Versión
septiembre 2016

Módulo adicional

RF-LAMINATE

Cálculo de superficies laminadas

Descripción del programa

Todos los derechos reservados, incluidos los de traducción.
El contenido de esta publicación no podrá reproducirse ni parcialmente, ni por procedimientos mecánicos, ni electrónicos o por cualquier otro medio, incluyendo la fotocopia sin el permiso previo de DLUBAL SOFTWARE GMBH.

© Dlubal Software GmbH 2017
Am Zellweg 2
93464 Tiefenbach
Alemania

Tel.: +49 9673 9203-61 (hablamos español)
Fax: +49 9673 9203-51
Correo electrónico: info@dlubal.com
Web: www.dlubal.com/es

Contenido

	Contenido	Página
1.	**Introducción**	**3**
1.1	Módulo adicional RF-LAMINATE	3
1.2	Uso del manual	3
1.3	Inicio de RF-LAMINATE	3
2.	**Teoría**	**6**
2.1	Símbolos	6
2.2	Modelado de la estructura multicapa	7
2.3	Modelos de material	8
2.3.1	Ortótropo	8
2.3.2	Isótropo	11
2.3.3	Definido por el usuario	11
2.3.4	Híbrido	11
2.4	Matriz de rigidez	12
2.4.1	Con consideración del acoplamiento a cortante	12
2.4.2	Sin consideración del acoplamiento a cortante	17
3.	**Datos de entrada**	**20**
3.1	Datos generales	20
3.1.1	Estado límite último	22
3.1.2	Estado límite de servicio	23
3.2	Características del material	24
3.3	Resistencias del material	31
3.4	Clase de duración de carga y servicio	32
3.5	En condiciones de servicio	34
3.6	Datos de servicio	35
4.	**Cálculo**	**37**
4.1	Detalles	37
4.1.1	Tensiones	38
4.1.2	Resultados	45
4.2	Norma	46
4.2.1	Factores de material	47
4.2.2	Límites de servicio	48
4.3	Inicio del cálculo	49
5.	**Resultados**	**50**
5.1	Razón máx. de tensiones por carga	51
5.2	Razón máx. de tensiones por superficie	55
5.3	Razón máx. de tensiones por composición	55
5.4	Tensiones en todos los puntos	56
5.5	Desplazamientos máx.	57
5.6	Lista de piezas	58
6.	**Informe**	**60**
6.1	Informe	60
6.2	Informe gráfico	61
6.2.1	Resultados en el modelo de RFEM	61
6.2.2	Diagramas de tensiones	62
7.	**Funciones generales**	**63**
7.1	Unidades y decimales	63

© Dlubal Software 2017

7.2 Exportación de resultados ... 63
8. Ejemplos ... 65
8.1 Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez ... 65
8.1.1 Con acoplamiento a cortante de capas ... 68
8.1.2 Sin acoplamiento a cortante de capas ... 73
8.2 Cálculo de tensiones ... 75
8.2.1 Cálculo de componentes de tensiones ... 76
8.2.2 Análisis en el módulo RF-LAMINATE ... 78
8.3 Cálculo de la placa continua según EC 5 ... 84
8.4 Cálculo del elemento de la matriz de rigidez a cortante ... 90
9. Anejos ... 93
9.1 Relaciones de transformación ... 93
9.2 Comprobación de la definitud positiva de la matriz de rigidez ... 94
9.3 Dos dimensiones equivalentes de coef. de Poisson ... 94
A. Bibliografía ... 96
B. Índice ... 97

© DLUBAL SOFTWARE 2017

1 Introducción

1.1 Módulo adicional RF-LAMINATE

El módulo adicional RF-LAMINATE de DLUBAL SOFTWARE GMBH calcula las deformaciones y tensiones de superficies laminadas. Puede usar RF-LAMINATE, por ejemplo, para calcular madera contralaminada, madera laminada encolada o tableros de virutas orientadas (OSB). Este módulo no es sólo adecuado para estructuras de madera, sino que puede crear varias composiciones de capas de cualquier material que se pueda seleccionar en la amplia biblioteca de materiales. Además, puede definir nuevos materiales y añadirlos a la biblioteca.

En RF-LAMINATE, puede crear estructuras con distintos modelos de material. Aparte de los modelos de material isótropos y ortótropos, se encuentran disponibles modelos definidos por el usuario e híbridos que permiten combinar materiales isótropos y ortótropos en una composición. Las capas individuales de materiales ortótropos se pueden girar un ángulo específico β de forma que se consideren propiedades diferentes en las direcciones relevantes. También puede decidir si se va a considerar o no el acoplamiento a cortante de las capas.

