot x')}{\sinh(\lambda \cdot l)} \right] \\ &= \frac{100 \text{ kNcm/cm}}{6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}} \cdot \left[6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot \left(\frac{200 \text{ cm}}{2} - 0 \text{ cm} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 0 \text{ cm} \right) - \cosh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm} \right)}{\sinh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm} \right)} \right] \\ &= 1280 \text{ kNcm} = 12,80 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_w = M_{\omega} &= \frac{m_x}{\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{\sinh(\lambda \cdot x) + \sinh(\lambda \cdot x')}{\sinh(\lambda \cdot l)} \right) \\ &= \frac{100 \text{ kNcm/cm}}{\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \right)^2} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{\sinh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 0 \text{ cm} \right) + \sinh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm} \right)}{\sinh \left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm} \right)} \right) \\ &= 0 \text{ kNcm}^2 = 0 \text{ kNm}^2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis des Wölbmoments $M_\omega = 0 \text{ kNm}^2$ ist plausibel, da sich an den Gabellagerungen eine Verwölbung ungehindert ausbilden kann.

$$\begin{aligned}
 M_{sx} = M_{T2} &= -\frac{m_x}{\lambda} \cdot \frac{\cosh(\lambda \cdot x) - \cosh(\lambda \cdot x')}{\sinh(\lambda \cdot l)} \\
 &= -\frac{100 \text{ kNm/cm}}{6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}} \\
 &\quad \cdot \frac{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 0 \text{ cm}\right) - \cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)}{\sinh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)} \\
 &= 8720 \text{ kNm} = 87,20 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Um den Schnittgrößenverlauf darzustellen, wird der Balken in $n = 10$ Abschnitte unterteilt, so dass alle $\Delta = 20 \text{ cm}$ ein weiteres Ergebnis berechnet wird. Tabelle 5-2 zeigt die Knotenergebnisse für alle Torsionsanteile sowie das gesamte Torsionsschnittmoment M_T . Die Maximalwerte sind fett hervorgehoben.

Tabelle 5-2: Knotenergebnisse der Wölbkrafttorsion, Beispiel 1

x	M_{T1}	M_{T2}	M_ω	M_T
[cm]	[kNm]	[kNm]	[kNm ²]	[kNm]
0	12,80	87,20	0,00	100,00
20	12,07	67,93	15,49	80,00
40	10,10	49,90	27,26	60,00
60	7,23	32,77	35,51	40,00
80	3,76	16,24	40,40	20,00
100	0,00	0,00	42,02	0,00
120	-3,76	-16,24	40,40	-20,00
140	-7,23	-32,77	35,51	-40,00
160	-10,10	-49,90	27,26	-60,00
180	-12,07	-67,93	15,49	-80,00
200	-12,80	-87,20	0,00	-100,00

Der Verlauf des primären Torsionsanteils M_{T1} wird in Abbildung 5-10 dargestellt, während der sekundäre Torsionsanteil in Abbildung 5-11 zu sehen ist. Um die Größenunterschiede beider Torsionsanteile zu vergleichen, sind die Abbildungen identisch skaliert. Es ist deutlich erkennbar, dass der sekundäre Anteil nahezu linear verläuft und im Vergleich zum primären Anteil deutlich überwiegt. An den Gabellagerungen entstehen die größten Torsionsschnittmomente beider Anteile, während sie sich in der Feldmitte zu null entwickeln.

Da das Beispiel statisch bestimmt ist, ist bereits am statischen System deutlich erkennbar, dass an der linken Gabelagerung ein Gesamttorsionsschnittmoment $M_T = 100 \text{ kNm}$ mit einem linear abfallenden Schnittverlauf zur rechten Gabelagerung zu $M_T = -100 \text{ kNm}$ zu erwarten ist. Zur Kontrolle des Gesamttorsionsschnittmoments M_T wurde der primäre Torsionsanteil M_{T1} mit dem sekundären Torsionsanteil M_{T2} in Abbildung 5-12 sowie bereits in Tabelle 5-2 addiert und bestätigt dies.

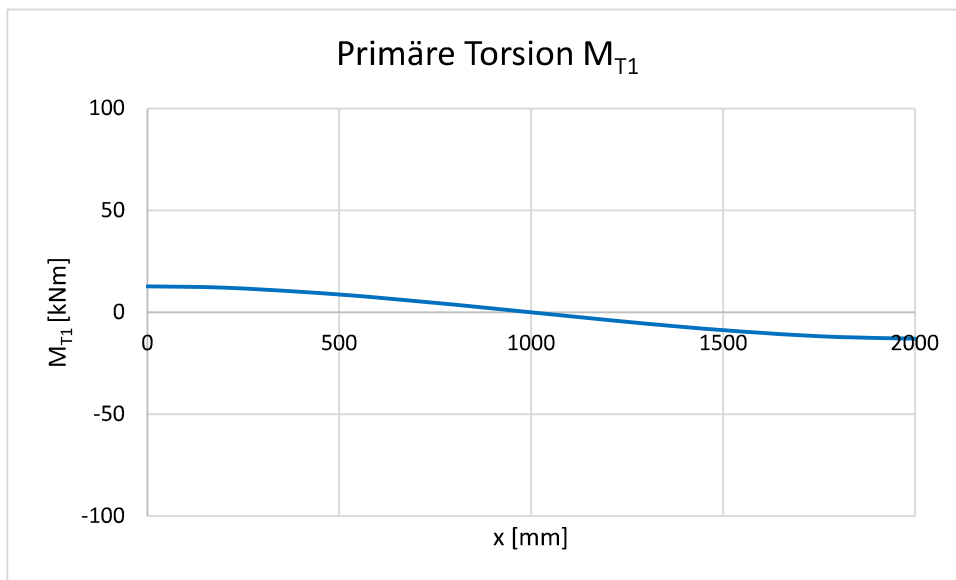


Abbildung 5-10: Schnittgrößenverlauf $M_{T1}(x)$, Beispiel 1

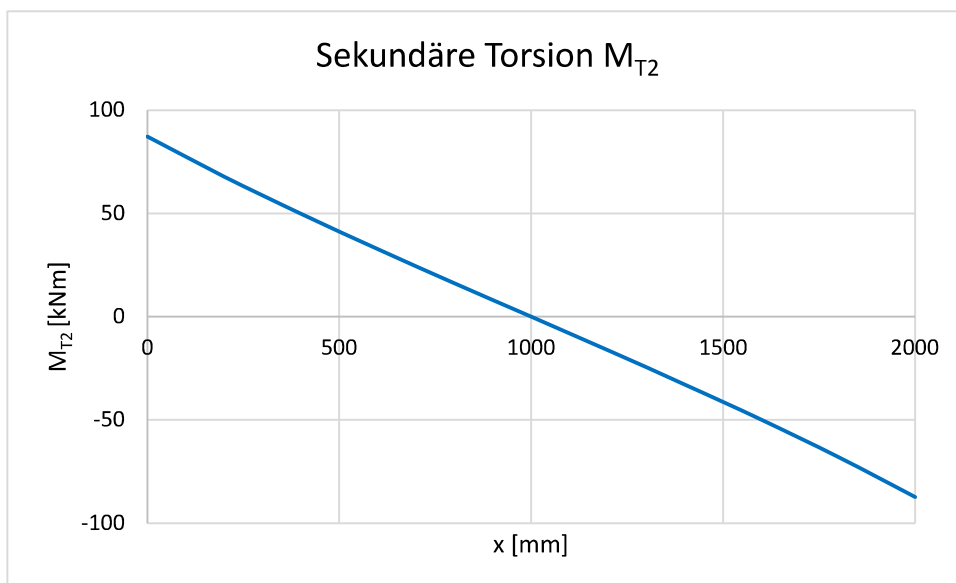


Abbildung 5-11: Schnittgrößenverlauf $M_{T2}(x)$, Beispiel 1

Der Verlauf des Wölbbimoments M_ω ist in Abbildung 5-13 dargestellt. Gemäß der Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (4-2) muss das Wölbbimoment M_ω die 1. Ableitung der sekundären Torsion M_{T2} sein. Daher weist das Wölbbimoment einen annähernd parabelförmigen Verlauf auf, mit dem größten Schnittmoment in der Feldmitte.

$$M'_\omega = M_{T2}$$

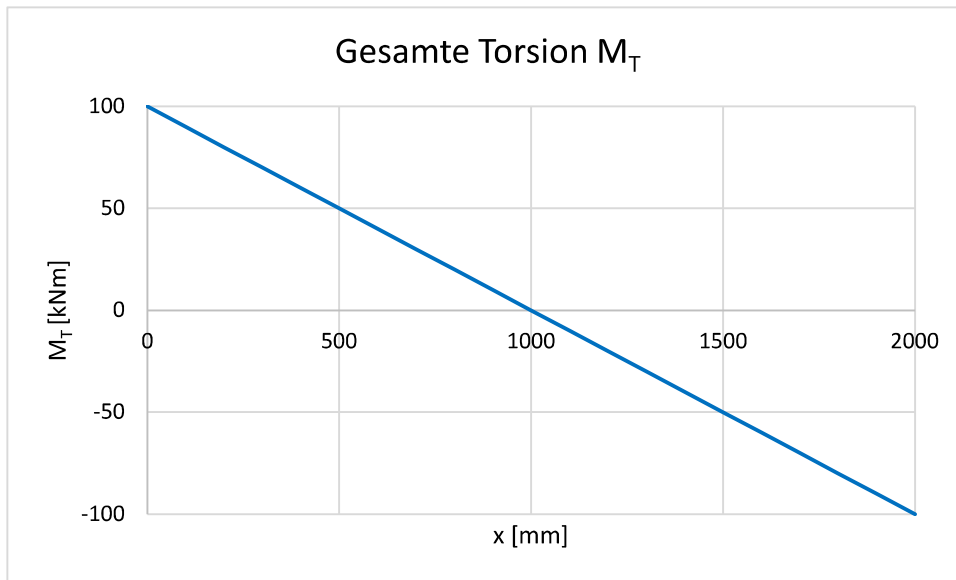


Abbildung 5-12: Gesamter Schnittgrößenverlauf $M_T(x)$, Beispiel 1

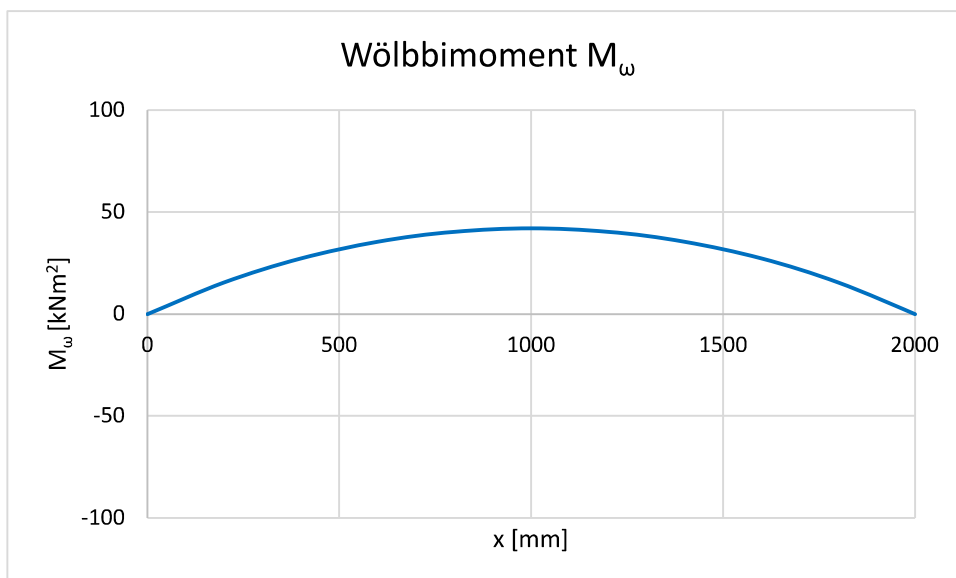


Abbildung 5-13: Schnittgrößenverlauf $M_\omega(x)$, Beispiel 1

5.2.6 Spannungen $\tau_1(s, x)$, $\sigma_{2A}(s, x)$ und $\tau_{2A}(s, x)$

Der letzte Schritt bei der händischen Berechnung der Wölbkrafttorsion ist die Spannungsberechnung. Zunächst werden die Schubspannungen $\tau_1(s, x)$ und $\tau_{2A}(s, x)$ ermittelt. Die kritischen Stellen befinden sich an den Gabellagerungen, da dort die größten Torsionsschnittmomente auftreten. erinnert man sich an die Grundformeln der primären Schubspannung $\tau_1(s, x)$ infolge reiner St. Venantschen Torsion für dünnwandig offene Querschnitte, werden die Schubspannungen im Flansch nach Gleichung (3-14) berechnet:

$$\tau_{1,f}(x = 0 \text{ cm}) = \frac{M_{T1}}{I_T} \cdot t_f = \frac{12,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1,99 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 19 \text{ mm} = 122,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Für den Steg wird die Berechnung der primären Schubspannung $\tau_1(s, x)$ analog durchgeführt. Das Ergebnis wird in Abbildung 5-14 dargestellt.

$$\tau_{1,w}(x = 0 \text{ cm}) = \frac{M_{T1}}{I_T} \cdot t_w = \frac{12,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1,99 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 11 \text{ mm} = 70,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

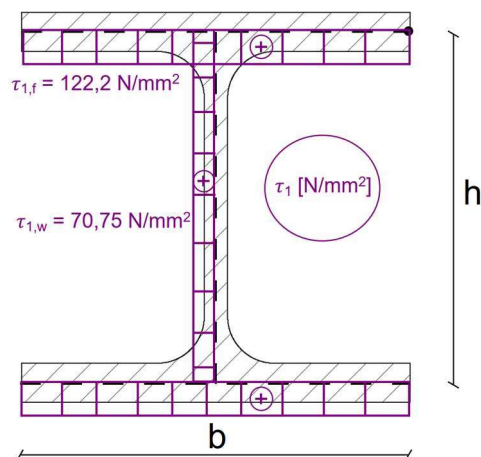


Abbildung 5-14: Primärer Schubspannungsverlauf $\tau_1(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1

Die Berechnung der sekundären Schubspannung $\tau_{2M}(s, x)$ um die Drehachse M erfolgt gemäß Gleichung (4-49). Die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ wurde bereits im Kapitel 5.2.3 eingetragen und zeigt, dass die sekundären Schubspannungen $\tau_{2M}(s, x)$ nur entlang der Flansche auftreten. Diese verlaufen proportional zur Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$. Für die Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ wird der Maximalwert eingesetzt. Abbildung 5-15 zeigt den Spannungsverlauf.

$$\tau_{2M}(x = 0 \text{ cm}) = \frac{M_{T2} \cdot S_{\omega M}}{I_{\omega M} \cdot t_f} = \frac{87,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 30,04 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{1,688 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6 \cdot 19 \text{ mm}} = 81,68 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

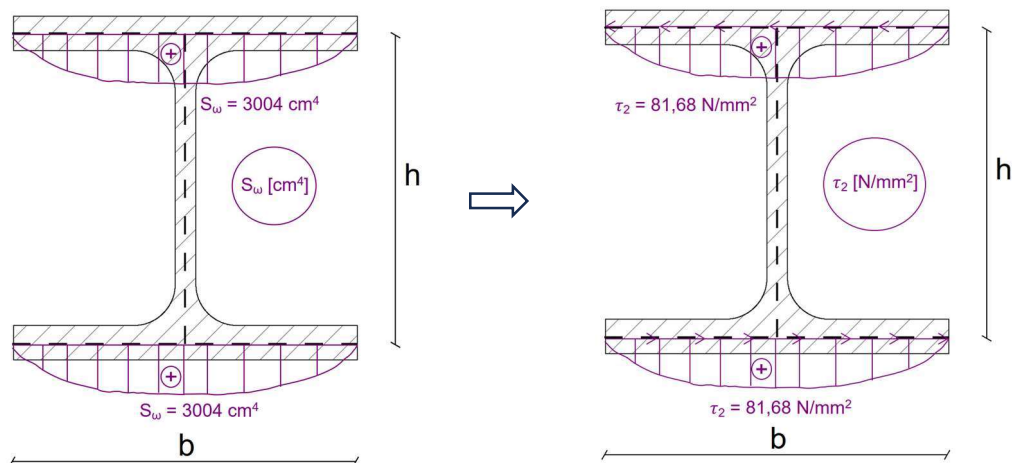


Abbildung 5-15: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau_{2M}(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1

Der gesamte Schubspannungsverlauf $\tau_{1+2}(s, x)$ ergibt sich als Summe aus beiden Schubspannungsanteilen. Das Ergebnis ist in Abbildung 5-16 eingetragen.

$$\tau_f(x = 0 \text{ cm}) = \tau_{1,f} + \tau_{2M} = 122,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 81,68 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 203,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

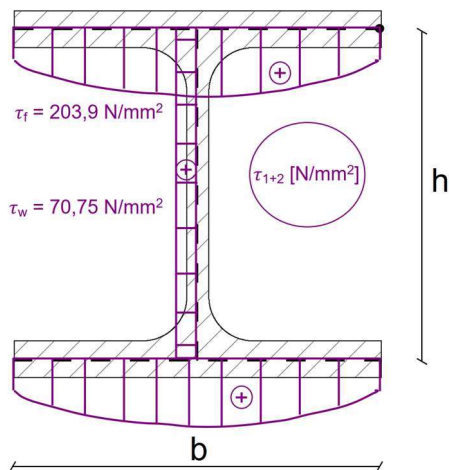


Abbildung 5-16: Gesamter Schubspannungsverlauf $\tau_{1+2}(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 1

Schließlich erfolgt die Berechnung der sekundären Normalspannung $\sigma_{2M}(s, x)$ nach Gleichung (4-48) an der Stelle $x = 100$ cm in Feldmitte. Die Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ wurde bereits im Kapitel 5.2.2 eingetragen und zeigt ebenfalls, dass die sekundären Normalspannungen $\sigma_{2M}(s, x)$ proportional (bis auf das Vorzeichen) dazu verlaufen müssen. Es wird die maximale Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$ eingesetzt. Abbildung 5-17 zeigt den Spannungsverlauf.

$$\begin{aligned}\sigma_{2M}(x = 100 \text{ cm}) &= -\frac{M_\omega}{I_{\omega M}} \cdot \omega_M = -\frac{42,02 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2}{1,688 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6} \cdot 21,08 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \\ &= -524,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

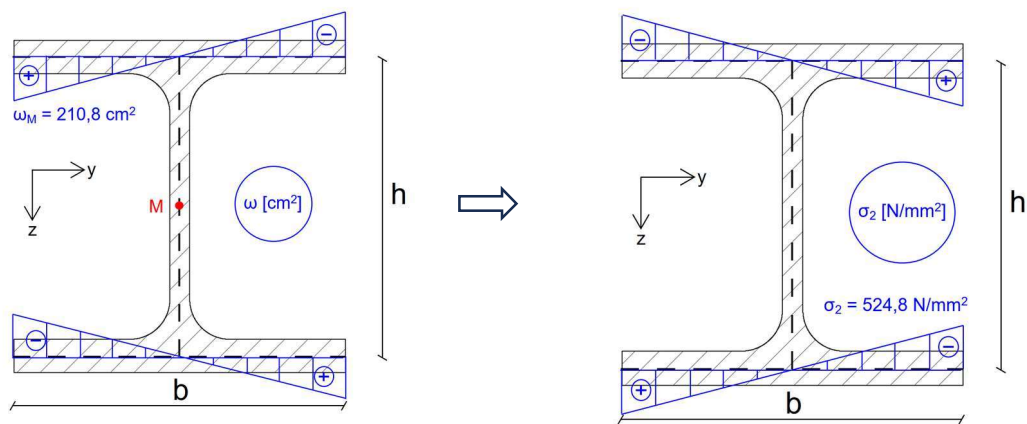


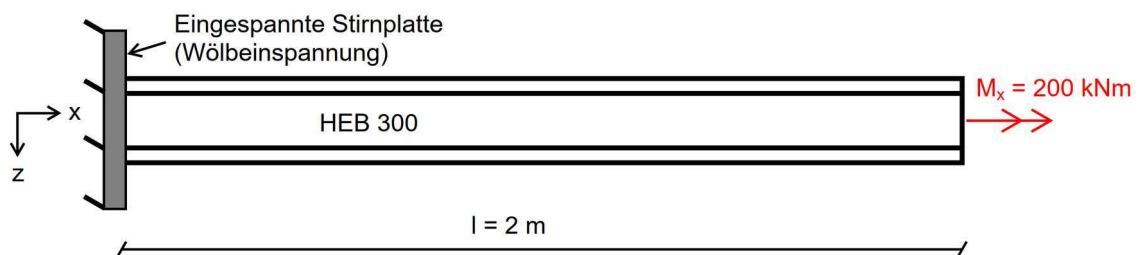
Abbildung 5-17: Sekundärer Normalspannungsverlauf $\sigma_{2M}(s, x)$ bei $x = 100$ cm, Beispiel 1

5.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm

5.3.1 Aufgabenstellung

Gegeben ist ein einseitig eingespannter Kragarm der Länge $l = 2 \text{ m}$ unter einer einzelnen Torsionseinwirkung $M_x = 200 \text{ kNm}$ an Kragarmspitze. Das Profil ist erneut ein HEB 300. An der Einspannstelle ist der Kragarm an einer Stirnplatte angeschlossen, sodass von einer starren Wölbeinspannung ausgegangen wird.

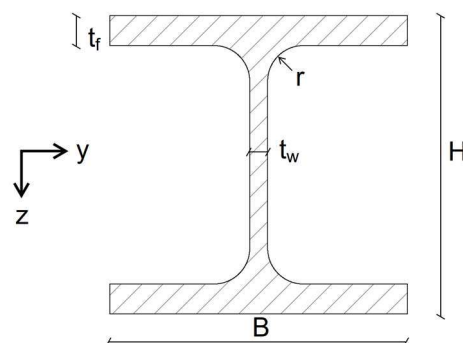
System:



Querschnittsabmessungen (wie Beispiel 1):

HEB 300, S355

H	=	300	mm
B	=	300	mm
t_w	=	11	mm
t_f	=	19	mm
r	=	27	mm



Gesucht:

- Schnittgrößenverläufe der Torsionsanteile $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$
- Primäre Schubspannung $\tau_1(s, x)$ und sekundäre Spannungen $\sigma_{2A}(s, x)$, $\tau_{2A}(s, x)$ an den Nachweisstellen

5.3.2 Schnittgrößenverläufe $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$

Das vorherige Beispiel hat sich bereits ausführlich mit der Ermittlung der Querschnittsgrößen wie der Einheitsverwölbung $\omega_M(s)$, der Wölbfläche $S_{\omega M}(s)$ und des Wölbwiderstands $I_{\omega M}$ für doppelsymmetrische I-Profile befasst. In diesem Beispiel wird dasselbe Stahlprofil, ein HEB 300, erneut verwendet, um die Querschnittswerte identisch zu halten. Bei einem einseitig eingespannten Kragarm gibt es eine Besonderheit bei der Schnittgrößenermittlung. Wie bereits in Kapitel 4.1 erklärt wurde, tritt die Wölbkrafttorsion nur an Stellen auf, wo entweder der Torsionsschnittverlauf M_T eine Änderung erfährt oder die Verdrillung ϑ' nicht konstant ist.

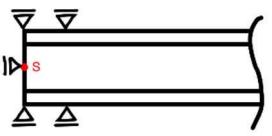
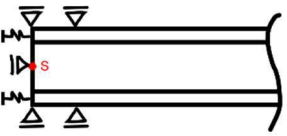
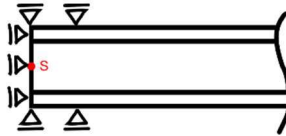
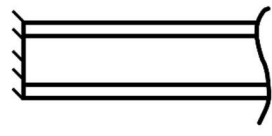
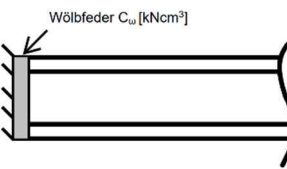
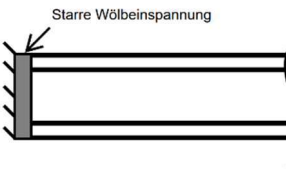
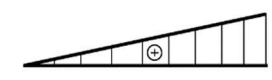
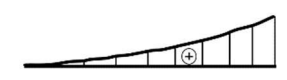

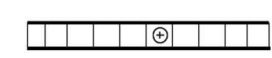
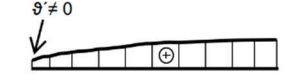
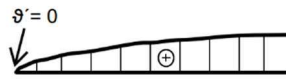
In diesem Beispiel ist auf einen Blick erkennbar, dass der Torsionsschnittverlauf M_T konstant bei $M_T = 200 \text{ kNm}$ über die gesamte Länge des Kragarms verläuft. Ebenfalls wird angenommen, dass der Verdrehungsverlauf ϑ linear von der Einspannung zur Kragarmspitze ansteigt, gefolgt von einer konstanten Verdrillung ϑ' . Da beide Bedingungen nicht erfüllt sind, tritt keine Wölbbehinderung auf. Um in diesem Beispiel Wölbkrafttorsion zu induzieren, muss zunächst die Bedeutung der Wölbeinspannung betrachtet werden. In einem statischen System der Stabstatik werden 3 Verschiebungsfreiheitsgrade u, v, w und 3 Rotationsfreiheitsgrade $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ berücksichtigt. Die Verwölbung bildet sich in Richtung u aus. In der Stabstatik wird die Verschiebung u im Querschnittsschwerpunkt berechnet. Da die Verwölbung insgesamt null ergibt, verwölbt sich der Querschnitt nicht um den Schwerpunkt herum. Es wird daher davon ausgegangen, dass sich der Querschnitt im Einspannbereich frei verwölben kann.

Tabelle 5-3 zeigt verschiedene Varianten zur Realisierung einer Wölbeinspannung. In Spalte 1 wird der Träger köcherartig eingespannt. Um auch in Längsrichtung das Gleichgewicht zu gewährleisten, wird zweckmäßig ein Loslager im Querschnittsschwerpunkt platziert. Das idealisierte statische System ist eine reine Einspannung, bei der sich der Querschnitt aufgrund der freiliegenden Flansche frei verwölben kann. Der zugehörige Verdrehungsverlauf ϑ ist, wie erwartet, linear ansteigend zur Kragarmspitze, mit einem konstant verlaufenden Verdrillungsverlauf ϑ' .

In Spalte 2 wird der Fall einer nachgiebigen Wölbeinspannung dargestellt, bei dem die beiden Flansche in Trägerlängsrichtung durch Wegfedern festgehalten werden. Dies könnte beispielsweise auftreten, wenn der Träger an einer Stütze eingespannt ist oder eine Stirnplatte am Trägerende angeschweißt ist. Das idealisierte System wird durch eine Einspannung mit Wölbfeder C_ω abgebildet. Die Wölbfeder C_ω kann man sich analog zur Drillfeder C_ϑ vorstellen. Auf die Bedeutung der Wölbfeder C_ω wird hier nicht weiter eingegangen. Der Verdrehungsverlauf ϑ steigt nicht mehr linear an, sondern ähnelt dem Verlauf einer Exponentialfunktion. Der zugehörige Verdrillungsverlauf ϑ' erfährt nun eine Änderung, sodass eine Wölbbehinderung nachgewiesen ist.

In Spalte 3 ist das statische Ersatzsystem dieses Beispiels abgebildet, indem die eingesetzten Wegfedern nun zu starren Loslagern in Trägerlängsrichtung ausgebildet werden. Der Querschnitt kann sich nicht mehr frei verwölben, daher die Bezeichnung Wölbeinspannung. Der Verdrehungsverlauf ϑ beginnt nun ausgehend von der Einspannung horizontal mit einem stetig zunehmenden Zuwachs. Der Verdrillungsverlauf ϑ' beginnt im Einspannbereich mit $\vartheta' = 0$, sodass eine starre Wölbeinspannung nachgewiesen ist.

Tabelle 5-3: Vergleich verschiedener Wölbeinspannungen, Beispiel 2

	Reine Einspannung	Teilweise Wölbeinspannung	Starre Wölbeinspannung
Lagerung			
Idealisiert			
Verdrehung ϑ			
Verdrillung ϑ'			

Die Schnittgrößenverläufe der Torsionsanteile $M_{T1}(x)$, $M_{T2}(x)$ und $M_\omega(x)$ werden nun erneut über die Differenzialgleichung mithilfe von Tabelle 5-1 händisch berechnet. Das statische System entspricht dem der linken Spalte. Der Abklingfaktor λ ist identisch mit dem aus Beispiel 1.

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega M}}} = 6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$

$$\text{Mit: } I_T = 199 \text{ cm}^4$$

$$I_{\omega M} = 1,688 \cdot 10^6 \text{ cm}^6$$

$$E = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$G = 8077 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Zur Veranschaulichung werden die Torsionsschnittgrößen an der Stelle $x = 0 \text{ cm}$ einmal händisch vorgerechnet.

$$M_T = M_x = 20000 \text{ kNcm}$$

$$\begin{aligned} M_{px} = M_{T1} &= M_x \cdot \left(1 - \frac{\cosh(\lambda \cdot x')}{\cosh(\lambda \cdot l)} \right) \\ &= 20000 \text{ kNcm} \cdot \left(1 - \frac{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)}{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)} \right) \\ &= 0 \text{ kNcm} = 0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Im Einspannbereich tritt keine primäre Torsion M_{T1} auf, da die Verdrillung $\vartheta' = 0$ ist. Das Elastizitätsgesetz der St. Venantschen Torsion aus Gleichung (3-8) bestätigt dies.

$$M_{T1} = G \cdot \vartheta' \cdot I_T$$

Das Wölbmoment M_ω und der sekundäre Torsionsanteil M_{T2} berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 M_w &= M_\omega = -\frac{M_x}{\lambda} \cdot \frac{\sinh(\lambda \cdot x')}{\cosh(\lambda \cdot l)} \\
 &= -\frac{20000 \text{ kNcm}}{6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}} \cdot \frac{\sinh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)}{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)} \\
 &= -2.593.691 \text{ kNcm}^2 = -259,4 \text{ kNm}^2
 \end{aligned}$$

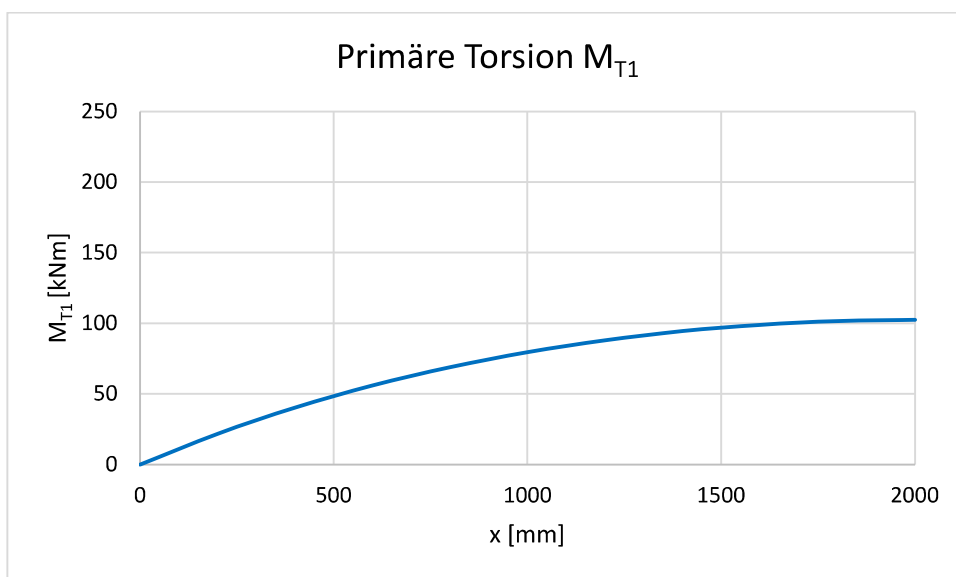
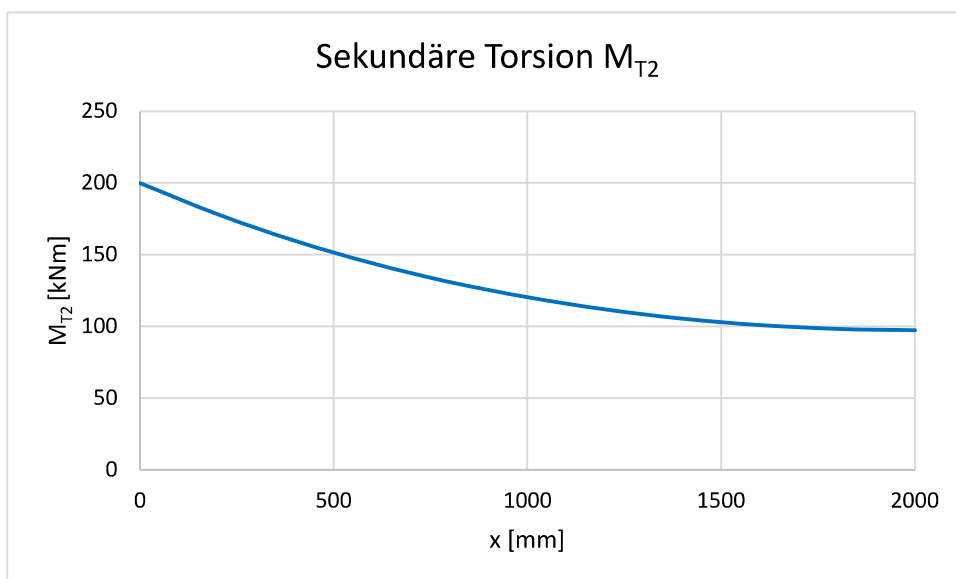
$$\begin{aligned}
 M_{sx} &= M_{T2} = M_x \cdot \frac{\cosh(\lambda \cdot x')}{\cosh(\lambda \cdot l)} \\
 &= 20000 \text{ kNcm} \cdot \frac{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)}{\cosh\left(6,734 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \cdot 200 \text{ cm}\right)} \\
 &= 20000 \text{ kNcm} = 200 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Tabelle 5-4 zeigt die Knotenergebnisse für alle Torsionsanteile sowie das gesamte Torsionsmoment M_T für die gleiche Stabeinteilung $\Delta = 20 \text{ cm}$. Die Maximalwerte sind fett hervorgehoben.

Tabelle 5-4: Knotenergebnisse der Wölbkrafttorsion, Beispiel 2

x	M_{T1}	M_{T2}	M_ω	M_T
[cm]	[kNm]	[kNm]	[kNm ²]	[kNm]
0	0,00	200,00	-259,38	200,00
20	21,78	178,22	-221,61	200,00
40	40,32	159,68	-187,87	200,00
60	55,95	144,05	-157,54	200,00
80	68,98	131,02	-130,08	200,00
100	79,62	120,38	-104,98	200,00
120	88,07	111,93	-81,78	200,00
140	94,50	105,50	-60,07	200,00
160	99,00	101,00	-39,45	200,00
180	101,67	98,33	-19,55	200,00
200	102,56	97,44	0,00	200,00

Der Verlauf für den primären Torsionsanteil M_{T1} wird in Abbildung 5-18 dargestellt, während der sekundäre Torsionsanteil M_{T2} in Abbildung 5-19 gezeigt wird. Um den Größenunterschied beider Torsionsanteile zu vergleichen, sind beide Abbildungen identisch skaliert. Beide Torsionsanteile weisen einen kurvigen Verlauf auf. Der primäre Torsionsanteil M_{T1} beginnt bei $x = 0$ cm und steigt abrupt an, bevor er zur Kragarmspitze hin abflacht. Da das gesamte Torsionsmoment M_T an jeder Stelle $M_T = 200$ kNm betragen muss, ergibt sich der sekundäre Torsionsanteil M_{T2} entsprechend. Im Bereich der Einspannstelle beträgt der sekundäre Torsionsanteil M_{T2} maximal $M_{T1} = 200$ kNm und flacht zur Kragarmspitze hin ab, wodurch ein trapezförmiger Gesamtverlauf entsteht.

Abbildung 5-18: Schnittgrößenverlauf M_{T1} , Beispiel 2Abbildung 5-19: Schnittgrößenverlauf M_{T2} , Beispiel 2

Der Verlauf des Wölbbimoments M_ω ist in Abbildung 5-21 dargestellt. Es erreicht sein Maximum im Bereich der Einspannung und flacht nahezu linear zur Kragarmspitze hin zu $M_\omega = 0 \text{ kNm}^2$ ab. Auch hier bestätigt sich, dass das Wölbbimoment M_ω die 1. Ableitung des sekundären Torsionsmoments M_{T2} ist.

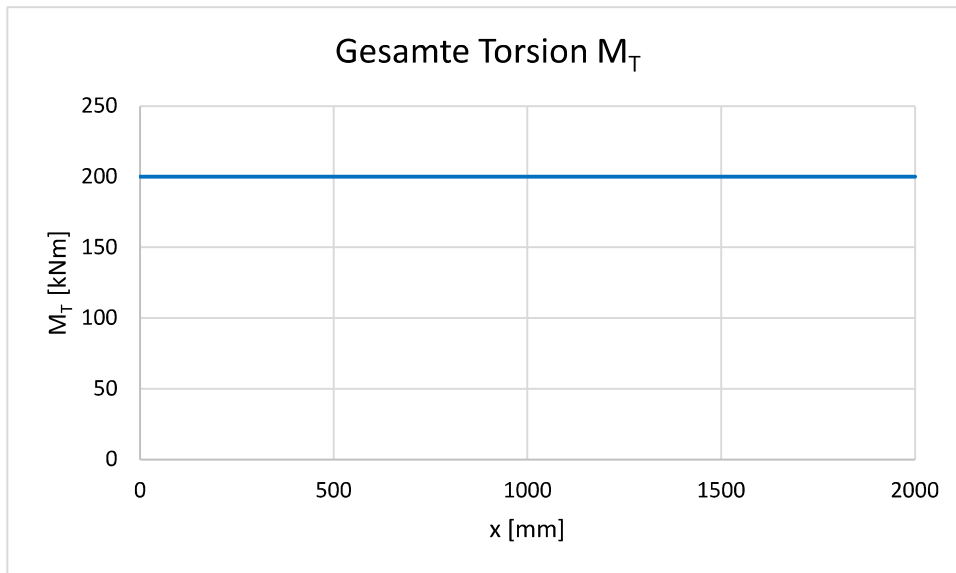


Abbildung 5-20: Gesamter Schnittgrößenverlauf M_T , Beispiel 2

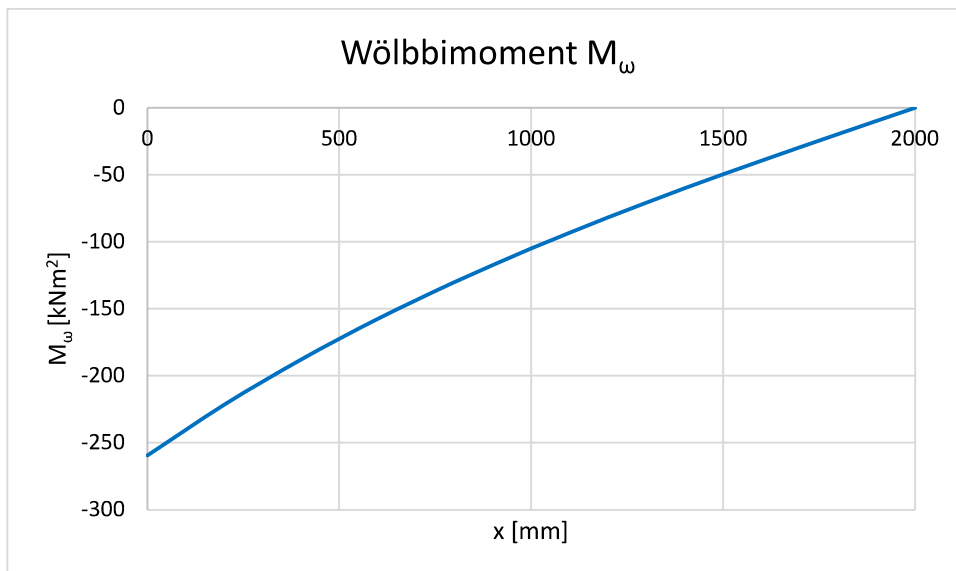


Abbildung 5-21: Schnittgrößenverlauf M_ω , Beispiel 2

5.3.3 Spannungen $\tau_1(s, x)$, $\sigma_{2A}(s, x)$ und $\tau_{2A}(s, x)$

In diesem Beispiel gibt es zwei Nachweisstellen, bei denen noch keine eindeutige Aussage über die maßgebende Stelle getroffen werden kann. Im Bereich der Einspannung bei $x = 0$ cm tritt das größte sekundäre Torsionsschnittmoment $M_{T2} = 200$ kNm auf, ebenso wie das größte Wölbmoment M_ω . Die zweite Nachweisstelle befindet sich an der Kragarmspitze bei $x = 200$ cm, wo das größte primäre Torsionsschnittmoment M_{T1} und ein etwa halb so großes sekundäres Torsionsschnittmoment M_{T2} auftreten. Zunächst wird die Einspannstelle bei $x = 0$ cm betrachtet.

Die sekundären Schubspannungen $\tau_{2M}(s, x)$ berechnen sich zu:

$$\tau_{2M}(x = 0 \text{ cm}) = \frac{M_{T2} \cdot S_{\omega M}}{I_{\omega M} \cdot t_f} = \frac{200 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 30,04 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{1,688 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6 \cdot 19 \text{ mm}} = 187,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

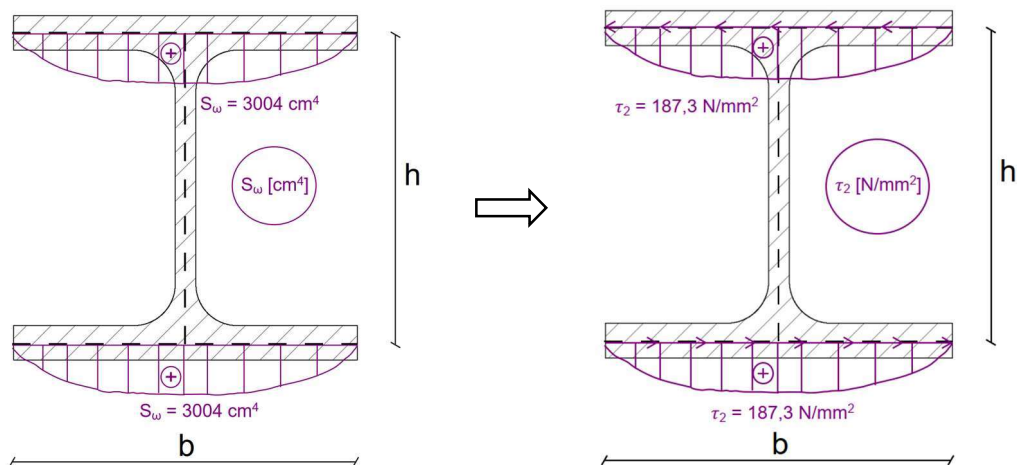


Abbildung 5-22: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau_{2M}(s, x)$ bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

Die sekundären Normalspannungen $\sigma_{2M}(s, x)$ berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{2M}(x = 0 \text{ cm}) &= -\frac{M_\omega}{I_{\omega M}} \cdot \omega_M = -\frac{-259,4 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2}{1,688 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6} \cdot 21,08 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \\ &= 3239 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

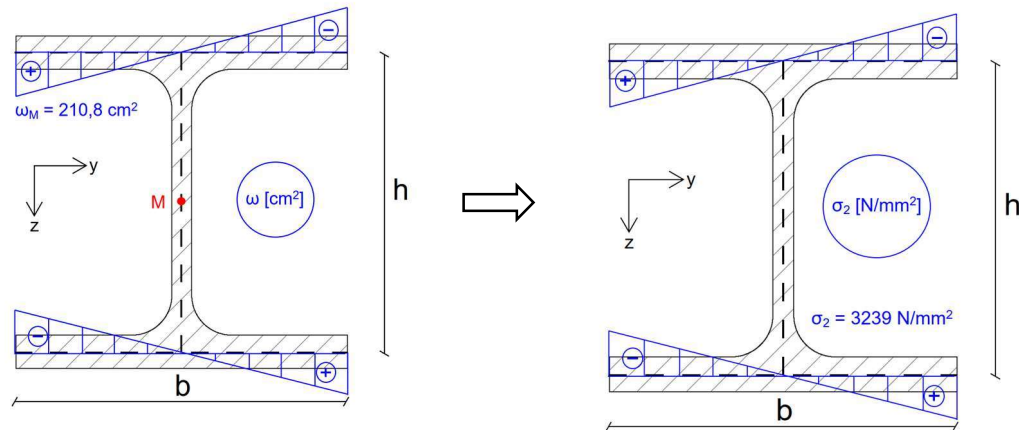


Abbildung 5-23: Sekundärer Normalspannungsverlauf $\sigma_{2M}(s, x)$ bei $x = 0 \text{ cm}$, Beispiel 2

Zuletzt wird die Kragarmspitze bei $x = 200 \text{ cm}$ untersucht. Dort treten nur Schubspannungen aufgrund der primären und sekundären Torsionsschnittmomente M_{T1}, M_{T2} auf. Die primären Schubspannungen $\tau_1(s, x)$ berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}\tau_{1,f}(x = 200 \text{ cm}) &= \frac{M_{T1}}{I_T} \cdot t_f = \frac{102,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1,99 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 19 \text{ mm} = 979,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \tau_{1,w}(x = 200 \text{ cm}) &= \frac{M_{T1}}{I_T} \cdot t_w = \frac{102,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1,99 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 11 \text{ mm} = 567,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

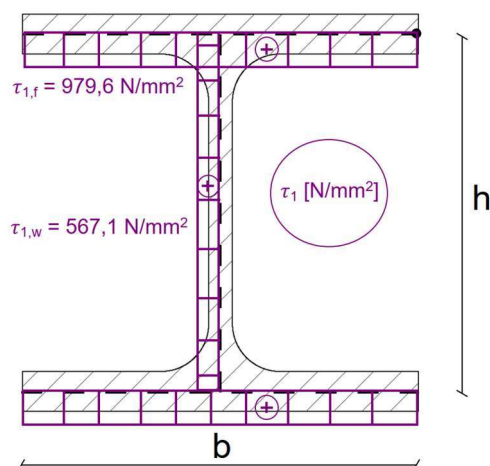


Abbildung 5-24: Primärer Schubspannungsverlauf $\tau_1(s, x)$ bei $x = 200 \text{ cm}$, Beispiel 2

Die sekundären Schubspannungen $\tau_{2M}(s, x)$ berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}\tau_{2M}(x = 200 \text{ cm}) &= \frac{M_{T2}(x) \cdot S_{\omega M}(s)}{I_{\omega M} \cdot t_f(s)} = \frac{97,44 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 30,04 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{1,688 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6 \cdot 19 \text{ mm}} \\ &= 91,27 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

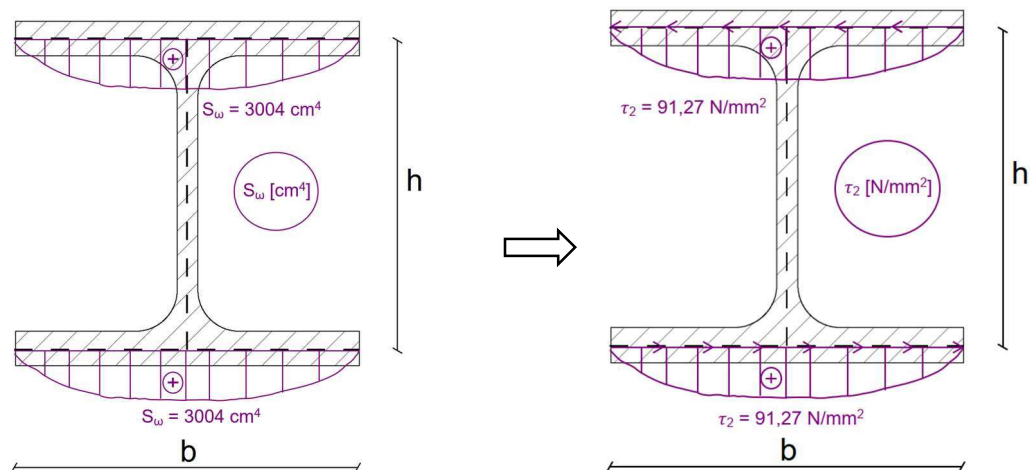


Abbildung 5-25: Sekundärer Schubspannungsverlauf $\tau_{2M}(s, x)$ bei $x = 200 \text{ cm}$, Beispiel 2

Die Summe beider Schubspannungen $\tau_{1+2}(s, x)$ beträgt:

$$\tau_f(x = 200 \text{ cm}) = \tau_{1,f} + \tau_{2M} = 979,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 91,27 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1071 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

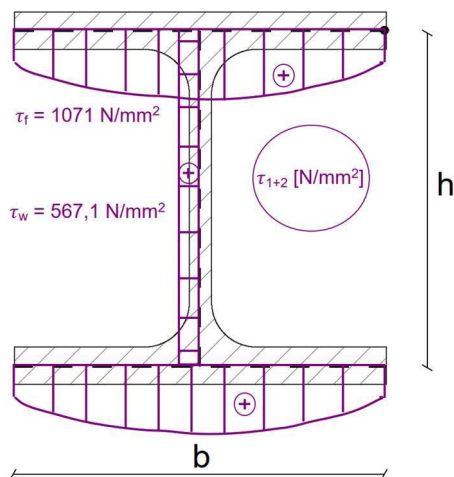


Abbildung 5-26: Gesamter Schubspannungsverlauf $\tau_{1+2}(s, x)$ bei $x = 200 \text{ cm}$, Beispiel 2

6 Vergleichsrechnung mit Stabwerksprogramm

6.1 Zielsetzung

In diesem Kapitel werden die beiden Handrechenbeispiele mithilfe des Stabprogramms RSTAB 9 nachgebildet und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Wie bereits bei den Handrechenbeispielen gezeigt, führt die Querschnittsverwölbung zu erheblichen Unterschieden in den Schnittgrößenverläufen und den resultierenden Spannungen im Vergleich zur Vernachlässigung des Wölbkrafttorsionsanteils. Bei der Berechnung mithilfe eines Stabprogramms werden 6 Freiheitsgrade (u , v , w , φ_x , φ_y , φ_z) im Stabschwerpunkt berechnet. Daraus lassen sich in der Querschnittsebene jedoch keine konkreten Aussagen über die Spannungen und Verformungen treffen. Daher ist die Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung und die Berechnung der Wölbkrafttorsion grundsätzlich nicht möglich.