El módulo le facilita su trabajo debido a sus ventanas de disposición clara e intuitiva de introducción de datos. En este manual se ofrece toda la información necesaria para trabajar con RF-LAMINATE y se incluyen ejemplos típicos.

Al igual que otros módulos, RF-LAMINATE está completamente integrado en el programa RFEM. Pero no se trata sólo de una parte "óptica" del programa principal: es posible incorporar los resultados del módulo, incluyendo las representaciones gráficas, al informe global. Por lo tanto, sobre todo se puede disponer del análisis completo y organizarlo de forma fácil y uniforme. La concepción similar de todos los módulos de DLUBAL también facilita el trabajo con RF-LAMINATE.

Le deseamos tenga mucho éxito durante su trabajo con el programa principal RFEM y su módulo adicional RF-LAMINATE.

El equipo de DLUBAL SOFTWARE GMBH.

1.2 Uso del manual

En el manual de RFEM se describen temas como los requisitos del sistema operativo o la instalación. Por consiguiente, se deja de lado en esta descripción. Es mejor que nos centremos en las características específicas del módulo RF-LAMINATE.

Al describir RF-LAMINATE, mantenemos la secuencia y la estructura de las ventanas de entrada y resultados del módulo. Los **botones** descritos se introducen en el texto dentro de corchetes, por ejemplo [Detalles]. También se visualizan en el margen izquierdo. Todos los términos mencionados en los cuadros de diálogo, ventanas o menús se escriben en *cursiva* para que pueda encontrarlos en el programa fácilmente.

En este manual se incluye un índice para una búsqueda rápida de ciertos términos. Si aún así no puede encontrar lo que necesita, échele un vistazo al blog de nuestro sitio web https://www.dlubal.com/blog/es donde puede hojear las entradas de blog y encontrar sugerencias apropiadas.

1.3 Inicio de RF-LAMINATE

El módulo adicional RF-LAMINATE se puede iniciar desde RFEM de varias formas.

© DLUBAL SOFTWARE 2017

Menú principal

Puede iniciar RF-LAMINATE usando el comando del menú principal de RFEM

Módulos adicionales → **Otros** → **RF-LAMINATE**.

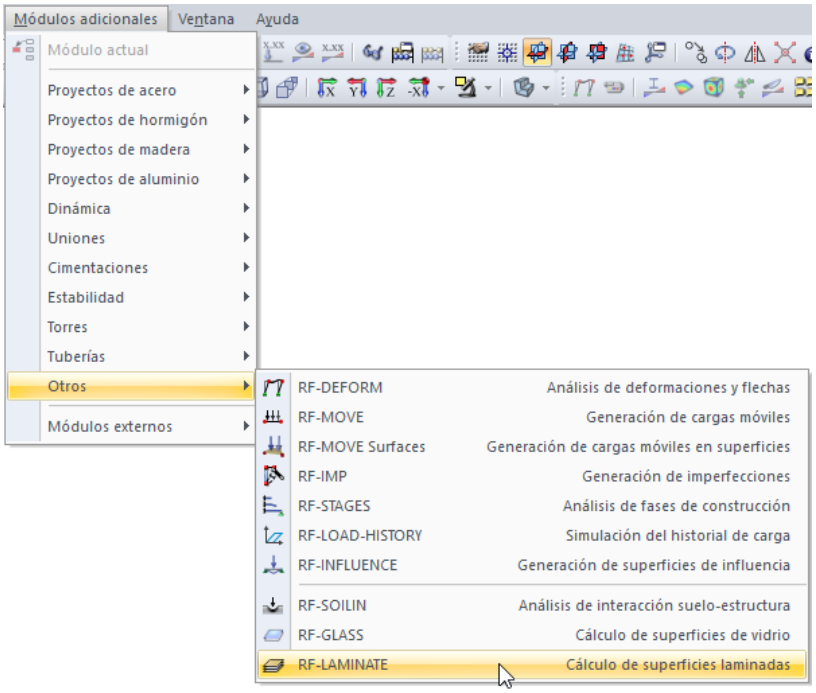


Figura 1.1: Menú principal *Módulos adicionales* → *Otros* → *RF-LAMINATE*

Navegador

También puede iniciar RF-LAMINATE desde el navegador *Datos* haciendo clic en el elemento

Módulos adicionales → **RF-LAMINATE - Cálculo de superficies laminadas**.