Um Abhilfe zu schaffen, werden Programmiererweiterungen wie Plugins, Add-ons oder ähnliches zur Erweiterung des Stabprogramms angeboten. Für RSTAB 9 wurde das Add-on "Wölbkrafttorsion" entwickelt, um die Querschnittsverwölbung als 7. Freiheitsgrad in der globalen Berechnung zu berücksichtigen. Die Verwölbung wird hier als lokale Stabverformung angesehen, die Berücksichtigung erfolgt jedoch bei der Berechnung des globalen Modells. Dabei wird die Steifigkeit angrenzender Bauteile automatisch berücksichtigt [Quelle: Onlinehandbuch zu RSTAB 9]. Abbildung 6-1 zeigt die Aktivierung des Add-ons "Wölbkrafttorsion" während der Erstellung eines Modells. Es wird lediglich ein Häkchen gesetzt, damit die Wölbkrafttorsionsberechnung im gesamten Modell berücksichtigt wird.

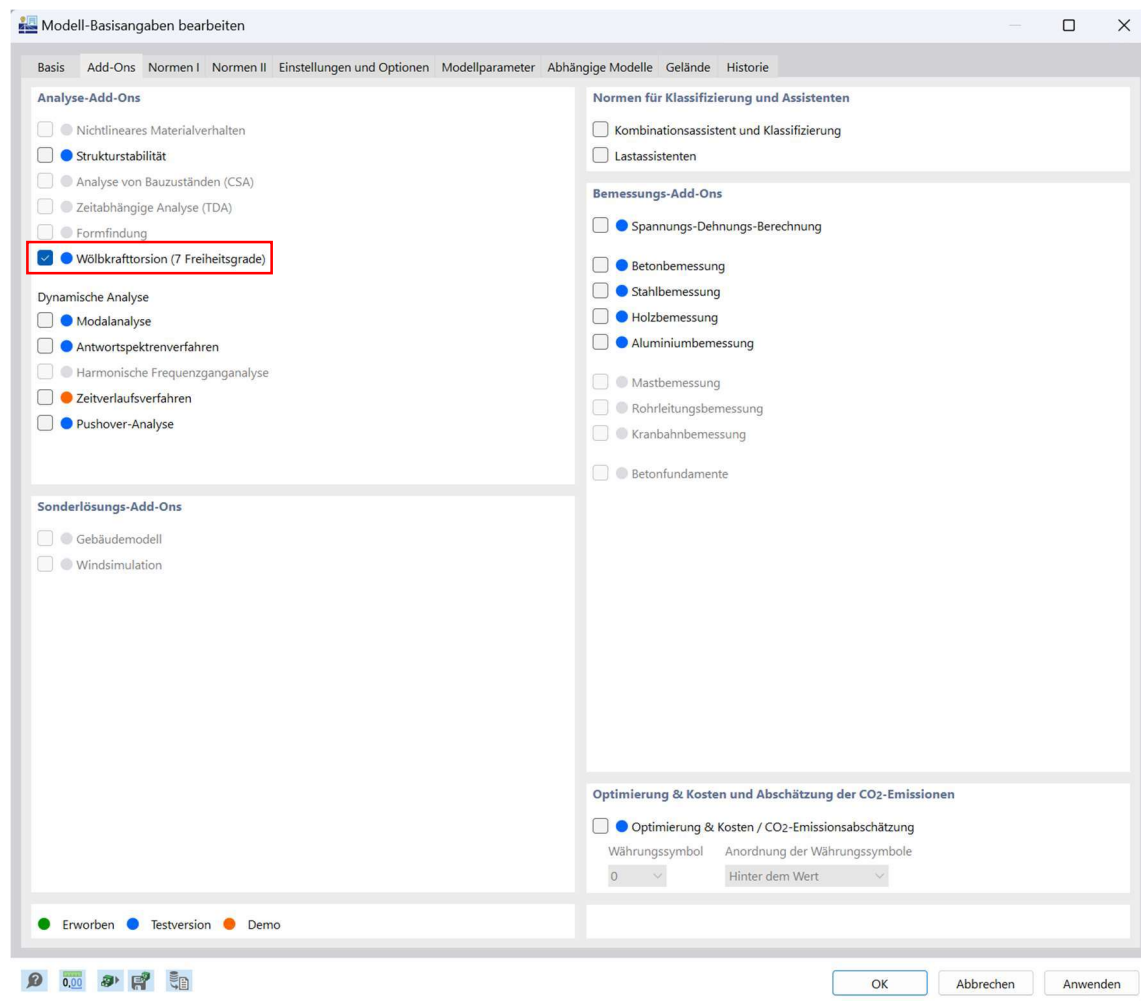
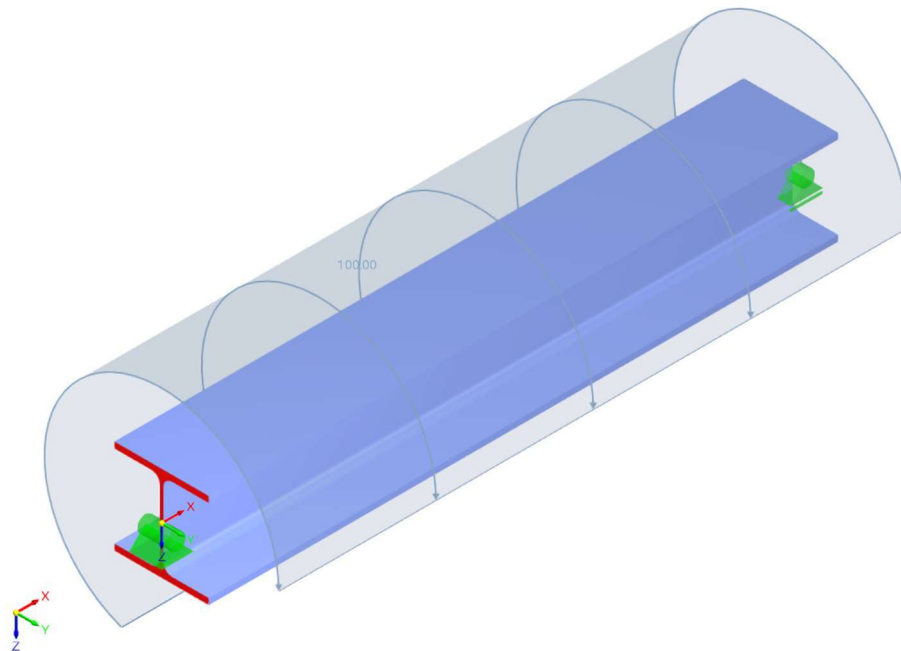


Abbildung 6-1: Basiseinstellung in RSTAB 9 zur Berechnung mit Wölbkrafttorsion, Beispiel 1

6.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger

6.2.1 Modell



Modelleingabe:

Profil	HEB 300, S355
Länge	$l = 2 \text{ m}$
Belastung	$m_x = 100 \text{ kNm/m}$
Lagerung ($x = 0 \text{ cm}$)	Feste Gabellagerung
Lagerung ($x = 200 \text{ cm}$)	Bewegliche Gabellagerung in x – Richtung

Berechnungseinstellung:

Theorie	I. Ordnung
Stabteilung für Ergebnisverlauf	$n = 10$

6.2.2 Eingabe

Während der Stabeingabe wird man automatisch aufgefordert, zunächst einen Querschnitt zu wählen. Für die Wölbkrafttorsionsberechnung stehen nur vorgegebene Querschnitte aus der programminternen Querschnittsbibliothek zur Verfügung. In Abbildung 6-2 sind die einstellbaren Optionen des HEB 300 Querschnitts aufgeführt. Hervorgehoben ist die vorselektierte Option „Dünnwandiges Modell“, um nach der hier behandelten dünnwandigen Wölbkrafttorsionstheorie zu rechnen. Wird diese Option abgewählt, erfolgt die Berechnung nach der dickwandigen Theorie, die in dieser Arbeit nicht behandelt wird. Es ist auch möglich, die Wölbsteifigkeit komplett zu deaktivieren, falls der Querschnitt nur nach der St. Venantschen Torsionstheorie berechnet werden soll. Die Eingabe von allgemeinen Querschnitten ist zwar möglich, jedoch wird die Wölbkrafttorsionsberechnung dann nicht unterstützt. Tabelle 6-1 zeigt, dass die Einheitsverwölbung ω identisch mit der Handrechnung ist, sodass die Wölbfläche S_ω und der Wölbwiderstand I_ω ebenfalls übereinstimmen. Allerdings ist das Torsionsflächenmoment 2. Grades I_T in der Handrechnung etwas überschätzt, was auf die vernachlässigten Radien des Walzprofils zurückzuführen ist.

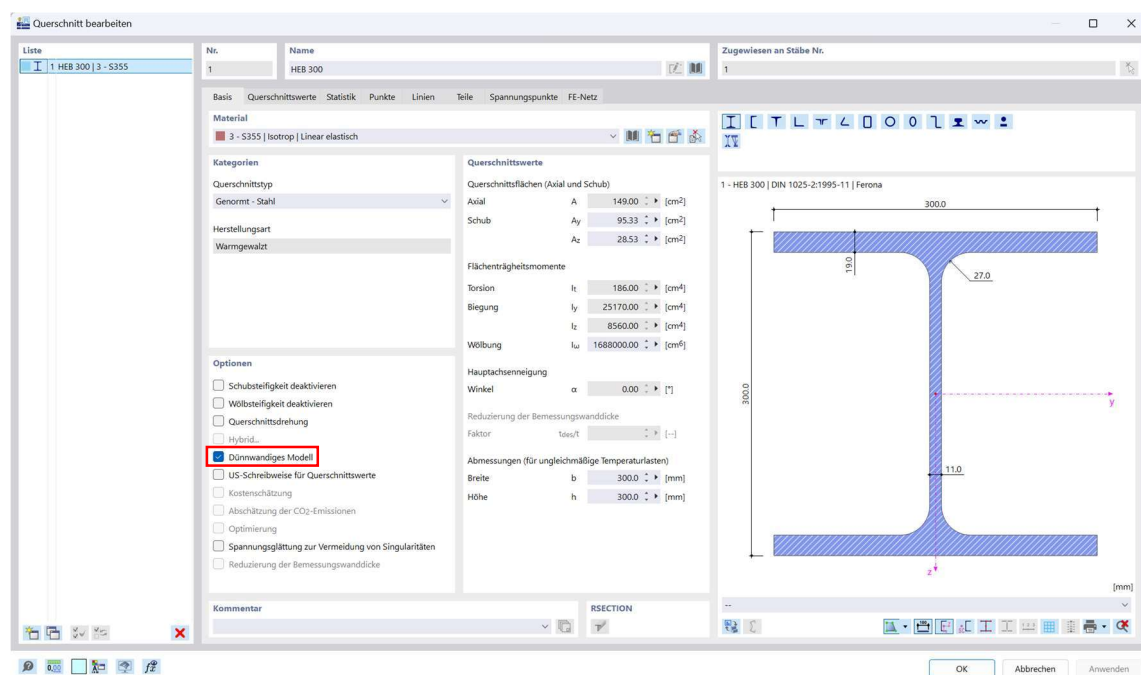
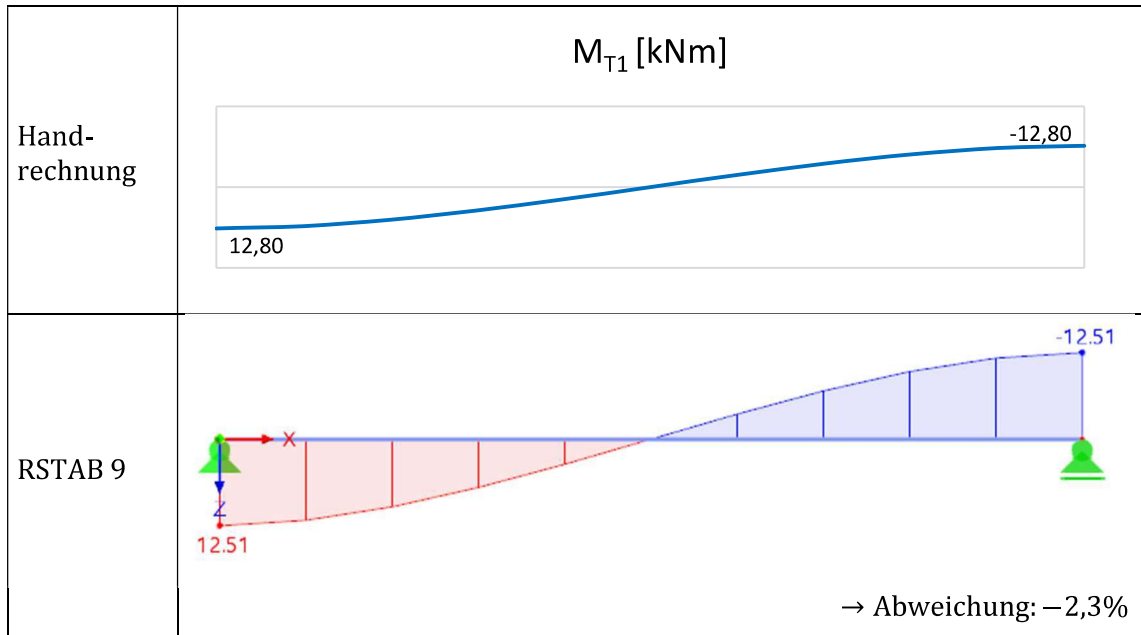
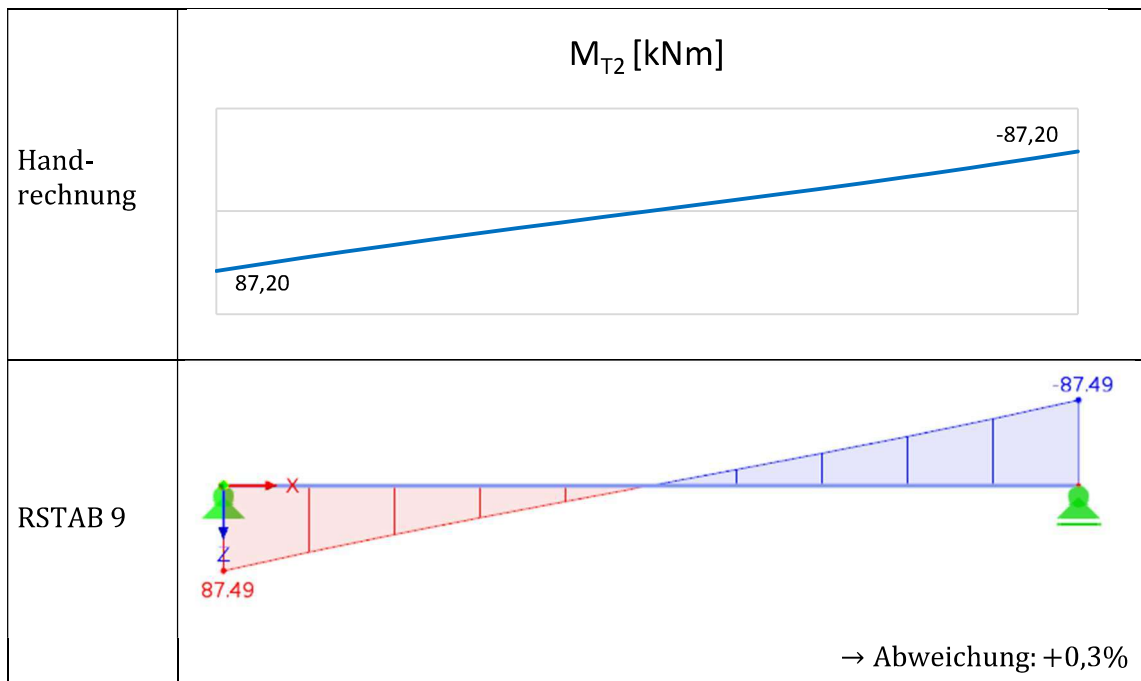


Abbildung 6-2: Querschnittseinstellung für die Wölbkrafttorsion, Beispiel 1

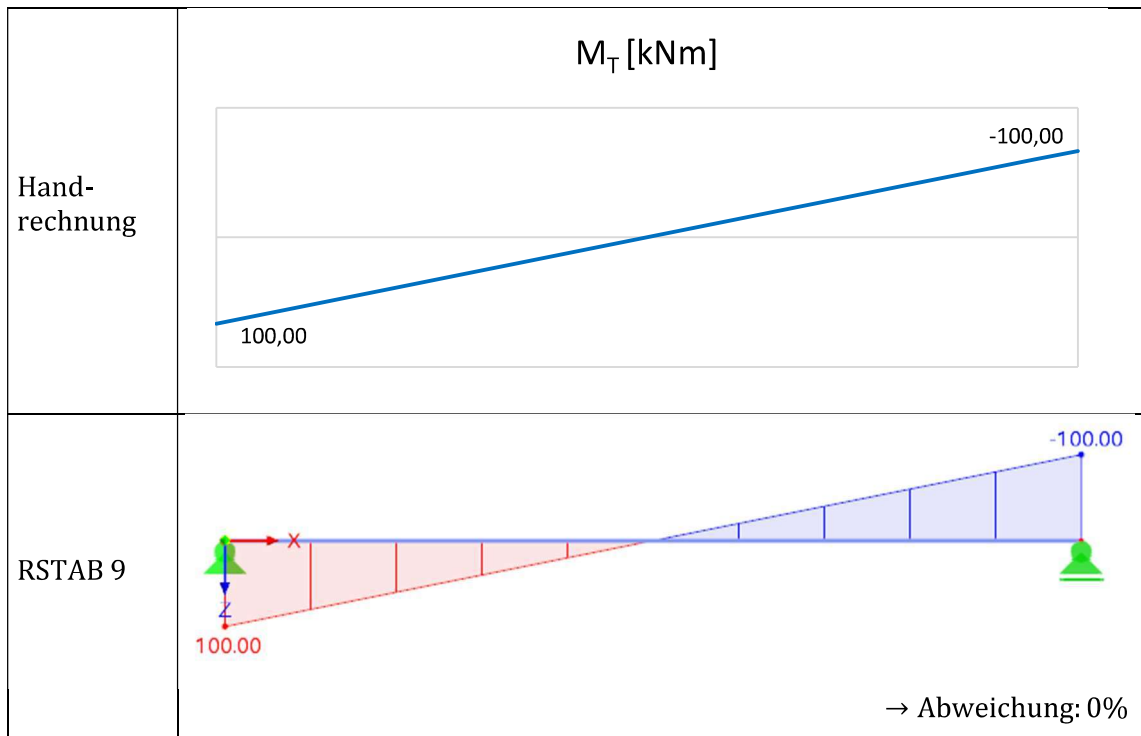
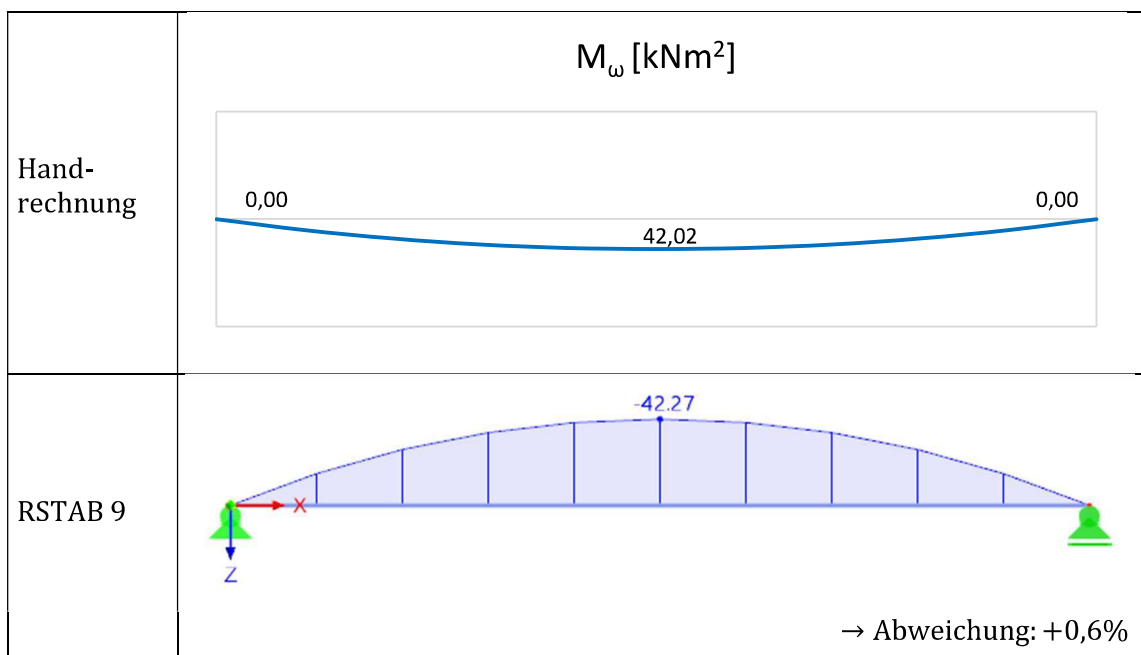
Tabelle 6-1: Vergleich der Querschnittsgrößen, Beispiel 1

	Handrechnung	RSTAB 9	Abweichung
ω [cm ²]	210,8	210,8	0%
S_ω [cm ⁴]	3004	3003	0%
I_T [cm ⁴]	199,0	186,0	−6,5%
I_ω [cm ⁶]	$1,688 \cdot 10^6$	$1,688 \cdot 10^6$	0%

Das primäre Torsionsmoment M_{T1} aus RSTAB 9 zeigt den größten Unterschied von nur +2,3%. Dies ist auf die unterschiedlichen Torsionsflächenmomente 2. Grades I_T zurückzuführen, was bei der Ermittlung der Schnittgrößen zu einer minimalen Abweichung in der Verteilung der Torsionsanteile führt.

Tabelle 6-2: Vergleich der primären Torsion M_{T1} , Beispiel 1Tabelle 6-3: Vergleich der sekundären Torsion M_{T2} , Beispiel 1

Zur Kontrolle verläuft das gesamte Torsionsmoment M_T in RSTAB 9 ebenfalls linear von $M_T = 100 \text{ kNm}$ bis $M_T = -100 \text{ kNm}$, wie auch in der Handrechnung. Das Wölbmoment M_ω weist in RSTAB 9 jedoch einen Vorzeichenwechsel auf, sodass es negativ ist. Der Betrag des Wölbmoments M_ω zeigt nur minimale Abweichungen, die auf Rundungen zurückzuführen sind.

Tabelle 6-4: Vergleich der gesamten Torsion M_T , Beispiel 1Tabelle 6-5: Vergleich des Wölbmoments M_ω , Beispiel 1

6.2.4 Spannungen

Um sich die Spannungen anzeigen zu lassen, bietet RSTAB 9 die Möglichkeit, die resultierenden Spannungen an verschiedenen Punkten des Querschnitts zu berechnen. Dies ist jedoch nur für normierte Querschnitte innerhalb der Querschnittsbibliothek möglich. An relevanten Stellen im Querschnitt werden Spannungspunkte definiert, um eine Einheitsspannung für eine Einheitslast zu berechnen. Dafür wird der gewünschte Querschnitt ausgewählt und, wie in Abbildung 6-4 gezeigt, der Reiter „Einheitsspannungen | TWA“ für die dünnwandige Theorie ausgewählt. Für die Berechnung nach der dickwandigen Theorie müsste beispielsweise der Reiter „Einheitsspannungen | FEM“ ausgewählt werden.