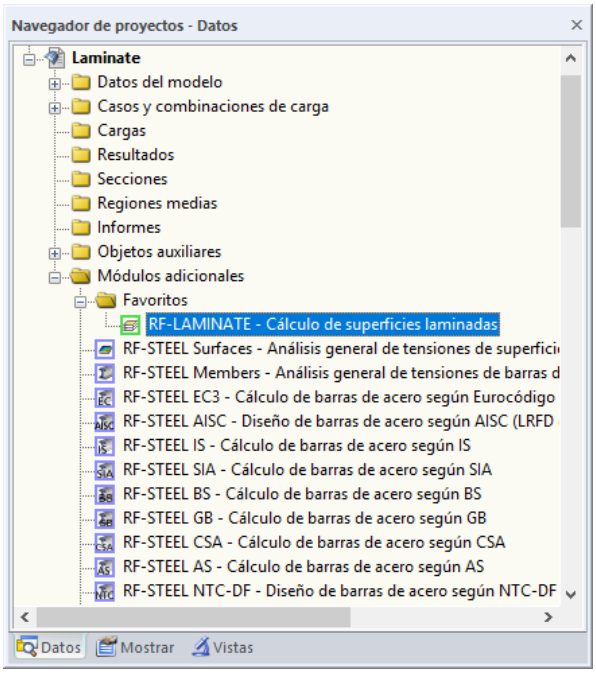
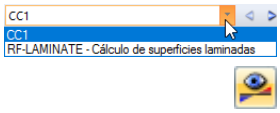


Figura 1.2: Navegador *Datos*, *Módulos adicionales* → *RF-LAMINATE*

Panel



Si los resultados de RF-LAMINATE ya se encuentran disponibles en el modelo, puede establecer el caso de cálculo relevante de RF-LAMINATE en la lista de casos de carga en la barra de herramientas de RFEM. Usando el botón [Mostrar resultados], puede luego representar deformaciones o tensiones.

El botón [RF-LAMINATE] se muestra en el panel. Puede iniciar RF-LAMINATE haciendo clic en el botón.

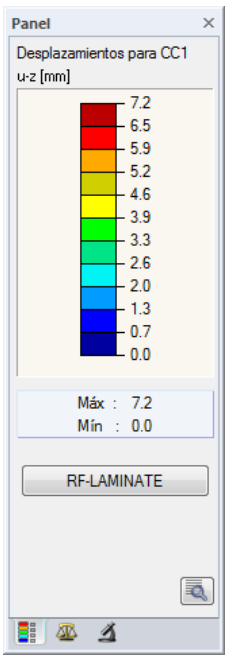


Figura 1.3: Botón del panel [RF-LAMINATE]

2 Teoría

Este capítulo introduce los principios teóricos necesarios para trabajar con RF-LAMINATE.

2.1 Símbolos

t	Espesor de la composición [m]
t_i	Espesor de las capas individuales [m]
β	Dirección ortótropa [grad]
E	Módulo de elasticidad de Young [Pa]
E_x	Módulo de elasticidad de Young en dirección del eje x′ [Pa]
E_y	Módulo de elasticidad de Young en dirección del eje y′ [Pa]
G	Módulo de cortante [Pa]
G_{xy}	Módulo de cortante en el plano x′y′ [Pa]
G_{xz}	Módulo de cortante en el plano x′z [Pa]
G_{yz}	Módulo de cortante en el plano y′z [Pa]
ν	Coeficiente de Poisson [—]
ν_{xy}, ν_{yx}	Coeficientes de Poisson en el plano x′y′ [—]
γ	Peso específico [N/m^3]
α_T	Coeficiente de dilatación térmica [K^{-1}]
d'_{ij}	Elementos de la matriz de rigidez parcial en el sistema de coordenadas x′,y′,z [Pa]
d_{ij}	Elementos de la matriz de rigidez parcial en el sistema de coordenadas x,y,z [Pa]
D_{ij}	Elementos de la matriz de rigidez global [Nm , Nm/m , N/m]
σ_x, σ_y	Tensiones normales [Pa]
$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$	Tensiones tangenciales [Pa]
n	Número de capas [—]
z	Coordenadas en el eje z [m]
m_x	Momento flector que induce tensiones en dirección del eje x [Nm/m]
m_y	Momento flector que induce tensiones en dirección del eje y [Nm/m]
m_{xy}	Momento torsor [Nm/m]
v_x, v_y	Esfuerzos cortantes [N/m]
n_x	Esfuerzo axil en dirección del eje x [N/m]
n_y	Esfuerzo axil en dirección del eje y [N/m]
n_{xy}	Flujo de cortante [N/m]
$f_{b,k}$	Valor característico de la resistencia a flexión [Pa]
$f_{t,k}$	Valor característico de la resistencia a tracción [Pa]
$f_{c,k}$	Valor característico de la resistencia a compresión [Pa]
$f_{b,0,k}$	Valor característico de la resistencia a flexión a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{t,0,k}$	Valor característico de la resistencia a tracción a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{c,0,k}$	Valor característico de la resistencia a compresión a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{b,90,k}$	Valor característico de la resistencia a flexión perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{t,90,k}$	Valor característico de la resistencia a tracción perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{c,90,k}$	Valor característico de la resistencia a compresión perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{eqv,k}$	Valor característico de la resistencia equivalente [Pa]
$f_{xy,k}$	Valor característico de la resistencia a cortante en el plano de la placa [Pa]