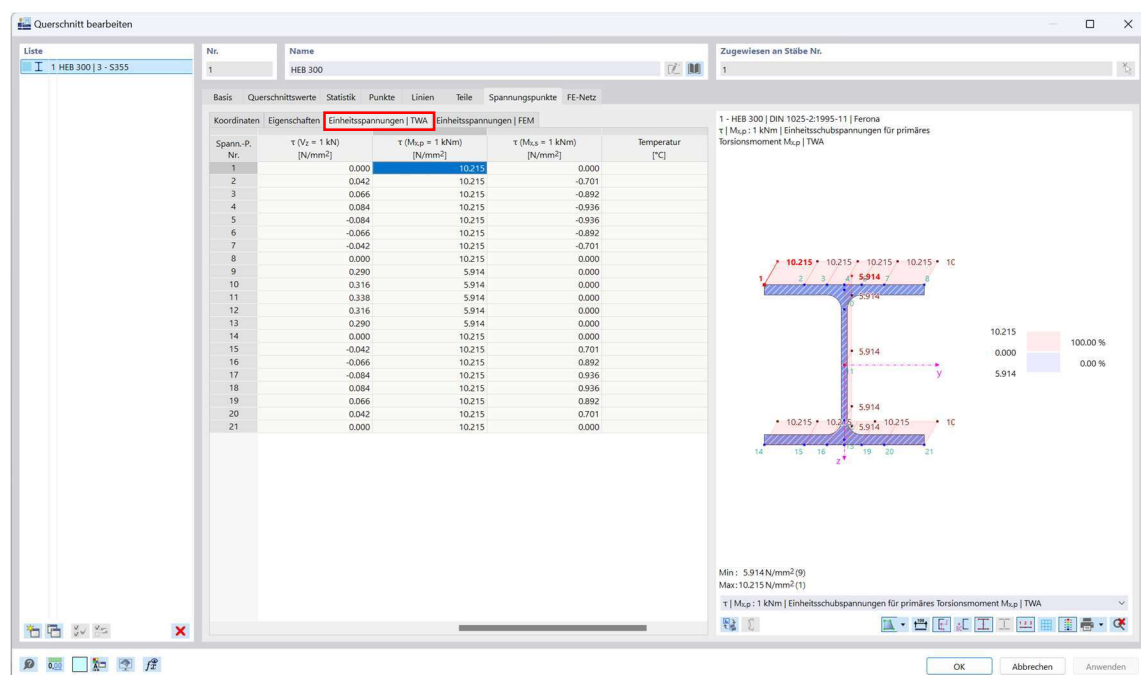
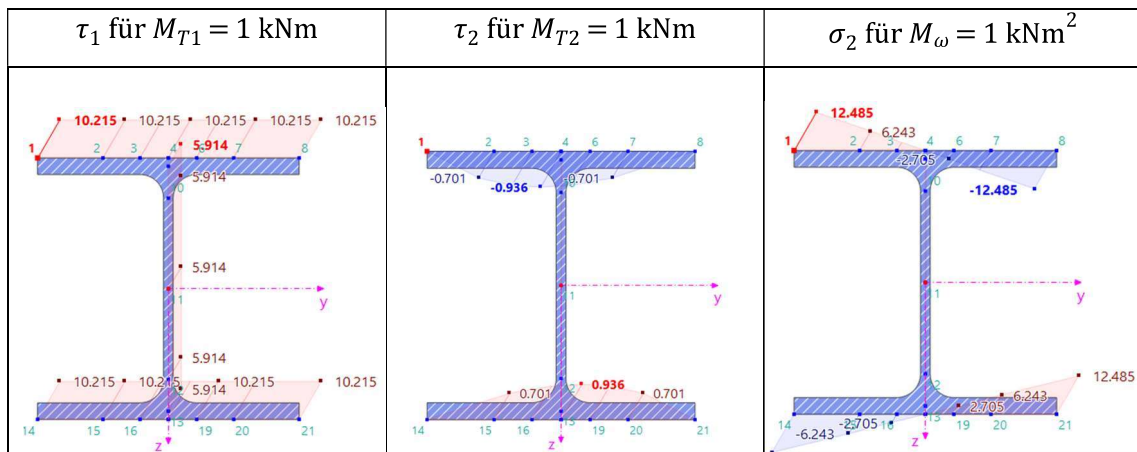


Abbildung 6-4: Auswahl der Spannungspunkte nach dünnwandiger Theorie, Beispiel 1

Die Spannungspunkte infolge der Wölbkrafttorsion sind in Tabelle 6-6 aufgeführt, wobei die Maximalwerte fett hervorgehoben sind. Mithilfe dieser Spannungspunkte können die Spannungen an jeder beliebigen Stelle des Stabes händisch anhand der zugehörigen Schnittgrößen ermittelt werden. In der Ergebnisdarstellung wird lediglich eine farbige Darstellung wiedergegeben.

Tabelle 6-6: Spannungspunkte für τ_1, τ_2, σ_2 , Beispiel 1



Die Ergebnisse der Spannungen können für jede Schnittgröße separat angezeigt werden, wie in Abbildung 6-5 dargestellt. Die Spannungen τ_1, τ_2, τ und σ_2 sind zusammen mit den Ergebnissen der Handrechnung in Tabelle 6-7 bis Tabelle 6-10 gegenübergestellt.

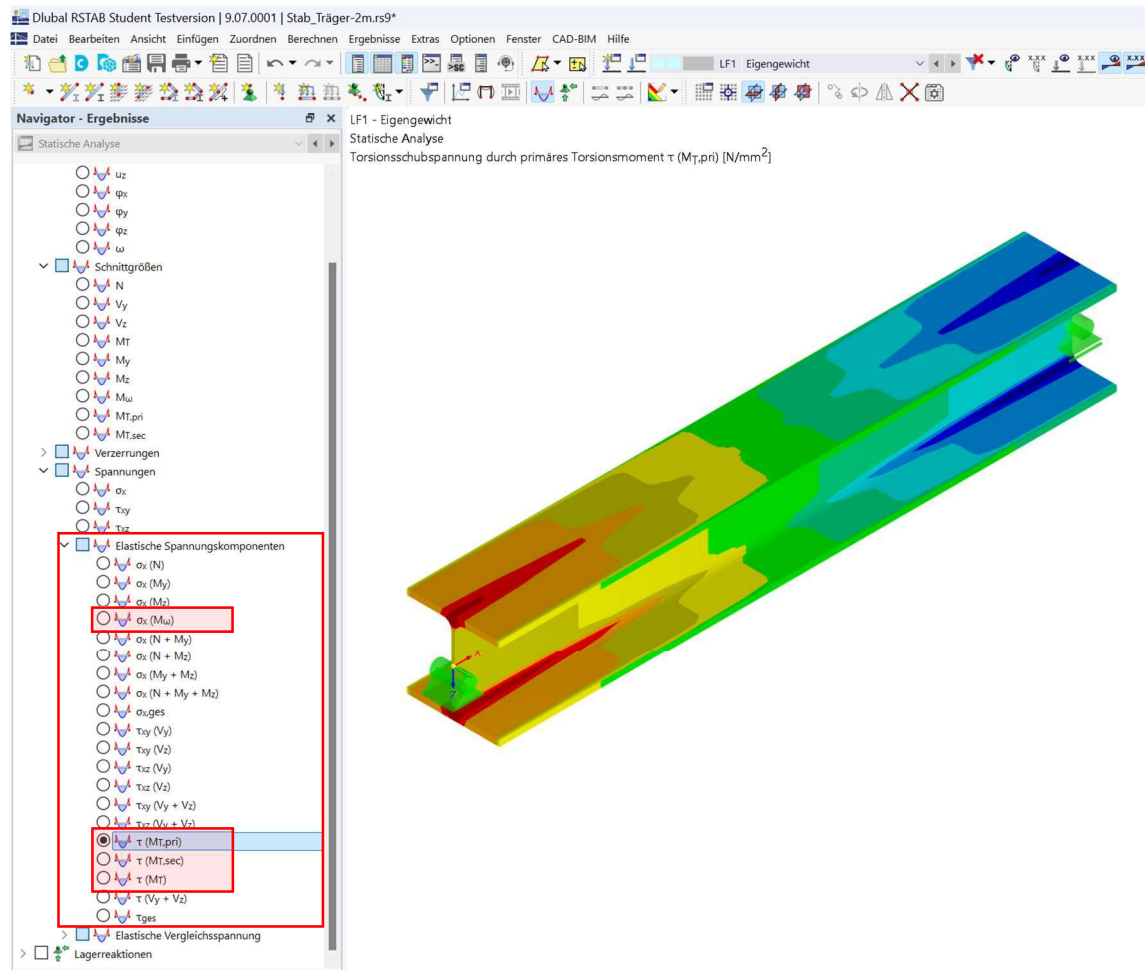


Abbildung 6-5: Ergebnisdarstellung für die Spannungen, Beispiel 1

Im Spannungsvergleich führt der Unterschied der Torsionsflächenmomente 2. Grades I_T dazu, dass RSTAB 9 für die primären Schubspannungen τ_1 stets leicht höhere Werte aufweist. Die sekundären Spannungen σ_2 und τ_2 sind hingegen nahezu identisch mit den Ergebnissen der Handrechnung.

Tabelle 6-7: Vergleich der primären Schubspannung τ_1 bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

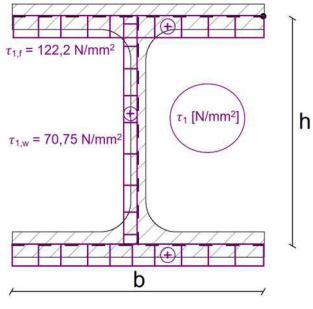
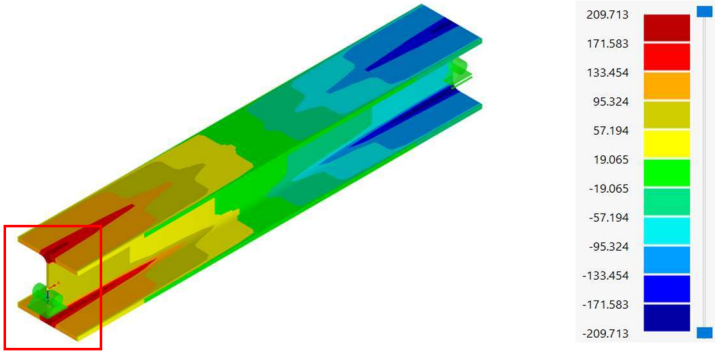
Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_{1,f} = 122,2 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_{1,f} = 10,22 \frac{N}{mm^2} \cdot 12,51 \text{ kNm}$ $= 127,9 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +4,7\%$
$\tau_{1,w} = 70,75 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_{1,w} = 5,91 \frac{N}{mm^2} \cdot 12,51 \text{ kNm}$ $= 73,93 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +4,5\%$

Tabelle 6-8: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

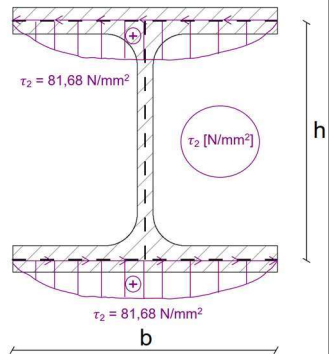
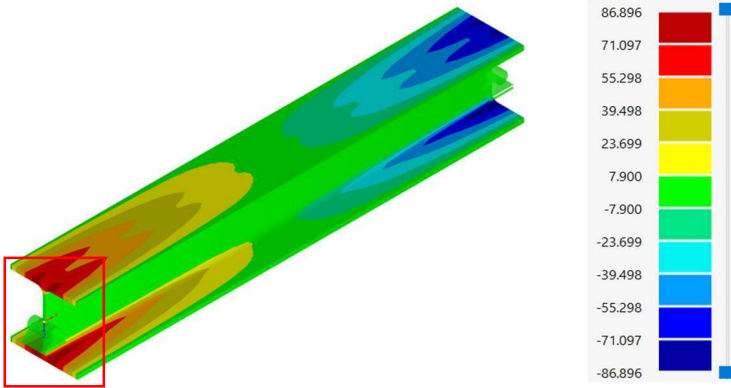
Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_2 = 81,68 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_2 = 0,936 \frac{N}{mm^2} \cdot 87,49 \text{ kNm}$ $= 81,89 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +0,3\%$

Tabelle 6-9: Vergleich der gesamten Schubspannung τ bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

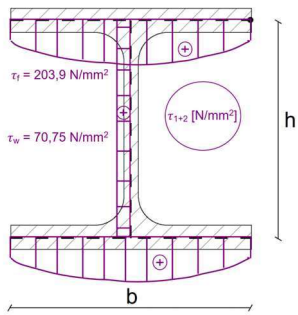
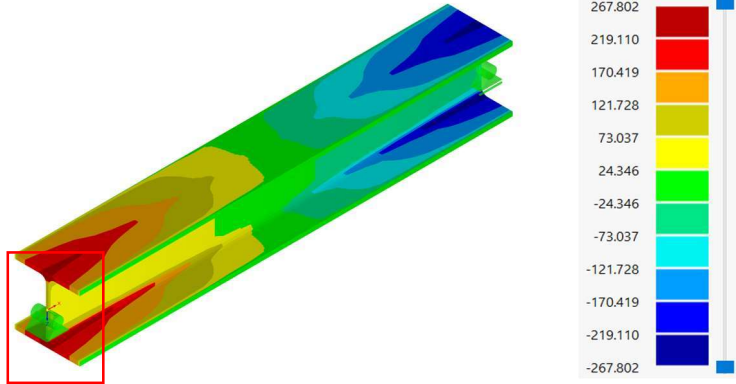
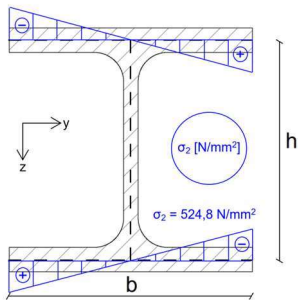
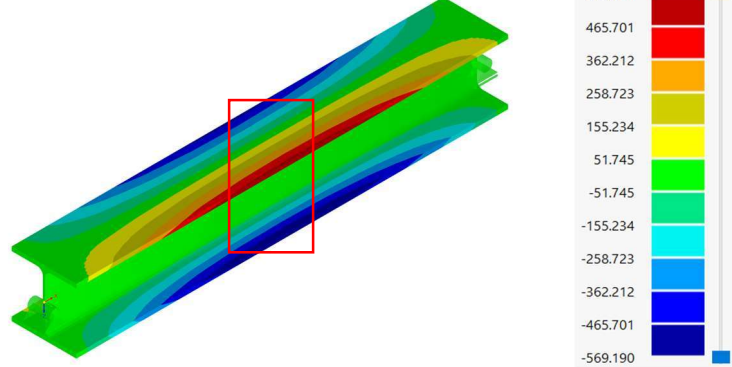
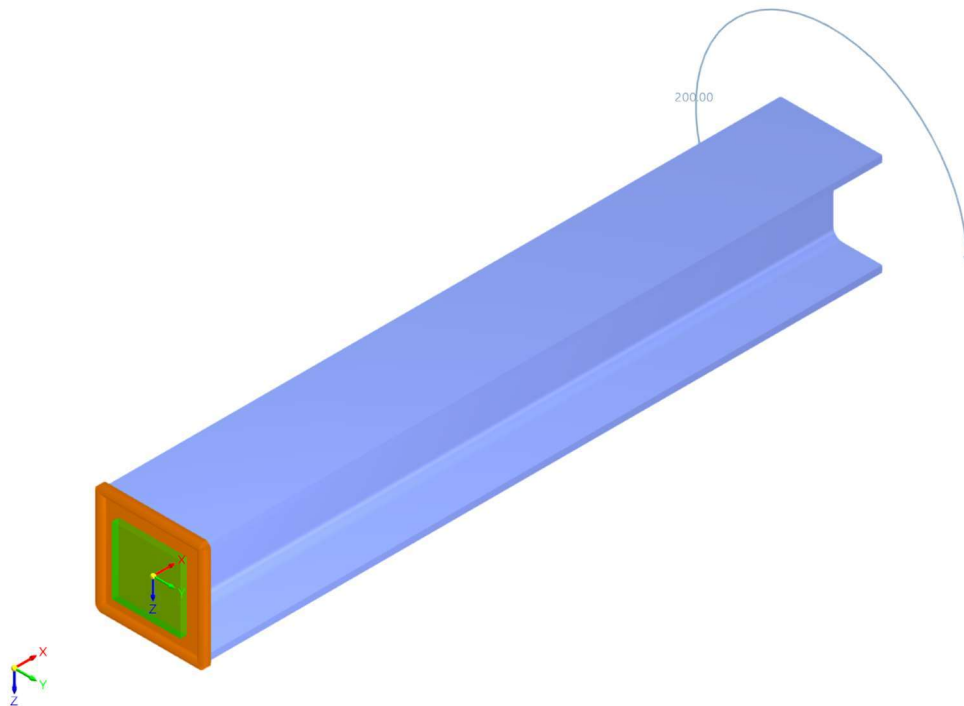
Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_f = 203,9 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_f = 127,9 + 81,89 \frac{N}{mm^2}$ $= 209,8 \frac{N}{mm^2}$ <p>→ Abweichung: +2,9%</p>
$\tau_w = 70,75 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_w = 73,93 \frac{N}{mm^2}$ <p>→ Abweichung: +4,5%</p>

Tabelle 6-10: Vergleich der sekundären Normalspannung σ_2 bei $x = 100$ cm, Beispiel 1

Handrechnung	RSTAB 9
	
$\sigma_2 = 524,8 \frac{N}{mm^2}$	$\sigma_2 = -12,49 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm^2} \cdot (-42,27 kNm^2)$ $= 528,0 \frac{N}{mm^2}$ <p>→ Abweichung: +0,6%</p>

6.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm

6.3.1 Modell



Modelleingabe:

Profil	HEB 300, S355
Länge	$l = 2 \text{ m}$
Belastung ($x = 200 \text{ cm}$)	$M_x = 100 \text{ kNm}$
Lagerung ($x = 0 \text{ cm}$)	Einspannung (grün), starre Stirnplatte (orange)
Lagerung ($x = 200 \text{ cm}$)	Bewegliche Gabellagerung in x – Richtung

Berechnungseinstellung:

Theorie	I. Ordnung
Stabteilung für Ergebnisverlauf	$n = 10$

6.3.2 Eingabe

Das Vorgehen zur Modelleingabe wurde bereits in Beispiel 1 ausführlich dargestellt. Da es sich um denselben Querschnitt handelt, bleiben die Querschnittsgrößen in RSTAB 9 identisch zu Beispiel 1. Hier zeigt sich jedoch eine Besonderheit bei der Modellierung der Wölbeinspannung. Abbildung 6-6 zeigt das Modell mit einer herkömmlichen Einspannung am Stabanfangsknoten bei $x = 0$ cm. Wie die Volumendarstellung zeigt, können sich die Flansche selbst bei einer Knoteneinspannung frei verwölben. Wie bereits im Handrechenbeispiel ausführlich erläutert, führt eine Einspannung im Querschnittsschwerpunkt nicht zwangsläufig zu einer Verwölbungsbehinderung des Querschnitts. Das Stabprogramm weiß nämlich nicht, ob der Kragarm an einer Stütze oder an einer Stirnplatte angeschlossen ist. Neben der Lagerungsbedingung in RSTAB 9 sind daher zusätzliche Randbedingungen zur Modellierung einer Wölbeinspannung erforderlich. Je nach Stabprogramm sind die Lösungen dieses Problems unterschiedlich. RSTAB 9 bietet die Möglichkeit, jeden beliebigen Stab mit Steifen zu modifizieren, sodass die Steifigkeit berücksichtigt wird. Abbildung 6-7 zeigt die Stabbearbeitung. Es wird die Option „Quersteifen“ ausgewählt, sodass die Registerkarte „Quersteifen“ erscheint.

In Abbildung 6-8 wird die Registerkarte „Quersteifen“ geöffnet. Es lassen sich nun verschiedene Steifentypen auswählen. Für dieses Beispiel wäre es denkbar, eine Stirnplatte am Stabanfang anzubringen. Dies würde jedoch eine Wölbfeder darstellen, deren Wölbfedersteifigkeit C_ω von der Dimensionierung der Stirnplatte abhängt. Daher wird hier eine starre Wölbeinspannung ausgewählt.

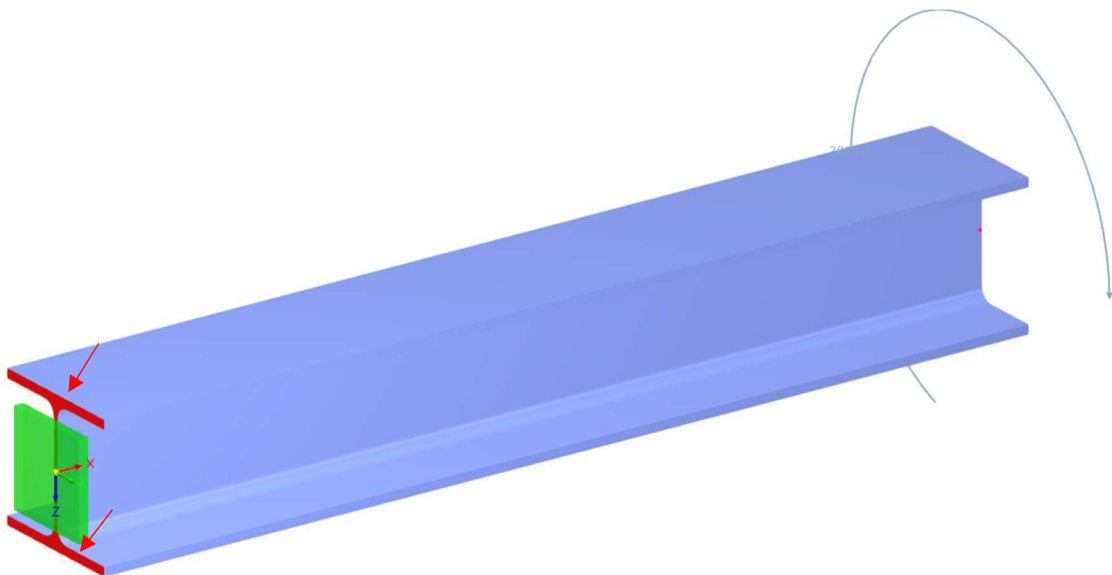


Abbildung 6-6: Volumendarstellung ohne Wölbeinspannung, Beispiel 2

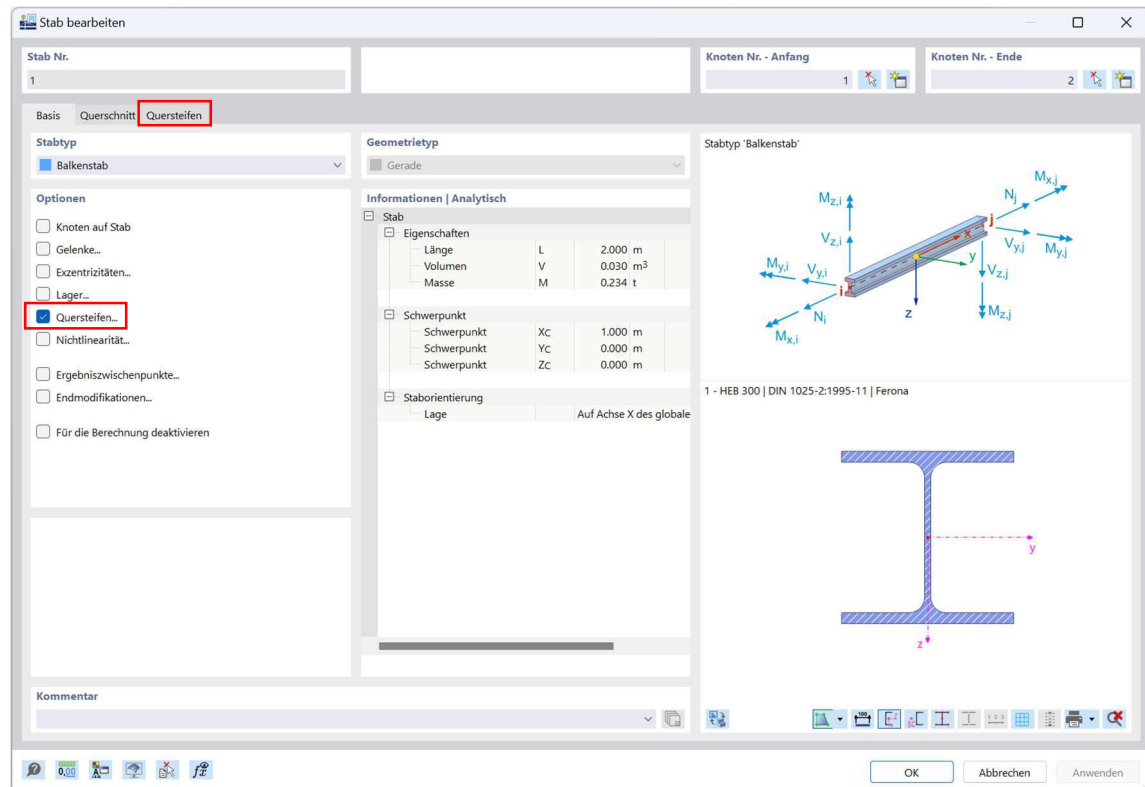


Abbildung 6-7: Stabbearbeitung zur Eingabe von Quersteifen, Beispiel 2

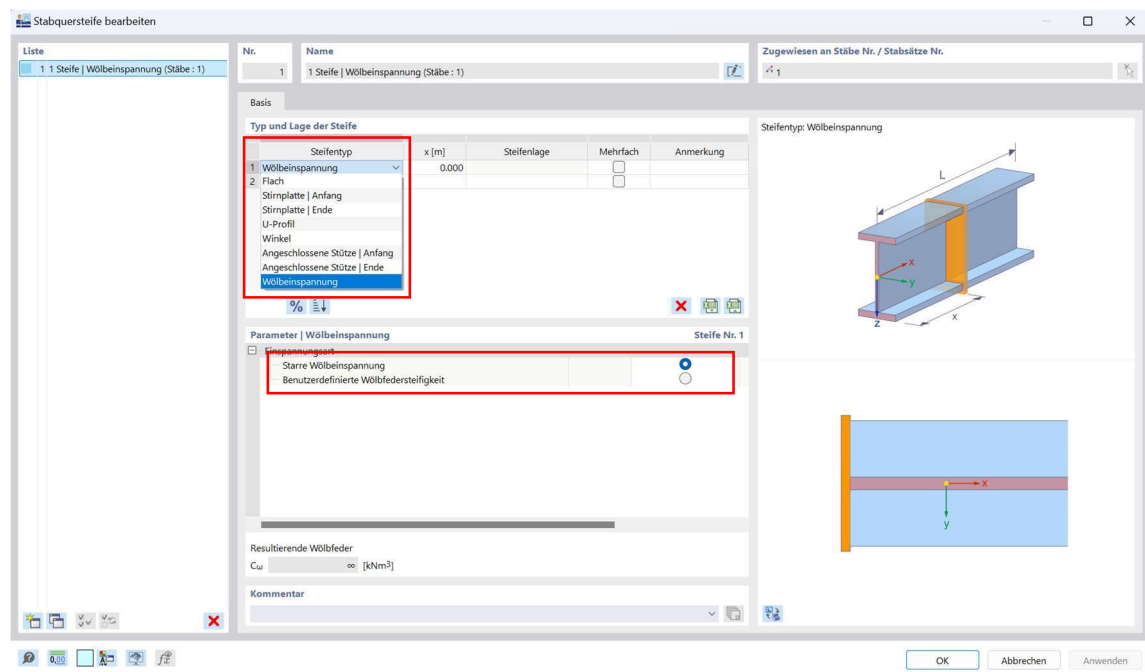
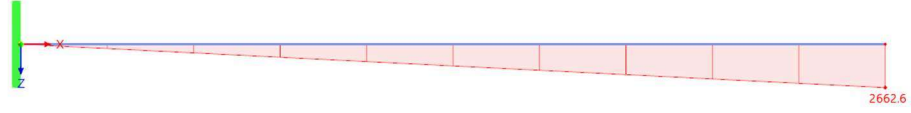
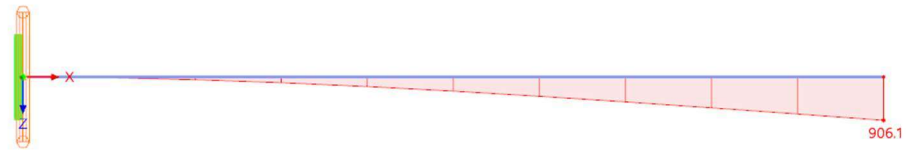


Abbildung 6-8: Eingabe der starren Wölbeinspannung, Beispiel 2

Abbildung 6-9 zeigt das Modell in der Volumendarstellung mit der eingegebenen starren Wölbeinspannung. Die Auswirkung auf den Verdrehungsverlauf wird in Tabelle 6-11 dargestellt. Durch die Einführung der starren Wölbeinspannung ergibt sich ein nichtlinearer Verlauf des Verdrehungswinkels ϑ , wodurch ein nicht konstanter Verdrillungsverlauf ϑ' gewährleistet ist. Bei genauer Betrachtung erkennt man ebenfalls, dass die 1. Ableitung der Verdrehung ϑ an der Einspannung gleich der Verdrillung $\vartheta' = 0$ sein muss.

Tabelle 6-11: Vergleich der Stabverdrehung ϑ_x für unterschiedliche Wölbeinspannungen, Beispiel 2

Wölbeinspannung	Stabverdrehung ϑ_x [mrad]
Ohne	
Starr	

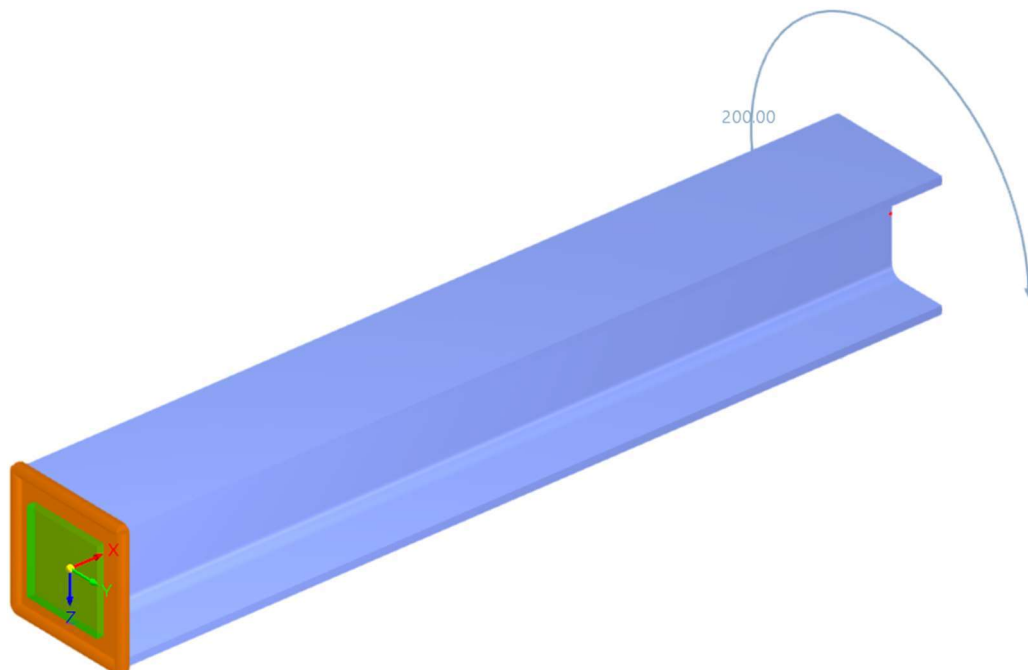


Abbildung 6-9: Volumendarstellung mit starrer Wölbeinspannung, Beispiel 2

6.3.3 Schnittgrößenverläufe

Nach Fertigstellung des Modells können die Schnittgrößenverläufe M_{T1} , M_{T2} , M_T und M_ω in Tabelle 6-12 bis Tabelle 6-15 dargestellt werden, wobei diese mit den Ergebnissen der Handrechnung verglichen werden. Für das primäre Torsionsmoment M_{T1} im Einspannbereich berechnet RSTAB 9 eine sehr kleine Torsionsschnittgröße von $M_{T1} = 1,10 \text{ kNm}$, was nicht erwartet wurde in der Handrechnung. Dies führt zu einer Abweichung von etwa 3% – 4% bei den primären und sekundären Torsionsgrößen an der Kragarmspitze bei $x = 200 \text{ cm}$.

Tabelle 6-12: Vergleich der primären Torsion M_{T1} , Beispiel 2

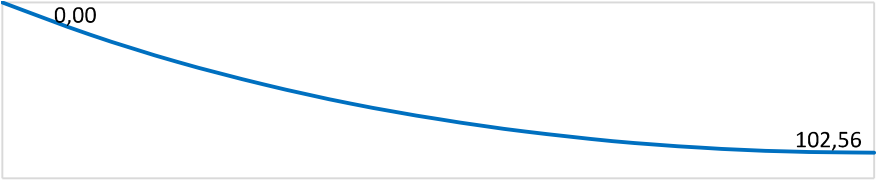
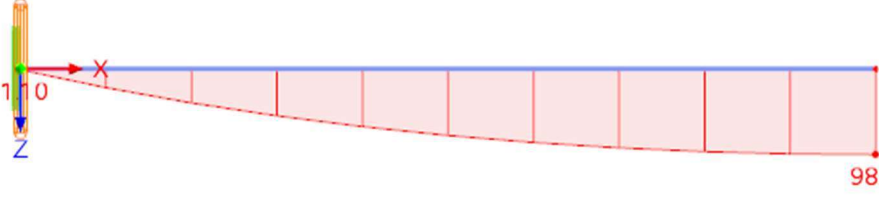

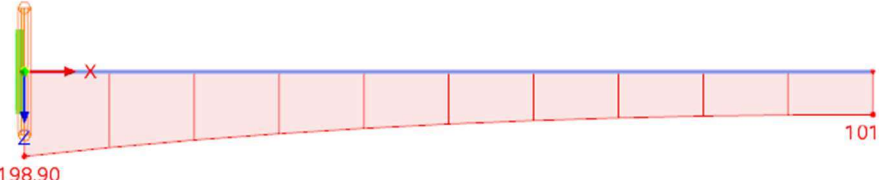
Hand-rechnung	<p style="text-align: center;">$M_{T1} [\text{kNm}]$</p> 
RSTAB 9	 <p style="text-align: right;">→ Abweichung: –3,6%</p>

Tabelle 6-13: Vergleich der sekundären Torsion M_{T2} , Beispiel 2

Hand-rechnung	<p style="text-align: center;">$M_{T2} [\text{kNm}]$</p> 
RSTAB 9	 <p style="text-align: right;">→ Abweichung ($x = 0 \text{ m}$): –0,6% → Abweichung ($x = 2 \text{ m}$): +3,8%</p>

Zur Kontrolle verläuft das Gesamttorsionsschnittmoment M_T in RSTAB 9 ebenfalls konstant mit $M_{T1} = 200 \text{ kNm}$, genau wie in der Handrechnung. Allerdings zeigt das Wölbmoment M_ω in RSTAB 9, wie bereits im Beispiel 1, ebenfalls einen Vorzeichenwechsel auf.

Tabelle 6-14: Vergleich der gesamten Torsion M_T , Beispiel 2



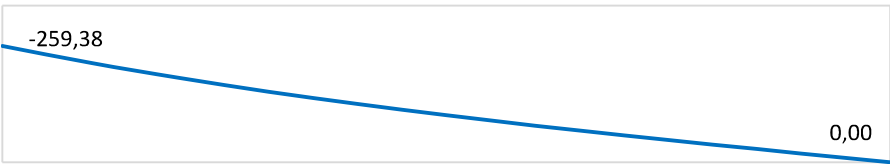
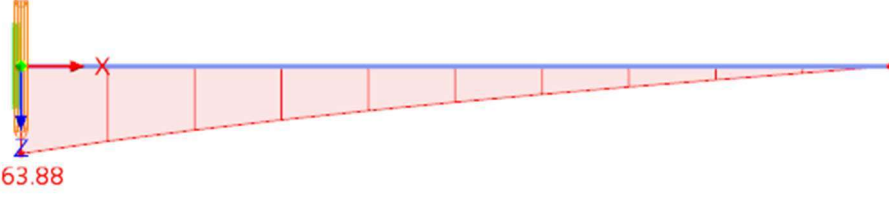
	$M_T \text{ [kNm]}$
Hand-rechnung	
RSTAB 9	 <p>→ Abweichung: 0%</p>

Tabelle 6-15: Vergleich des Wölbmoments M_ω , Beispiel 2

	$M_\omega \text{ [kNm}^2\text{]}$
Hand-rechnung	
RSTAB 9	 <p>→ Abweichung: +1,7%</p>

6.3.4 Spannungen

Tabelle 6-16 bis Tabelle 6-20 zeigt den Spannungsvergleich. Die Spannungspunkte sind identisch mit Beispiel 1, da das Profil dasselbe ist. Zunächst wird die Kragarmspitze bei $x = 200 \text{ cm}$ betrachtet.

Tabelle 6-16: Vergleich der primären Schubspannung τ_1 bei $x = 200 \text{ cm}$, Beispiel 2

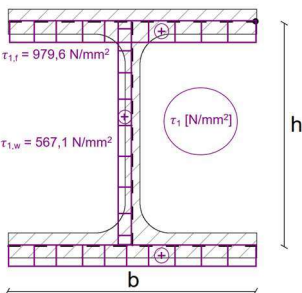
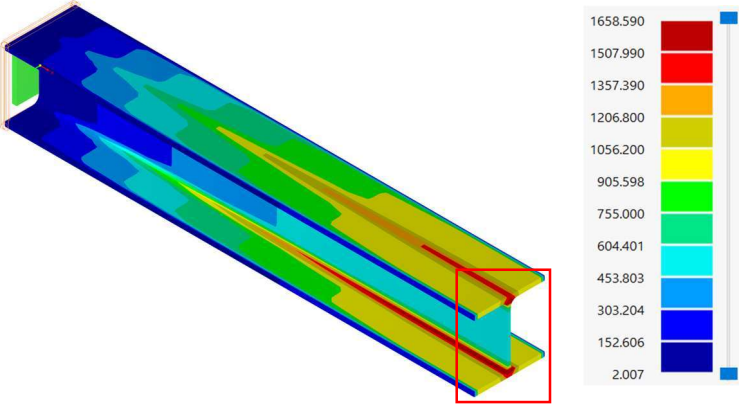
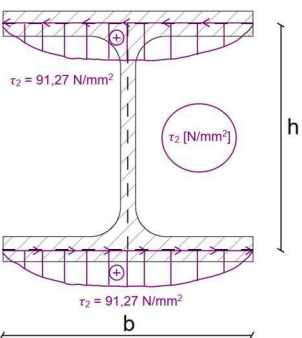
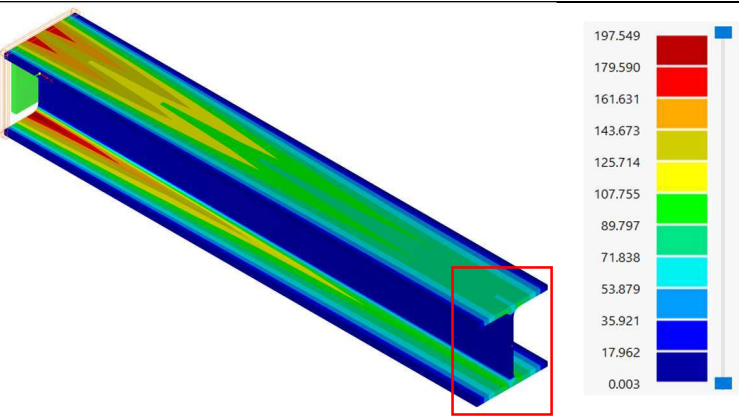
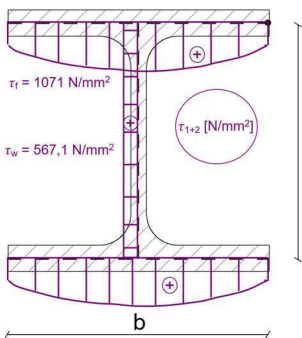
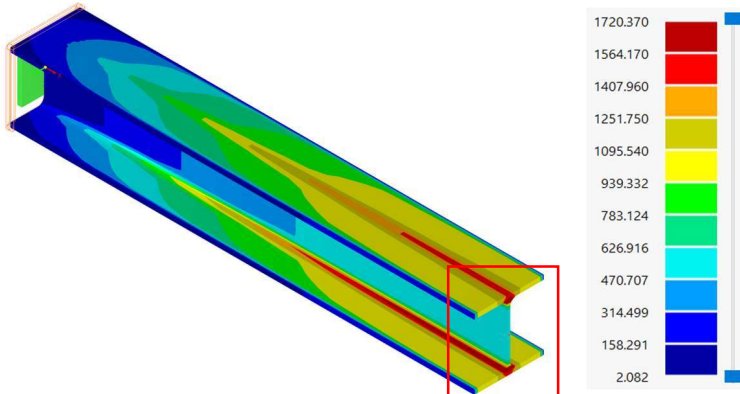
Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_{1,f} = 979,6 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_{1,f} = 10,22 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm} \cdot 98,95 \text{ kNm}$ $= 1011 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +3,2\%$
$\tau_{1,w} = 567,1 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_{1,w} = 5,91 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm} \cdot 98,95 \text{ kNm}$ $= 584,8 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +3,1\%$

Tabelle 6-17: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 200 \text{ cm}$, Beispiel 2

Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_2 = 91,27 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_2 = 0,936 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm} \cdot 101,1 \text{ kNm}$ $= 94,63 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +3,7\%$

An der Kragarmspitze treten aufgrund ungehinderter Verwölbung nur Schubspannungen auf. Diese weichen ebenfalls um etwa 3% von der Handrechnung ab, was auf die ähnliche Abweichung der Torsionsschnittgrößen zurückzuführen ist.

Tabelle 6-18: Vergleich der gesamten Schubspannung τ bei $x = 200$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_f = 1071 \frac{N}{mm^2}$ $\tau_w = 567,1 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_f = 1011 + 94,63 \frac{N}{mm^2}$ $= 1106 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +3,3\%$ $\tau_w = 584,8 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +3,1\%$

Abschließend wird der Spannungsvergleich im Einspannbereich bei $x = 0$ cm aufgeführt. Da im Einspannbereich keine primäre Torsion M_{T1} auftritt, werden hier nur die sekundären Spannungen σ_2 und τ_2 verglichen. Wie bereits bei den Schnittgrößen weisen auch die Spannungen hier kaum Abweichungen auf.

Tabelle 6-19: Vergleich der sekundären Schubspannung τ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

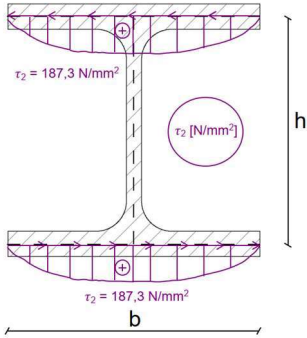
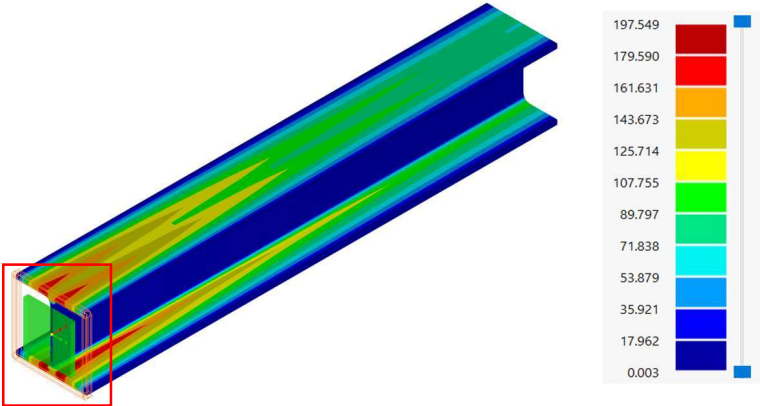
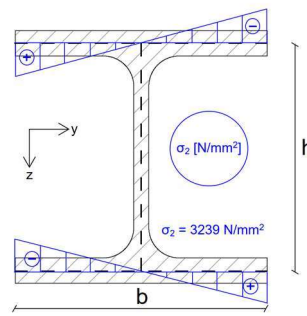
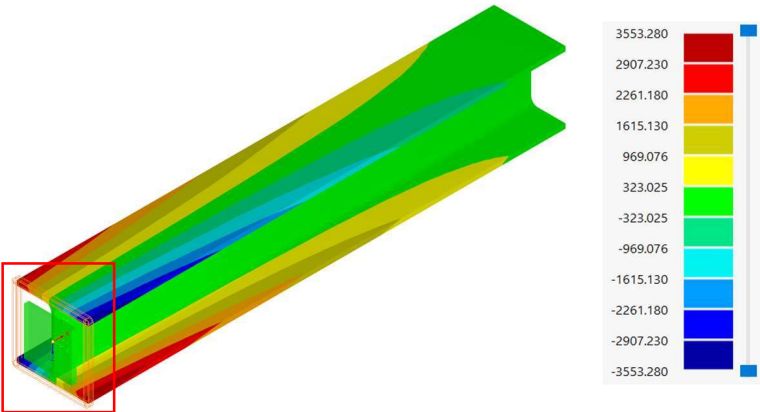
Handrechnung	RSTAB 9
	
$\tau_2 = 187,3 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_2 = 0,936 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm} \cdot 198,9 kNm$ $= 186,2 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } -0,6\%$

Tabelle 6-20: Vergleich der sekundären Normalspannung σ_2 bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RSTAB 9
	
$\sigma_2 = -3239 \frac{N}{mm^2}$	$\sigma_2 = -12,49 \frac{N}{mm^2 \cdot kNm^2} \cdot 263,9 kNm^2$ $= -3296 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +1,8\%$

7 Vergleichsrechnung mit der Finite-Elemente-Methode

7.1 Zielsetzung

In diesem Kapitel werden die beiden Handrechenbeispiele mithilfe der FEM in RFEM 6 nachgebildet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Dabei werden Volumenelemente verwendet.

Bei der Berechnung mit Volumenelementen in RFEM 6 werden die Verschiebungsfreiheitsgrade u, v, w an jedem Elementknoten berechnet. Diese Methode ermöglicht die Nachbildung beliebiger Formen. Im Unterschied zur Stabberechnung werden jedoch keine Verdrehungsfreiheitsgrade berechnet, wodurch Momente nur durch Kräftepaare realisiert werden können. Im Gegensatz zur Stabberechnung kann die Verwölbung jedoch ohne zusätzliches Add-On berücksichtigt und räumlich dargestellt werden.

Für die Verwendung von RFEM 6 muss zunächst der Berechnungsvorgang mit Volumenelementen kurz erläutert werden. RFEM 6 berechnet die Knotenergebnisse von Volumenelementen auf eine etwas andere Weise als üblich. Im Hintergrund werden zunächst Zwischenknoten für jedes Volumenelement generiert. Anschließend werden durch die Eliminierung dieser Zwischenknoten zusätzliche Verdrehungsfreiheitsgrade $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ abgeleitet, siehe Abbildung 7-1. Eine detaillierte Erläuterung zur Berechnung der verwendeten Elemente findet sich nicht im Onlinehandbuch von Dlubal. Stattdessen wird auf die bezogene Primärliteratur verwiesen, die als Grundlage dient. Trotz Anfrage konnte kein Zugriff auf diese Literatur gewährt werden. Grundsätzlich wäre es also möglich, eine Einspannung an einem Knoten im Netz einzugeben, indem die Verdrehungsfreiheitsgrade festgehalten werden. Dadurch können auch Einzel- oder Streckenmomente aufgebracht werden. Es wird jedoch strengstens davon abgeraten, mit den Verdrehungsfreiheitsgraden zu experimentieren, da die Zuverlässigkeit der Ergebnisse nicht gewährleistet werden kann. Auf die herkömmliche Berechnung hat dies keinen Einfluss.

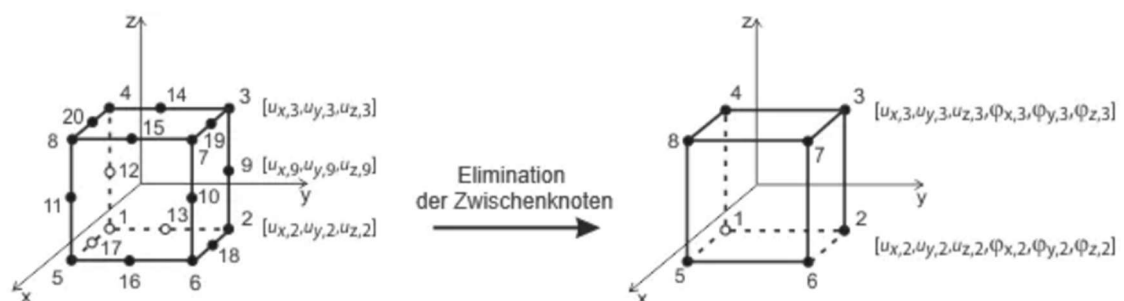
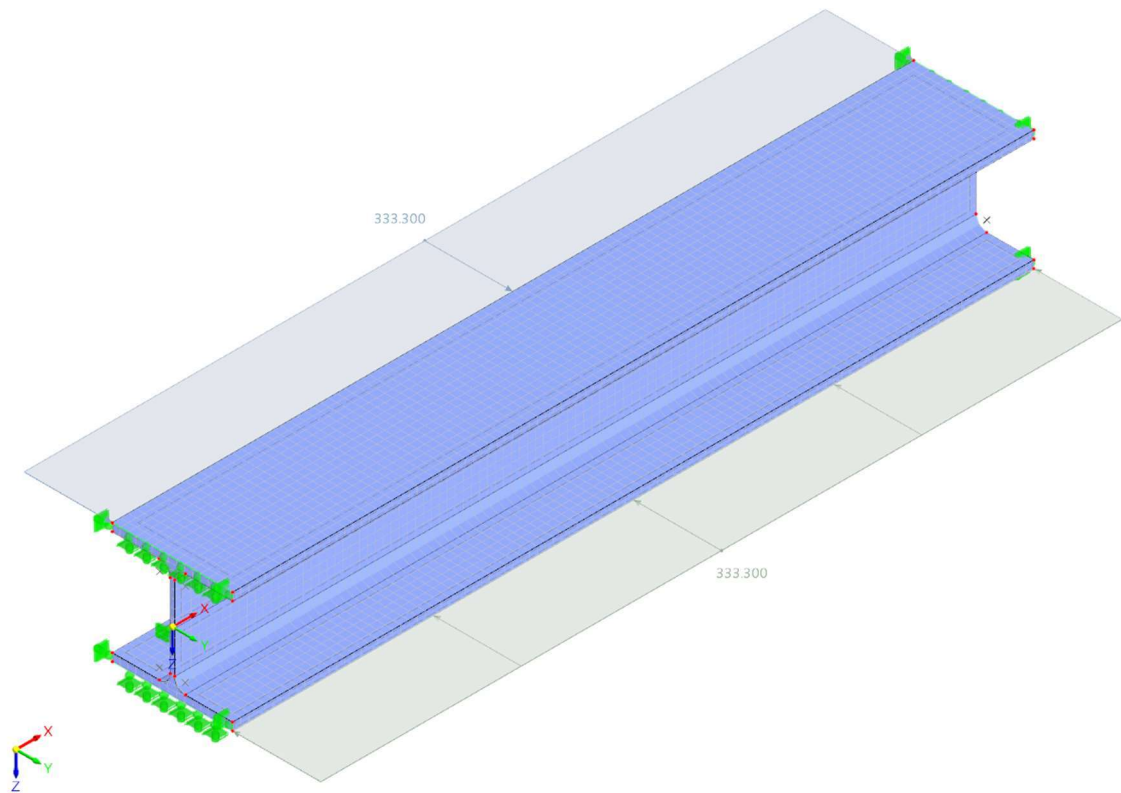


Abbildung 7-1: Berechnung der Volumenelemente in RFEM 6, Beispiel 2 [Quelle: Onlinehandbuch RFEM 6]

7.2 Beispiel 1: Gabelgelagerter Einfeldträger

7.2.1 Modell



Modelleingabe:

Profil	HEB 300, S355
Länge	$l = 2 \text{ m}$
Belastung	$q_{y,1} = +333,3 \text{ kN/m}$ (am oberen linken Flansch) $q_{y,2} = -333,3 \text{ kN/m}$ (am unteren rechten Flansch) $\rightarrow m_x = (333,3 \text{ kN/m} \cdot 0,15 \text{ m}) \cdot 2 \approx 100 \text{ kNm/m}$
Lagerung ($x = 0 \text{ cm}$)	Bewegliche Gabellagerung in x – Richtung → siehe Eingabe
Lagerung ($x = 200 \text{ cm}$)	Bewegliche Gabellagerung in x – Richtung → siehe Eingabe

Berechnungseinstellung:

Theorie	I. Ordnung
Netzweite	$L = 0,02 \text{ m}$ (Volumenelemente)

7.2.2 Eingabe

Der Volumenkörper wird durch Extrusion der Querschnittsfläche erstellt. Zur Vereinfachung werden die Umrisse des HEB 300 Profils aus einer .dxf Datei importiert, die zuvor aus dem Internet heruntergeladen wurde. Nach Überprüfung der Abmessungen und Platzierung im Ursprung des globalen Koordinatensystems wird die Modellfläche durch Auswahl der Profilbegrenzung eingegeben, siehe Abbildung 7-2. Für die spätere räumliche Lagerung entlang der Trägerlängsrichtung ist es ratsam, zuvor einen Rand im Profilschwerpunkt zu definieren, dessen genaue Bedeutung später erläutert wird. Insgesamt werden also zwei Flächen eingegeben: eine für die obere Profilhälfte und eine für die untere Profilhälfte.

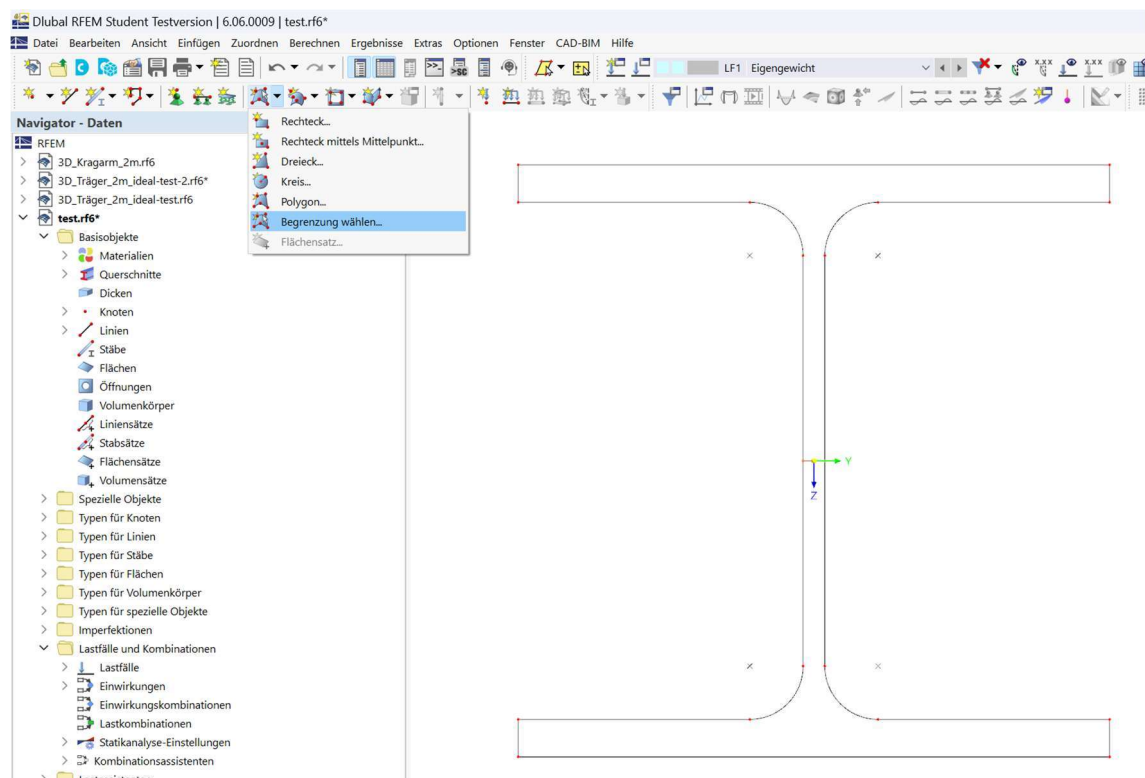


Abbildung 7-2: Flächeneingabe durch Auswahl der Profilabgrenzungen, Beispiel 1

Sobald die Fläche eingegeben ist, öffnet sich die Flächeneinstellung zur Definition der Fläche, wie in Abbildung 7-3 dargestellt. Dort ist es möglich, eine Dicke zuzuweisen und den Steifigkeitstypen auszuwählen. Da hier ein Volumenkörper durch Extrusion erstellt werden soll, muss der Steifigkeitstyp "ohne Dicke" gewählt werden. Anschließend werden beide Flächen durch Extrusion zu einem Volumenkörper vereinigt, siehe Abbildung 7-4.

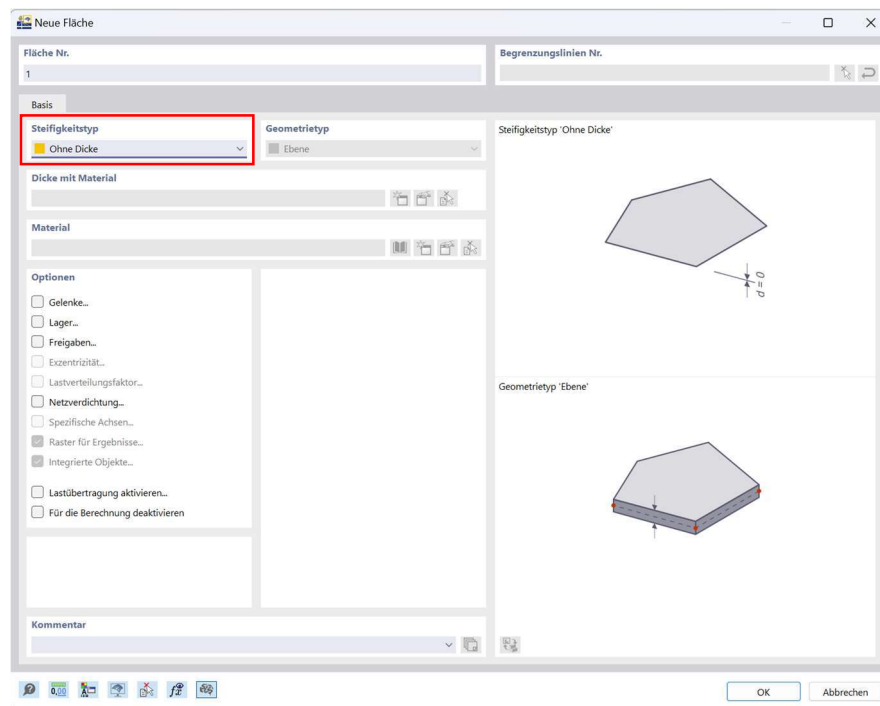


Abbildung 7-3: Flächeneinstellung, Beispiel 1

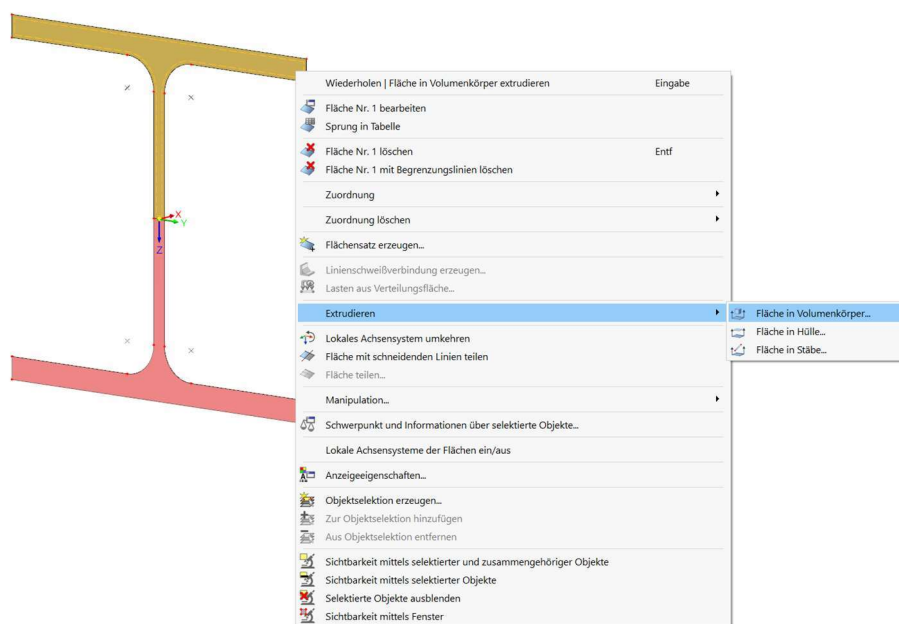


Abbildung 7-4: Extrusion der Flächen zu einem Volumenkörper, Beispiel 1

Abbildung 7-4 zeigt die nacheinander extrudierten Trägerhälften, die sich zu einem vollständigen HEB 300 Profil zusammensetzen.

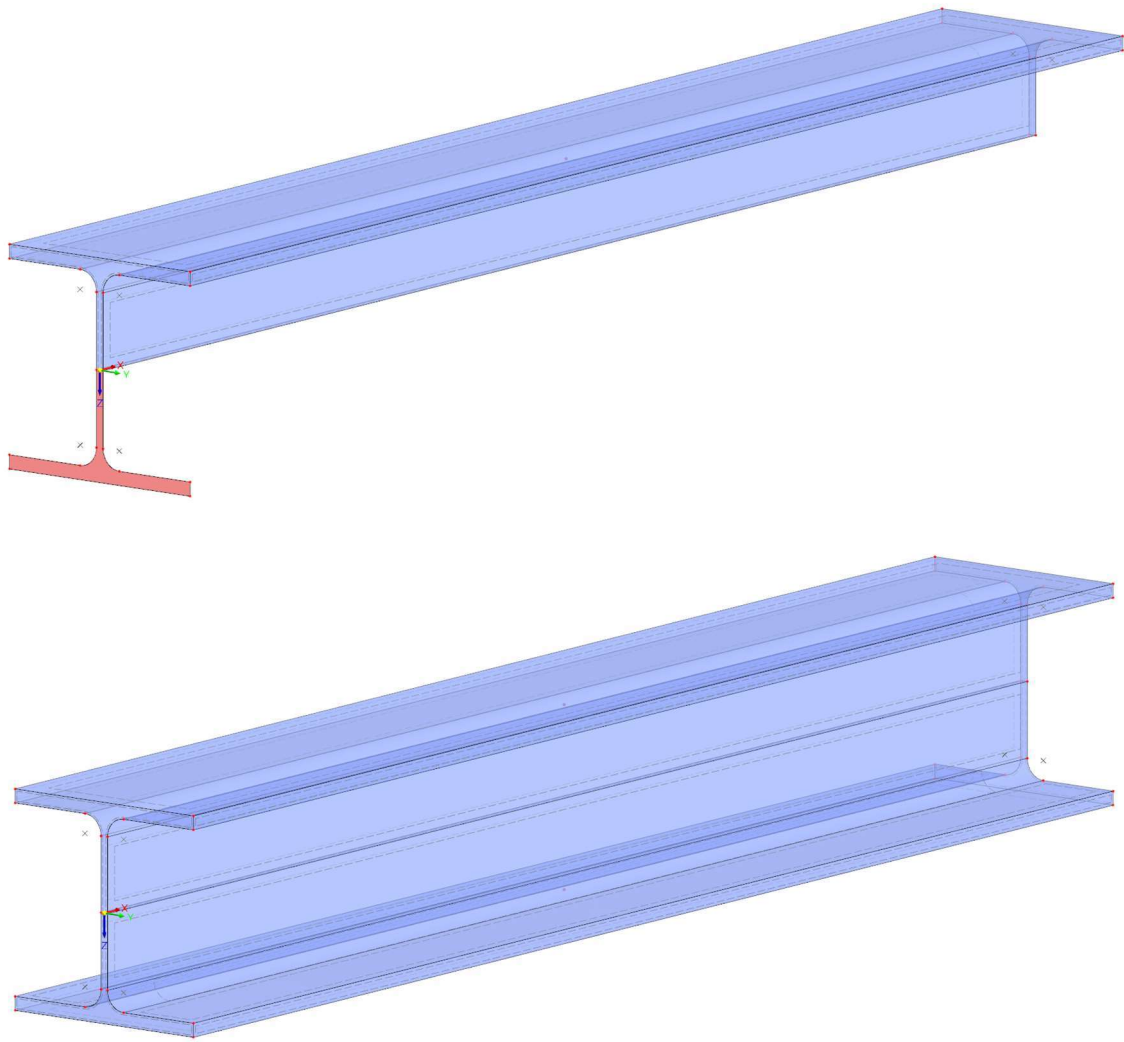


Abbildung 7-5: Extrudierte Trägerhälften zu einem gesamten Volumenkörper, Beispiel 1

Um die Gabellagerung umzusetzen, werden zunächst Rollenlinienlager an der Ober- und Unterkante der Flansche platziert. Abbildung 7-6 zeigt die Vorgehensweise mit den entsprechenden Lagerungsbedingungen.

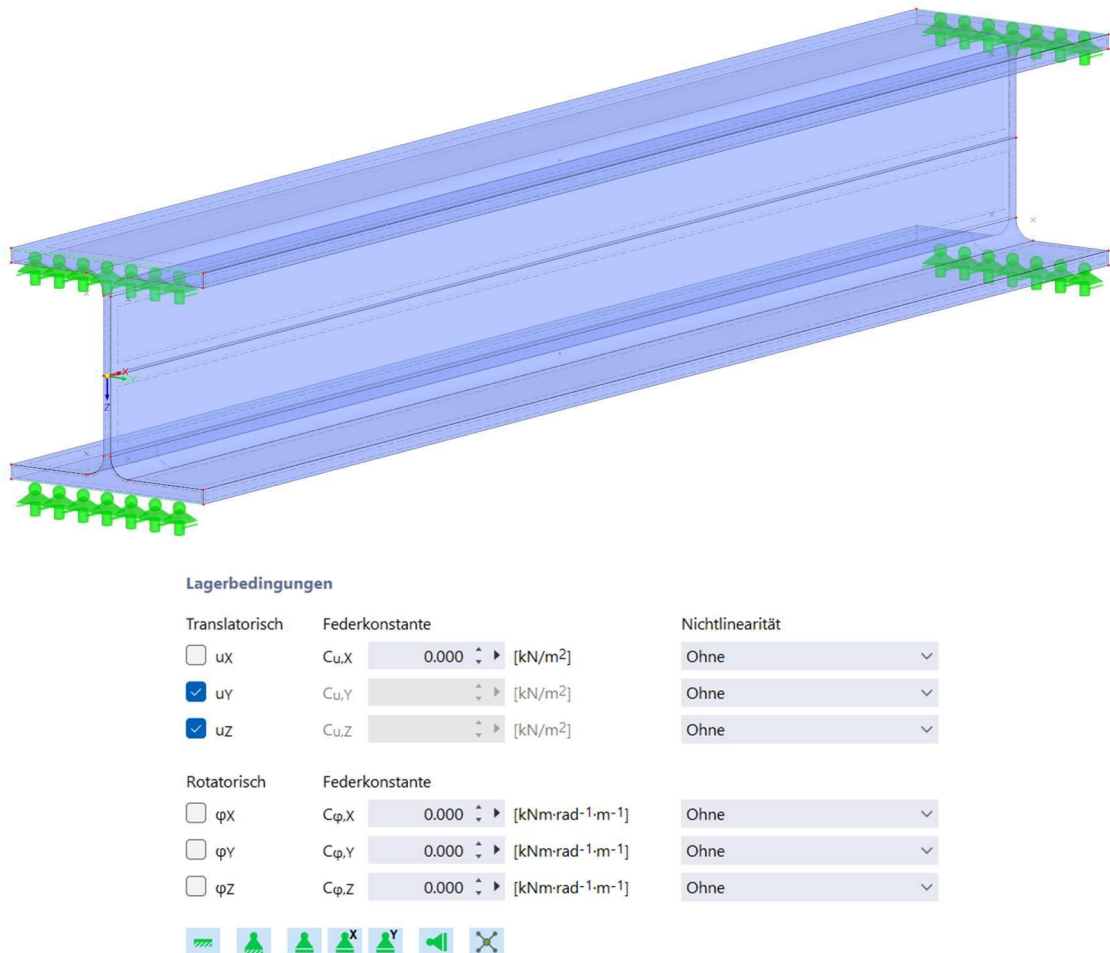


Abbildung 7-6: Eingabe der Rollenlager, Beispiel 1

Die "Gabeln" in dieser Gabellagerung werden durch horizontale Linienlager an den seitlichen Flanschrändern abgebildet, wie in Abbildung 7-7 dargestellt.

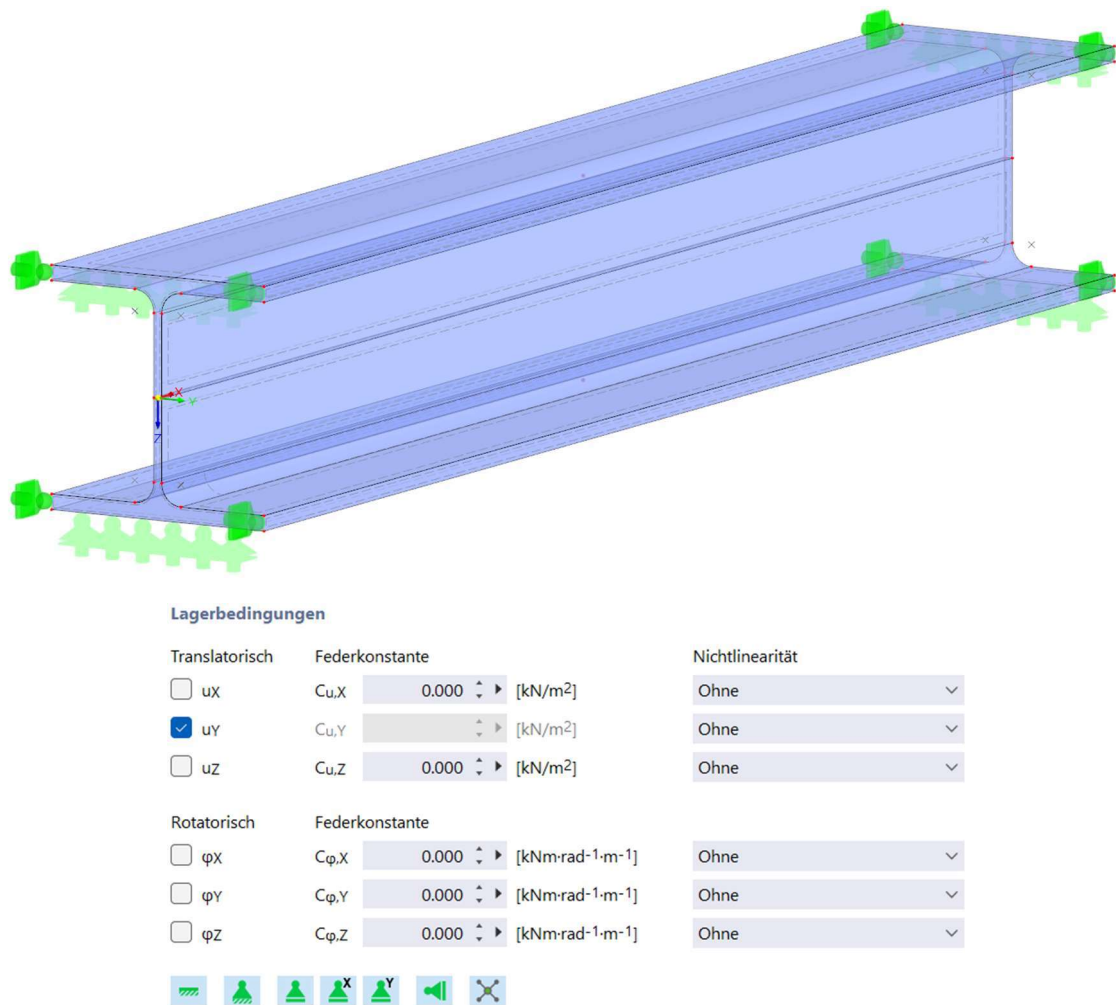


Abbildung 7-7: Eingabe der „Gabeln“, Beispiel 1

Damit sich der Träger an beiden Trägerenden frei verwölben kann, dürfen beide Flansche nicht in Trägerlängsrichtung festgehalten werden. Um dennoch ein Gleichgewicht sicherzustellen, wird an einem Ende des Trägers ein horizontales Punktlager in Trägerlängsrichtung im Schwerpunkt platziert, am Rand, der zuvor bei der Flächeneingabe definiert wurde.

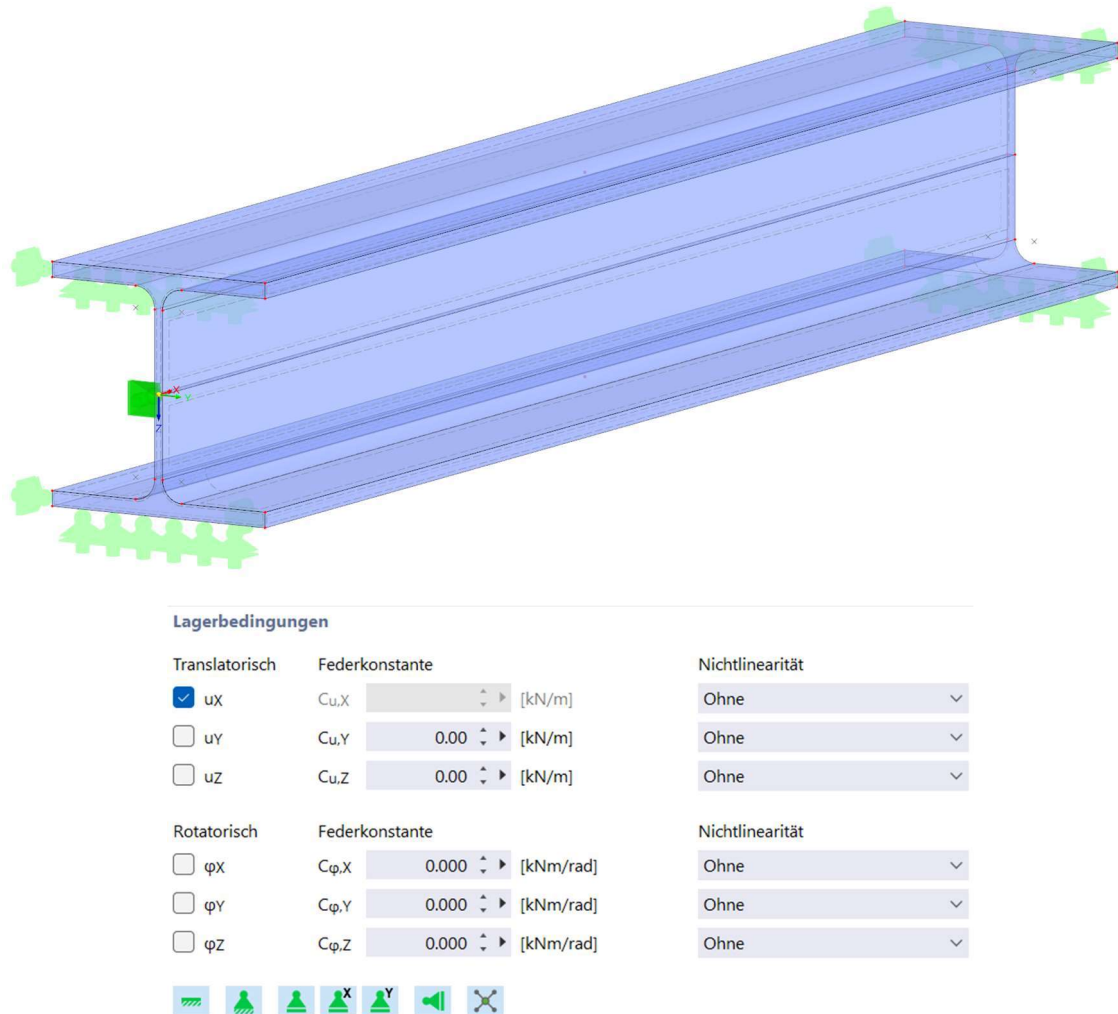


Abbildung 7-8: Horizontale Lagerung in Trägerlängsrichtung, Beispiel 1

Die Linienlasten werden gemäß Abbildung 7-9 entlang der Ober- und Unterkante des Flansches eingegeben, um ein resultierendes Torsionsmoment $M_x = 100 \text{ kNm}$ zu erzeugen, wie bereits in der Modellübersicht dargestellt.

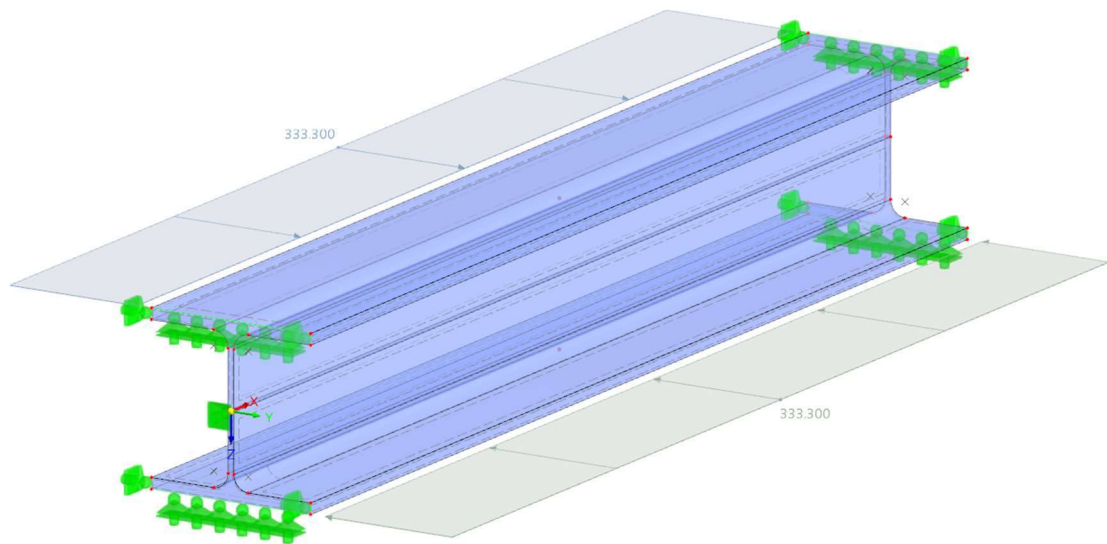
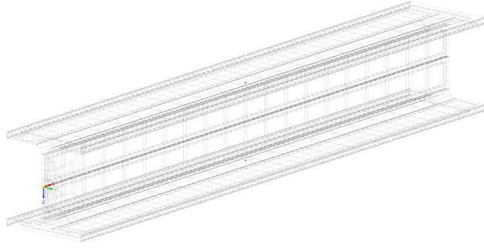
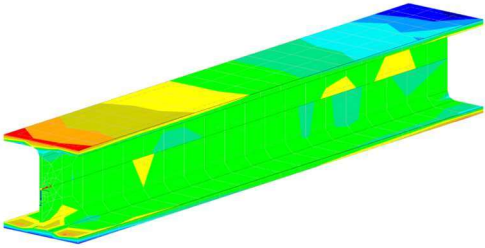
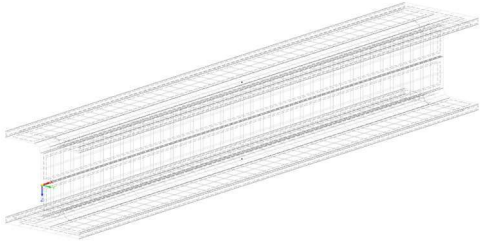
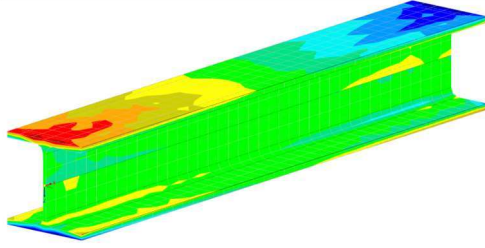
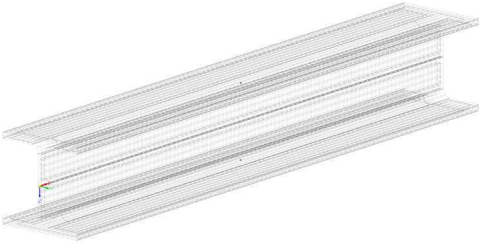
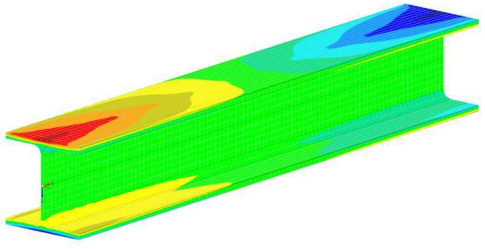


Abbildung 7-9: Eingabe der Linienlasten, Beispiel 1

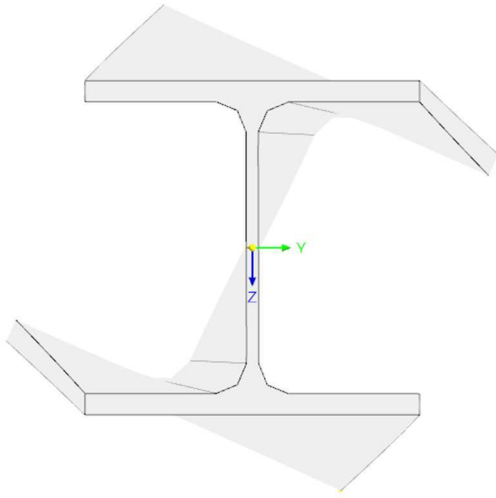
Das Modell ist nun fertiggestellt. Um die Diskretisierung festzulegen, wird die Netzweite schrittweise reduziert, und die daraus resultierenden Schubspannungen τ_{xy} (horizontale Schubspannung entlang des Flansches) werden ausgegeben. Ein ausreichend genaues Ergebnis ist dann gewährleistet, sobald die Schubspannungen einen annähernd glatten Verlauf aufweisen. Nach Tabelle 7-1 wurde die Netzweite auf 2 cm festgelegt.

Tabelle 7-1: Festlegung der Diskretisierung durch ausprobieren, Beispiel 1

Netz	Diskretisierung	Spannungsverlauf τ_{xy}
10 cm		
5 cm		
2 cm		

7.2.3 Verformungsfigur

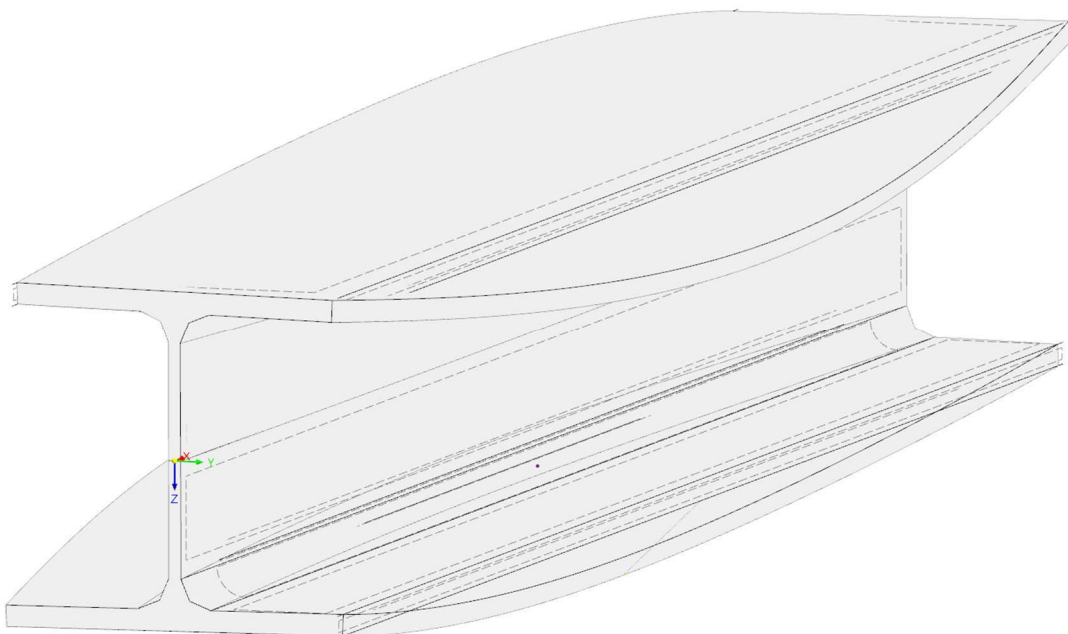
Vorderansicht ($y - z$ Ebene):



Draufsicht ($x - y$ Ebene):



Räumliche Darstellung:

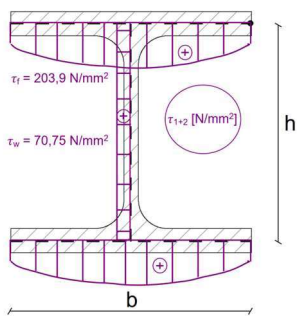
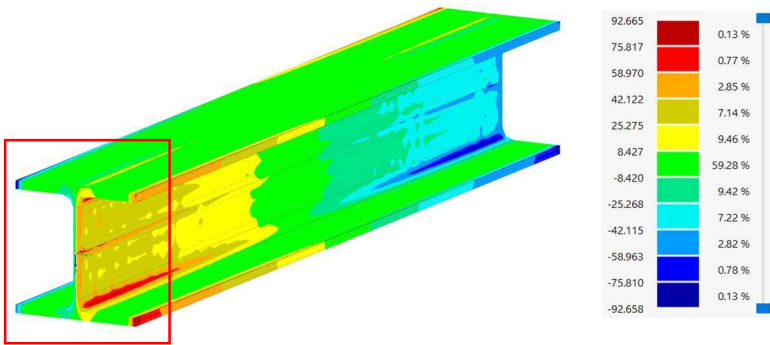


7.2.4 Spannungen

Bei der Bestimmung des maßgebenden Knotens ist es nicht immer klar, welche Stelle mit der Handrechnung verglichen werden soll. In der Handrechnung wird ein idealisierter Spannungsverlauf angenommen, wohingegen der tatsächliche Spannungsverlauf abweichen kann. Zudem ist es im Gegensatz zur Stabberechnung nicht möglich, die Spannungskomponenten nach primärer und sekundärer Torsion aufzuteilen, weshalb hier immer der kombinierte Schubspannungsverlauf angegeben wird.

Tabelle 7-2 zeigt den Vergleich der Schubspannung τ_{xz} entlang des Steges. Für den Steg verlaufen die Schubspannungen in der Realität nicht konstant. Im Übergangsbereich zwischen Steg und Flansch konzentrieren sich die Schubspannungen auf ein Maximum, das nahe dem Profilschwerpunkt liegt. Die Handrechnung wird um etwa 10% unterschätzt.

Tabelle 7-2: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

Handrechnung	RFEM 6
	
$\tau_w = 70,75 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_w = 63,1 \frac{N}{mm^2}$ → Abweichung: -10,8%

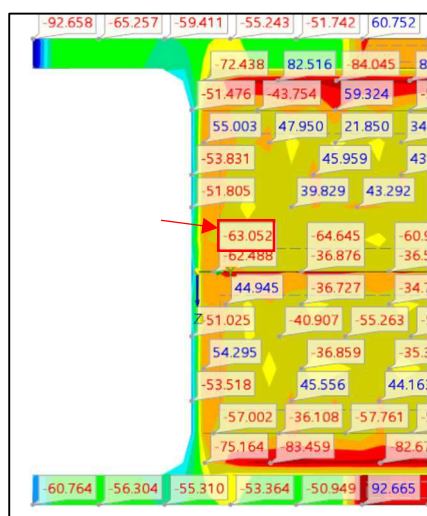
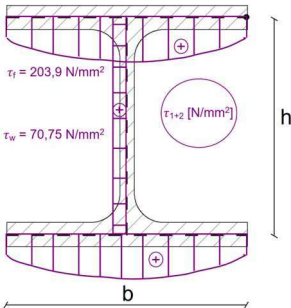
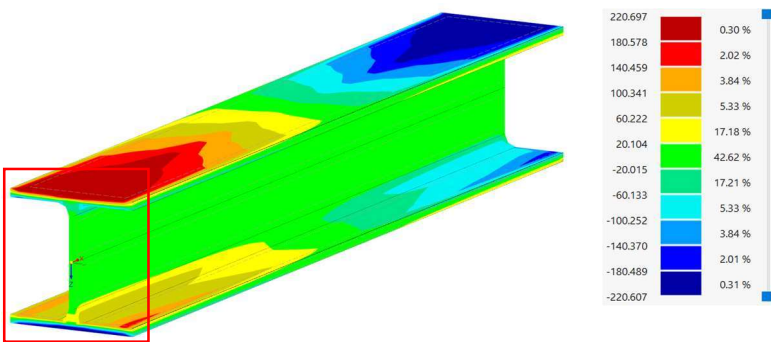


Abbildung 7-10: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

Tabelle 7-3 zeigt den Vergleich der Schubspannung τ_{xy} entlang des Flansches. Hier ist ein klarer Spannungsverlauf zu erkennen, bei dem sich die kritische Stelle eindeutig in der Mitte des Flansches befindet. Das Ergebnis ist etwa 8% höher als in der Handrechnung angenommen.

Tabelle 7-3: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

Handrechnung	RFEM 6
	
$\tau_f = 203,9 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_f = 220,7 \frac{N}{mm^2}$ → Abweichung: +8,2%

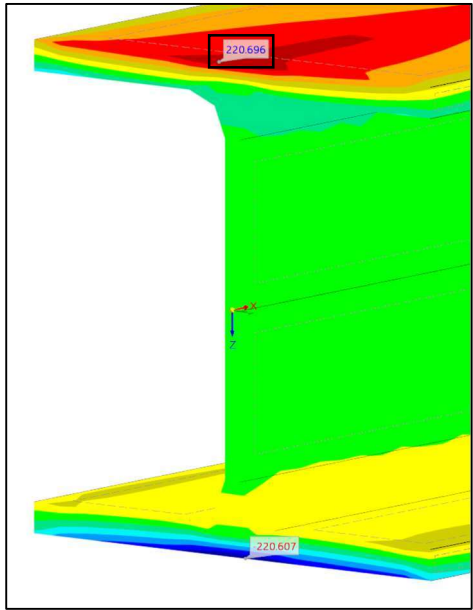
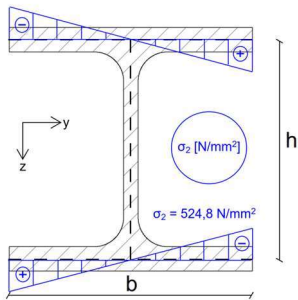
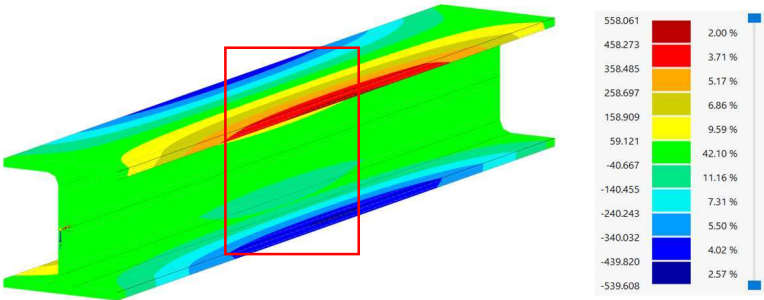


Abbildung 7-11: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 1

Tabelle 7-4 zeigt den Vergleich der Normalspannung σ_x . Die Normalspannung σ_x weist hier den klarsten Verlauf auf, mit eindeutigen Nachweisstellen an der Innenseite der Flansche in Feldmitte bei $x = 100$ cm. Das Ergebnis liegt leicht über den Werten der Handrechnung.

Tabelle 7-4: Vergleich der Normalspannung σ_x bei $x = 100$ cm, Beispiel 1

Handrechnung	RFEM 6
	
$\sigma_2 = 524,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\sigma_2 = 558,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
	→ Abweichung: +6,3%

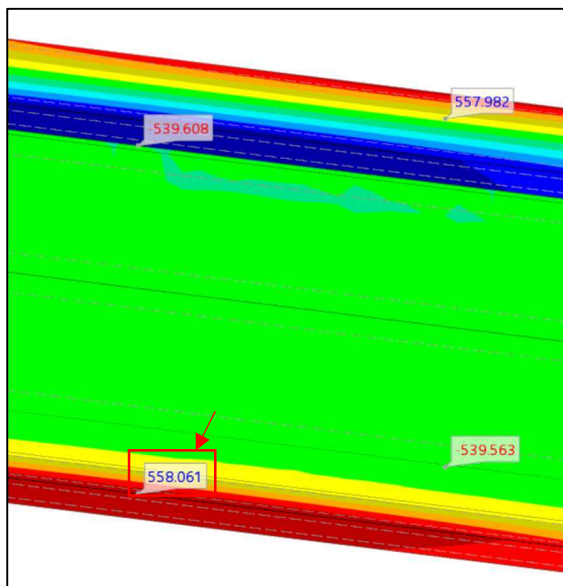
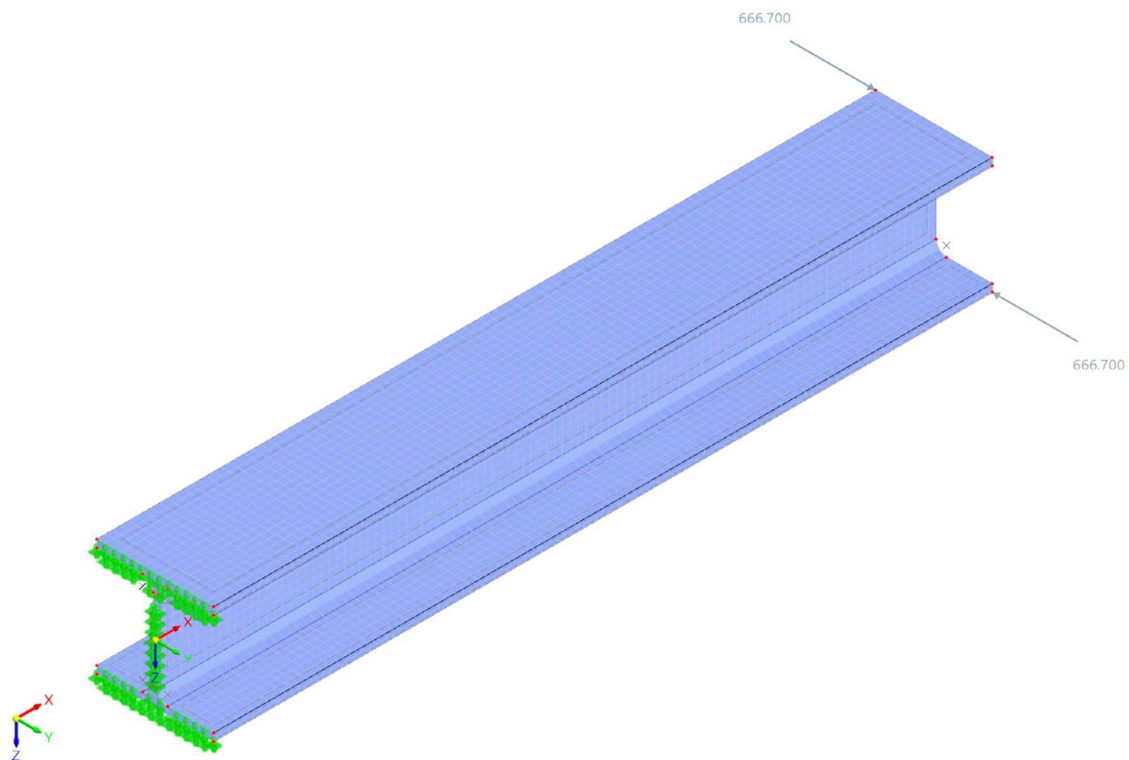


Abbildung 7-12: Ermittlung des FE-Knotens für σ_x bei $x = 100$ cm, Beispiel 1

7.3 Beispiel 2: Einseitig eingespannter Kragarm

7.3.1 Modell



Modelleingabe:

Profil	HEB 300, S355
Länge	$l = 2 \text{ m}$
Belastung ($x = 200 \text{ cm}$)	$Q_{y,1} = +666,7 \text{ kN}$ (am oberen linken Flansch) $Q_{y,2} = -666,7 \text{ kN}$ (am unteren rechten Flansch) $\rightarrow M_x = (666,7 \text{ kN} \cdot 0,15 \text{ m}) \cdot 2 \approx 200 \text{ kNm}$
Lagerung ($x = 0 \text{ cm}$)	Festlager entlang der Profilumrandung \rightarrow siehe Eingabe

Berechnungseinstellung:

Theorie	I. Ordnung
Netzweite	$L = 0,02 \text{ m}$ (Volumenelemente)

7.3.2 Eingabe

Die Eingabe erfolgt ähnlich wie in Beispiel 1. Dieses Mal ist es nicht erforderlich, einen Rand zu definieren, um die Querschnittsfläche in mehrere Teilabschnitte zu unterteilen. Abbildung 7-13 zeigt die extrudierte Querschnittsfläche.

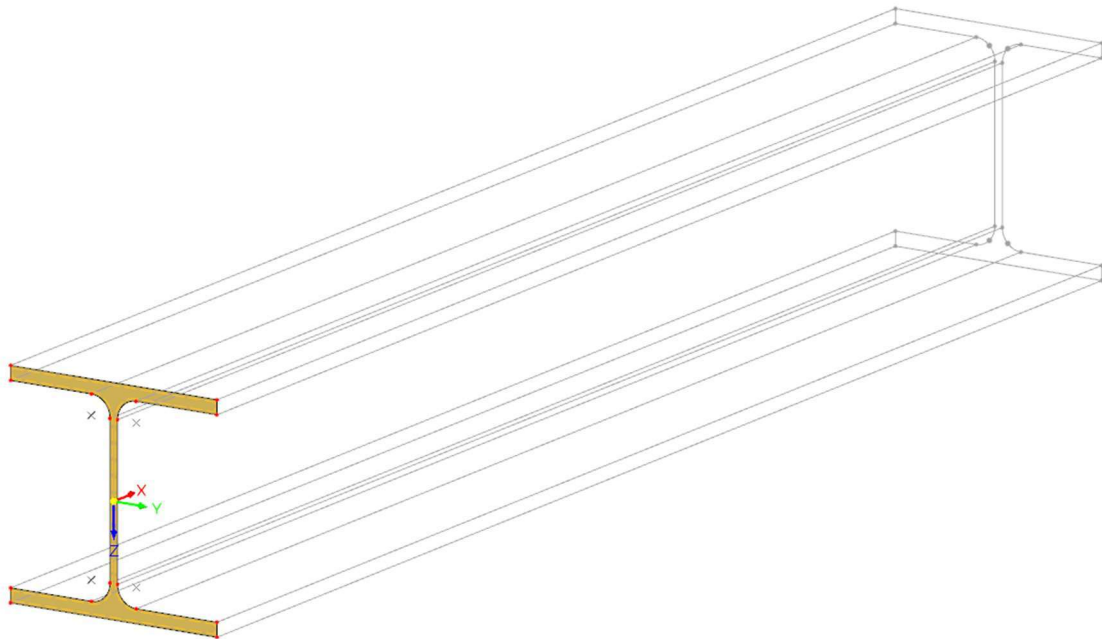


Abbildung 7-13: Extrusion der Fläche zu einem Volumenkörper, Beispiel 2

In Abbildung 7-14 wird die Wölbeinspannung realisiert, indem Linienfestlager entlang der Profilumrandung eingesetzt werden, die einem Flächenlager entsprechen. Dadurch wird sichergestellt, dass sich der Querschnitt im Einspannbereich nicht verwölben kann. Das Einzeltorsionsmoment von $M_T = 200 \text{ kNm}$ wird durch zwei Einzellasten erzeugt, die horizontal entgegengesetzt an den Flanschrändern angebracht werden, wie bereits in der Modellübersicht dargestellt wurde. Die Netzweite wird ebenfalls wie in Beispiel 1 auf 2 cm festgelegt.

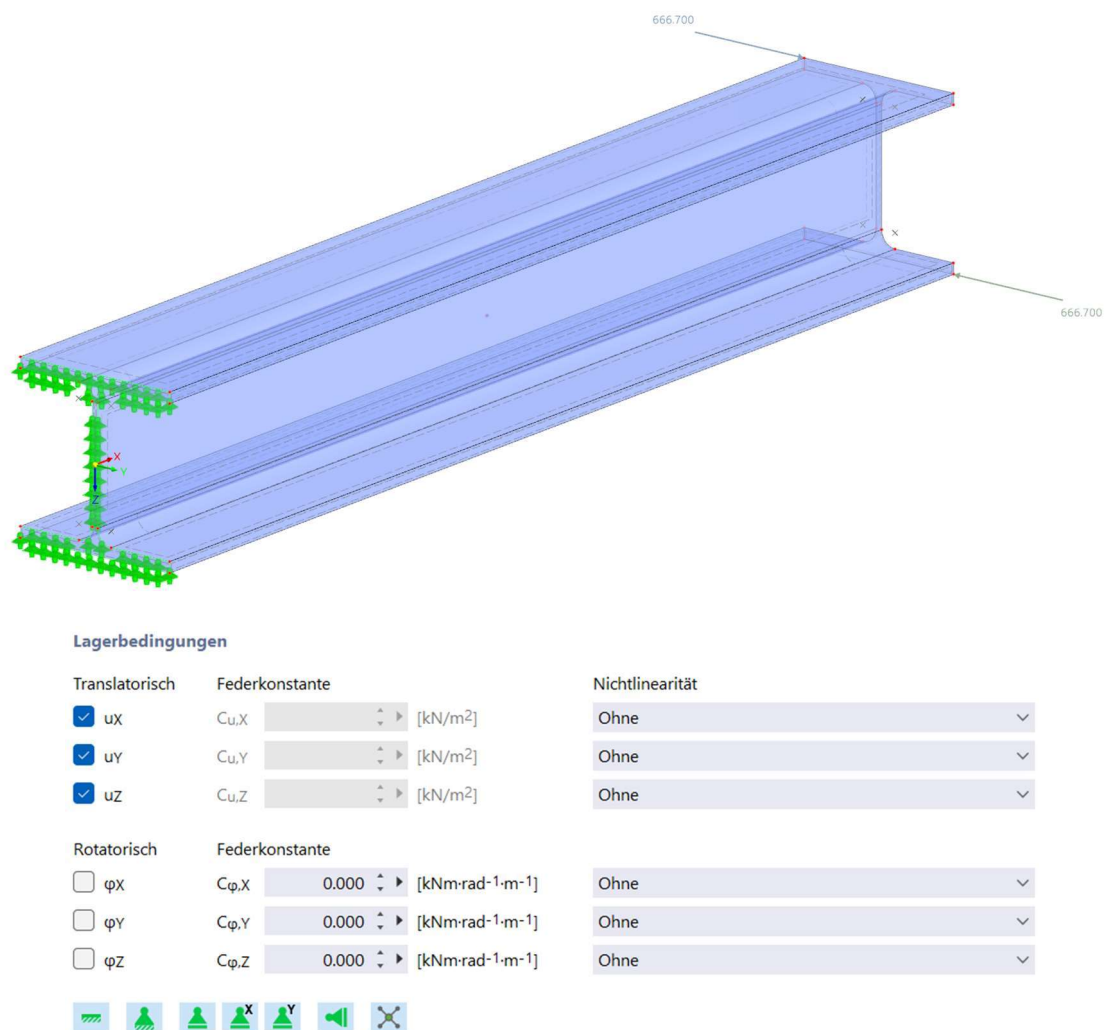
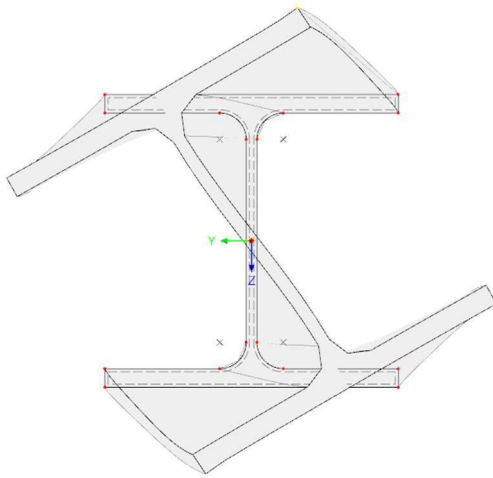


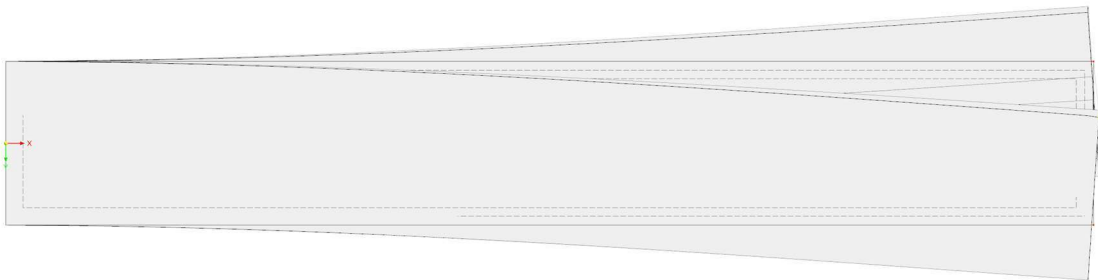
Abbildung 7-14: Abgeschlossenes Volumenmodell, Beispiel 2

7.3.3 Verformungsfigur

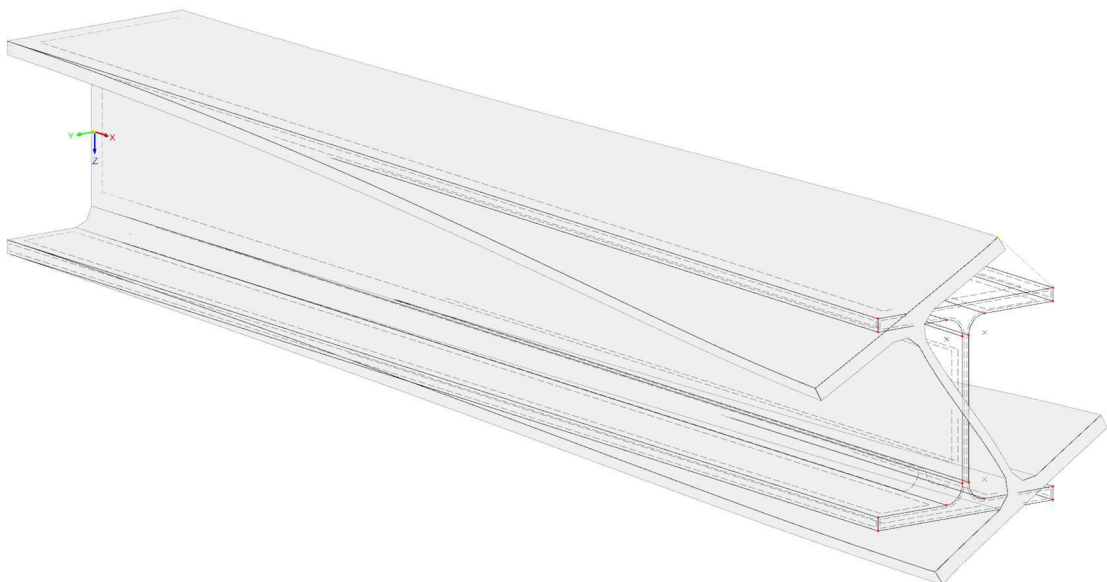
Vorderansicht ($y - z$ Ebene):



Draufsicht ($x - y$ Ebene):



Räumliche Darstellung:



7.3.4 Spannungen

Aus der Handrechnung sowie der Stabberechnung ist bereits klar, dass sowohl der Einspannbereich als auch die Kragarmspitze untersucht werden müssen. Zunächst wird die Kragarmspitze bei $x = 200$ cm betrachtet. Da keine Wölbbehinderung auftritt, sind somit keine Normalspannungen σ_x zu erwarten.

Tabelle 7-5 zeigt den Schubspannungsvergleich τ_{xz} entlang des Steges. Deutlich wird, dass sich aufgrund der angebrachten Einzellasten Spannungsspitzen bilden. Dies resultiert in einer deutlich höheren Schubspannung, die sich im Profilschwerpunkt konzentriert.

Tabelle 7-5: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RFEM 6
$\tau_w = 567,1 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_w = 1395 \frac{N}{mm^2}$ → Abweichung: +146%

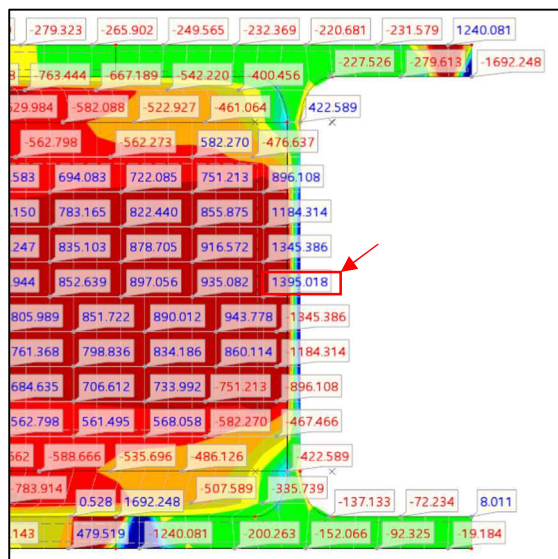


Abbildung 7-15: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2

Tabelle 7-6 zeigt den Schubspannungsvergleich τ_{xy} entlang des Flansches. Durch die angebrachten Einzellasten entstehen Spannungsspitzen, die dazu führen, dass an den Flanschseitenrändern die höchste Schubspannung auftritt und signifikant von der Handrechnung abweicht. Bei Betrachtung der Kragarmspitze in Richtung Feldmitte wird deutlich, dass sich der erwartete Schubspannungsverlauf τ_{xy} gemäß der Handrechnung in der Flanschmitte einstellt.

Tabelle 7-6: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RFEM 6
$\tau_f = 1071 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_f = 6390 \frac{N}{mm^2}$ → Abweichung: +597%

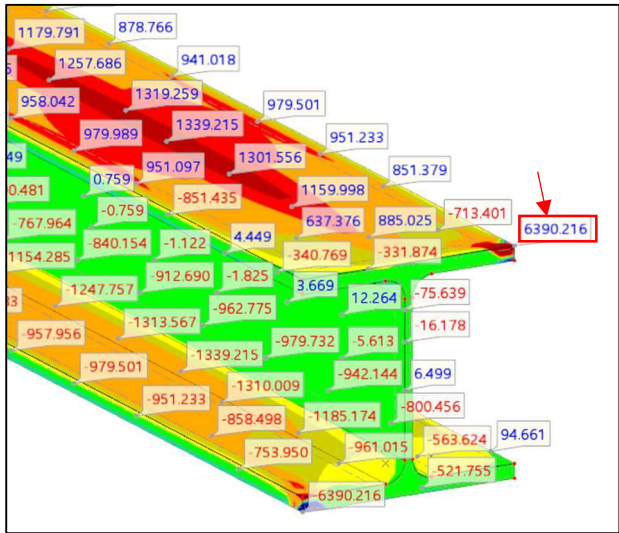


Abbildung 7-16: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 200$ cm, Beispiel 2

Nun wird der Einspannbereich bei $x = 0\text{ cm}$ betrachtet. Tabelle 7-7 zeigt den Schubspannungsvergleich τ_{xz} entlang des Steges. Da aus der Stabberechnung bereits klar ist, dass keine primäre Torsion M_{T1} auftritt, sind die Schubspannungen τ_{xz} entlang des Steges annähernd $\tau_{xz} = 0$.

Tabelle 7-7: Vergleich der Schubspannung τ_{xz} bei $x = 0\text{ cm}$, Beispiel 2

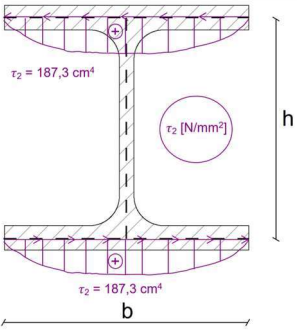
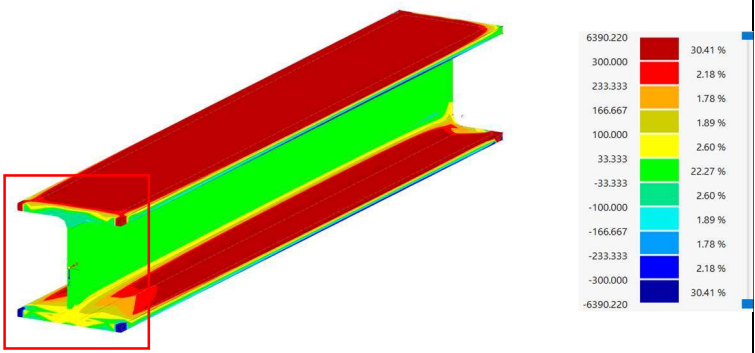
Handrechnung	RFEM 6
$\tau_w = 0 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_w \approx 0 \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } \approx 0\%$



Abbildung 7-17: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xz} bei $x = 0\text{ cm}$, Beispiel 2

Tabelle 7-8 zeigt den Schubspannungsvergleich τ_{xy} entlang des Flansches. Es bilden sich wiederum Spannungsspitzen an den Seitenrändern des Flansches, wo gemäß der Handrechnung keine Schubspannung zu erwarten ist. Dies führt zu einer hochsignifikanten Überschreitung im Vergleich zur Handrechnung. In der Flanschmitte hingegen sind die Schubspannungen τ_{xy} deutlich kleiner als erwartet.

Tabelle 7-8: Vergleich der Schubspannung τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RFEM 6
	
$\tau_f = 187,3 \frac{N}{mm^2}$	$\tau_f = 1275 \frac{N}{mm^2}$
	→ Abweichung: +681%

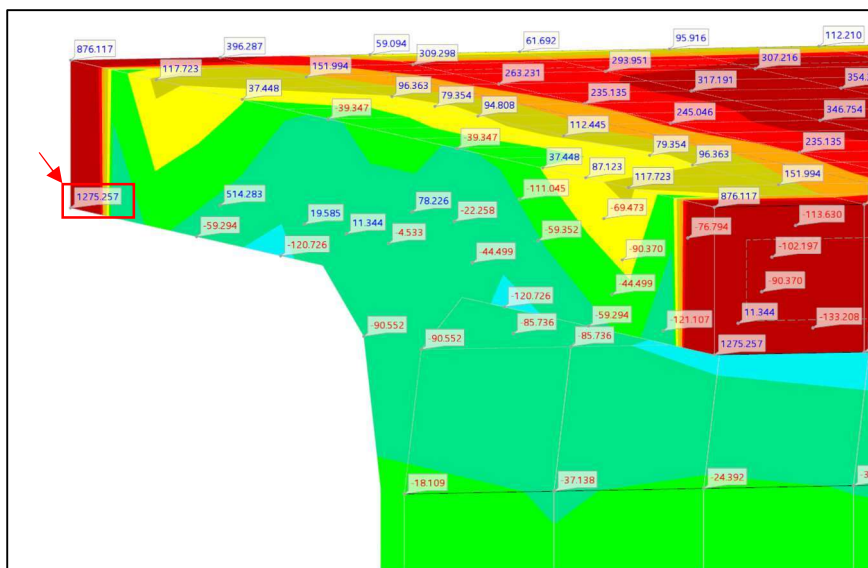
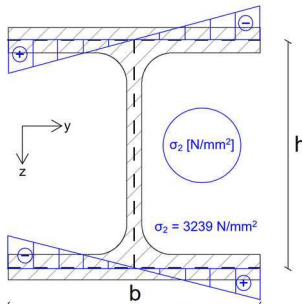
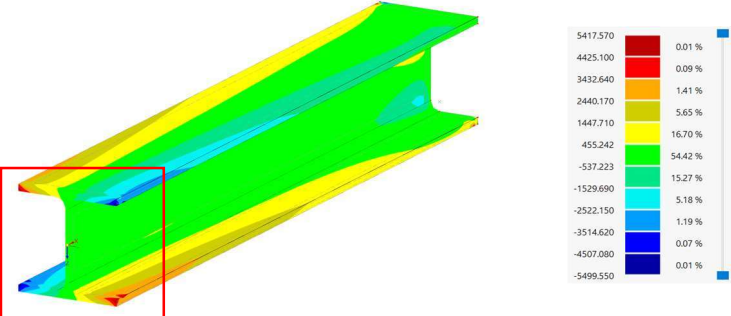


Abbildung 7-18: Ermittlung des FE-Knotens für τ_{xy} bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

Abschließend werden die Normalspannungen σ_x in Tabelle 7-9 verglichen. Der Spannungsverlauf σ_x entspricht weitgehend den Erwartungen. Dennoch zeigen sich an den Ecken der Flansche deutlich höhere Normalspannungen σ_x im Vergleich zur Handrechnung.

Tabelle 7-9: Vergleich der Normalspannung σ_x bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

Handrechnung	RFEM 6
	
$\sigma_2 = 3239 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\sigma_2 = 5418 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \rightarrow \text{Abweichung: } +67\%$

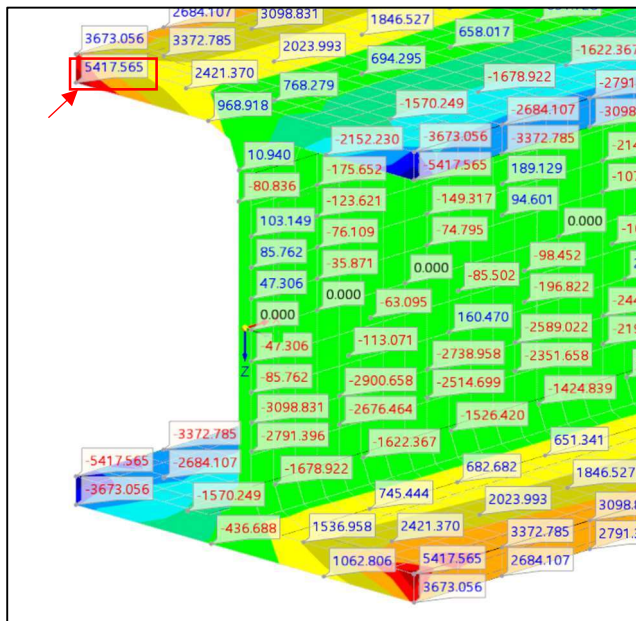


Abbildung 7-19: Ermittlung des FE-Knotens für σ_x bei $x = 0$ cm, Beispiel 2

8 Diskussion

8.1 Stabwerksprogramm RSTAB 9

Aus dem Vergleich zwischen dem Stabwerksprogramm RSTAB 9 und der Handrechnung wird deutlich, dass die Ergebnisse nahezu identisch sind. Ein klarer Vorteil liegt darin, dass RSTAB 9 die Querschnittsgrößen wie Einheitsverwölbung ω , Wölbfläche S_ω und Torsionssteifigkeiten I_ω und I_T direkt anzeigen kann, siehe Tabelle 6-1. Der einzige Unterschied zeigt sich darin, dass das in RSTAB 9 berechnete Torsionsflächenmomente 2. Grades I_T für das HEB 300 Profil etwas niedriger ausfällt als in der Handrechnung, da RSTAB 9 die Radien genauer berücksichtigt. Die Wölbsteifigkeit I_ω wird sowohl in RSTAB 9 als auch in Tabellenwerken höchstwahrscheinlich nach dem selben Verfahren wie in der Handrechnung berechnet, da die Größen identisch sind. Dies lässt darauf schließen, dass die Radien bei der Berechnung der Wölbsteifigkeit I_ω unberücksichtigt bleiben.

In RSTAB 9 können neben den gesuchten Wölbkrafttorsionsschnittgrößen M_{T1} , M_{T2} , M_T und M_ω auch die Spannungen in jede einzelne Komponente aufgeteilt und ausgegeben werden, siehe Abbildung 6-5. Dadurch lassen sich primäre und sekundäre Spannungen klar unterscheiden. Mit den definierten Spannungspunkten für normierte Querschnitte innerhalb der Querschnittsbibliothek können Spannungen an beliebigen Stellen im Querschnitt berechnet werden, siehe Abbildung 6-4. Sobald eigene Querschnitte eingegeben werden, ist jedoch keine Wölbkrafttorsionsberechnung mehr möglich. Spezielle Randbedingungen wie bei der Wölbeinspannung in Beispiel 2 können durch Umwege wie die Eingabe von Steifen sauber modelliert werden, siehe Abbildung 6-8.

Die Wölbkrafttorsionsberechnung erfolgt in RSTAB 9 lokal für jeden Stab und kann daher für bestimmte Stäbe aktiviert oder deaktiviert werden, siehe Abbildung 6-2. Die im Hintergrund ablaufenden Berechnungen in RSTAB 9 konnten während der Bearbeitung nicht eingesehen werden, weshalb die genauen Rechenvorgänge nicht nachvollzogen werden konnten. Im Handbuch von RSTAB 9 zur Wölbkrafttorsion wird jedoch darauf hingewiesen, dass die lokal berechnete Stabverwölbung in die Gesamtsteifigkeit des Systems einfließt [Quelle: Onlinehandbuch zu RSTAB 9].

8.2 Finite-Elemente-Methode RFEM 6

Der Vergleich mithilfe der Finite-Elemente-Methode stellt eine äußerst umfangreiche Aufgabe dar. Die Ergebnisse und der Rechenaufwand variieren stark je nach Diskretisierung und den eingegebenen Lagerbedingungen. Bei der Anbringung eines Torsionsmoments stellt sich die Frage, wie die Kräfte angeordnet werden müssen. Die Verformungsfigur ermöglicht eine anschauliche Visualisierung der Verwölbung, was die Plausibilität der Eingabe erleichtert und zum Verständnis der Wölbkrafttorsion beiträgt.

Schnittgrößen können durch Integration der Spannungen ermittelt werden, in diesem Fall wurde jedoch darauf verzichtet, da eine Aufteilung der Torsionsschnittgrößen in M_{T1} , M_{T2} und M_{ω} zum aktuellen Stand der Bearbeitung nicht möglich war. Dieses Thema müsste gesondert betrachtet werden. Daher wurden hier nur die Spannungen verglichen. Diese setzen sich aus primären und sekundären Spannungen zusammen, weshalb sie nicht mehr in einzelne Komponenten aufgeteilt werden können. Die Normalspannungen bestehen ausschließlich aus der sekundären Normalspannung σ_2 , was einen guten Vergleich ermöglicht.

In Beispiel 1 des gabelgelagerten Trägers sind die Spannungen um etwa 10% höher als in der Handrechnung, was auf die ungleiche Spannungsverteilung zurückzuführen ist. Die höchsten Spannungen treten daher an den Profilrändern auf, anstatt wie in der Handrechnung an der Profilmittellinie angenommen.

In Beispiel 2 ist es erforderlich, die Wölbeinspannung durch ein idealisiertes Flächenlager zu realisieren. Dies führt zu Spannungsspitzen im Einspannbereich, die zu einer deutlichen Überschreitung der erwarteten Spannungen und einer Verfälschung der Ergebnisse führen. Die Aufbringung des Einzelmoments durch Einzellasten führt ebenfalls zu Singularitäten an der Kragarmspitze, wodurch der Spannungsverlauf im Querschnitt an der Kragarmspitze unbrauchbar wird. Für dieses Beispiel ist es unbedingt erforderlich, ein optimiertes Modell zu erstellen, das diese Nachteile beseitigt.

Der Vorteil gegenüber dem Stabwerksprogramm liegt eindeutig in der Flexibilität der Eingabe und den umfassenden Einsatzmöglichkeiten. In der Realität können statische Systeme nicht immer durch idealisierte und genormte Standardfälle abgebildet werden. Das Abbilden einer Einspannung oder Gabellagerung umfasst komplexe Randbedingungen, die durch Volumenmodelle berücksichtigt werden können.

9 Fazit und Ausblick

Das Thema der Wölbkrafttorsion ist äußerst umfangreich und komplex. Bereits in der Balkentheorie und der St. Venantschen Torsionstheorie hängen die Grundformeln stark vom betrachteten System ab. Aufgrund der signifikanten Auswirkungen der Wölbkrafttorsion auf Stahlbauprofile ist die Betrachtung der dünnwandigen Theorie besonders relevant für die praktische Anwendung. Daher hat sich die Forschung insbesondere auf dünnwandige offene und geschlossene Querschnitte fokussiert, wodurch dieser Bereich bereits gut erforscht ist. Gerade für dünnwandige Querschnitte lässt sich die Wölbkrafttorsion anschaulich beschreiben, einfach interpretieren und für plausibilitätsbasierte Handrechnungen leicht integrieren.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde sich ausschließlich auf HEB-Profile konzentriert. Weiterführend kann die Untersuchung auf weitere I-Profile oder rechteckige Rohrprofile ausgeweitet werden. Besonders interessant ist die Untersuchung von mehrzelligen Kastenquerschnitten für praktische Anwendungen wie Brückenquerschnitte.

Die Bemessung selbst wurde in dieser Arbeit nicht behandelt, obwohl ihre Bedeutung unbestritten ist. Es macht einen erheblichen Unterschied, ob ausschließlich der primäre Torsionsanteil $M_T = M_{T1}$ berücksichtigt wird. Es wurde gezeigt, dass ein hoher sekundärer Torsionsanteil M_{T2} aufgrund der Wölbsteifigkeit I_ω nur einen geringen Beitrag zu den Spannungen im Vergleich zur primären Torsion M_{T1} leistet.

Die Integration der Wölbkrafttorsion in kommerzieller Software zeigt eine positive Entwicklung, insbesondere bei Stabprogrammen durch Add-Ons. Die Ergebnisse sind stets zuverlässig im Vergleich zur Handrechnung. In der Finite-Elemente-Methode lassen sich durch Volumenelemente die verdrehten Träger und ihre Querschnittsverwölbungen anschaulich darstellen. Um jedoch hinreichend genaue Ergebnisse zu erzielen, ist es erforderlich, die gegebenen Randbedingungen sorgfältig zu berücksichtigen. Besonders beim Aufbringen von Lasten können Singularitäten auftreten und die Spannungsverläufe verfälschen, was den Modellierungsaufwand erhöht. Für besonders präzise Ergebnisse bei dünnwandigen Querschnitten ist eine feine Netzeinteilung erforderlich, was den Rechenaufwand zusätzlich erhöht.

Das in der Einleitung verwendete Zitat von Leonardo Da Vinci fasst diese Arbeit treffend zusammen: Für die Anwendung der Wölbkrafttorsion ist es unerlässlich, den theoretischen Hintergrund ausreichend zu verstehen, um während der Projektbearbeitung keinen „Schiffbruch“ zu erleiden.

Literaturverzeichnis

- [1] Spura, Christian, Einführung in die Balkentheorie nach Timoshenko und Euler-Bernoulli, Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, 2019.
- [2] Laumann, Jörg and Feldmann, Markus and Frickel, Jörg and Krahwinkel, Manuel and Kraus, Matthias and Stranghöner, Natalie and Ummenhofer, Thomas, Petersen Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten, 5th ed. 2022 Hrsg., Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, 2022.
- [3] Spura, Christian, Technische Mechanik 2. Elastostatik: Nach fest kommt ab, Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, 2019.
- [4] Schneider, Klaus-Jürgen and Schweda, Erwin and Rubin, Helmut, Baustatik, <Festig>. Festigkeitslehre / Erwin Schweda. Neubearb. von Wolfgang Krings, 3., neubearb. und erw. Aufl. Hrsg., Düsseldorf: Werner, 2000.
- [5] F. W. Bornscheuer, „Systematische Darstellung des Biege-und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion,“ *Stahlbau*, Bd. 87, p. 622–631, 2018.

Erklärung

Ich versichere, die von mir vorgelegte Arbeit selbstständig verfasst zu haben. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Arbeiten anderer oder der Verfasserin/des Verfassers selbst entnommen sind, habe ich als entnommen kenntlich gemacht. Sämtliche Quellen und Hilfsmittel, die ich für die Arbeit benutzt habe, sind angegeben. Die Arbeit hat mit gleichem Inhalt bzw. in wesentlichen Teilen noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Lörrach, 09.07.2024

Ort, Datum

M. Erfurt

Unterschrift