© Dlubal Software 2017

$f_{v,k}$	Valor característico de la resistencia a cortante [Pa]
$f_{R,k}$	Valor característico de la resistencia a cortante de rodadura [Pa]
$f_{b,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a flexión [Pa]
$f_{t,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a tracción [Pa]
$f_{c,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a compresión [Pa]
$f_{b,0,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a flexión a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{t,0,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a tracción a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{c,0,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a compresión a lo largo de la fibra [Pa]
$f_{b,90,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a flexión perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{t,90,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a tracción perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{c,90,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a compresión perpendicular a la fibra [Pa]
$f_{eqv,d}$	Valor de cálculo de la resistencia equivalente [Pa]
$f_{xy,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a cortante en el plano de la placa [Pa]
$f_{v,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a cortante [Pa]
$f_{R,d}$	Valor de cálculo de la resistencia a cortante de rodadura [Pa]

2.2 Modelado de la estructura multicapa

RF-LAMINATE está basado en la teoría de placas. El cálculo según esta teoría tiene sus límites en el caso de placas con espesores considerables. Con la relación $t/L \leq 0{,}05$ se da un criterio de aproximación para el cálculo válido según la teoría de placas, donde t es el espesor y L es la longitud del lado de la placa (o la dimensión característica del modelo). Si no se cumple la relación $t/L \leq 0{,}05$, se debería considerar el modelo de elementos sólidos.

Otro problema en el modelado de estructuras multicapa surge cuando las rigideces de las capas difieren significativamente. Un ejemplo extremo es un elemento laminado de tres capas que conste de un núcleo de espuma rodeado por dos láminas delgadas de metal (véase la Figura 2.1). En este caso, el cortante juega un papel importante. La línea que conecta los puntos deformados ya no es recta (véase la Figura 2.2). Entonces la teoría de placas 2D produce resultados incorrectos. En su lugar se recomienda usar el modelo de elementos sólidos en RFEM.

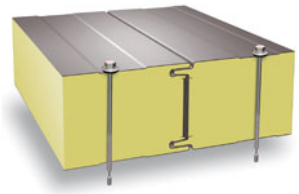


Figura 2.1: Elemento laminado de tres capas

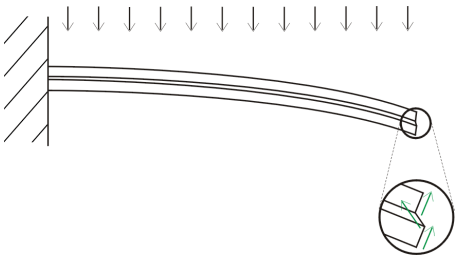
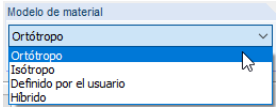


Figura 2.2: Distorsión por cortante

2.3 Modelos de material



Como ya se mencionó en la introducción, en RF-LAMINATE usted puede crear capas individuales de una estructura de cualquier material y de modelos de material diferentes. Están disponibles los siguientes modelos de material:

- *Ortótropo*
- *Isótropo*
- *Definido por el usuario*
- *Híbrido*

2.3.1 Ortótropo

Las propiedades de un material ortótropo son distintas en cada una de las direcciones. Por lo tanto, se define el material usando dos módulos de elasticidad (E_x, E_y), tres módulos de cortante (G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}) y dos coeficientes de Poisson (ν_{xy}, ν_{yx}).

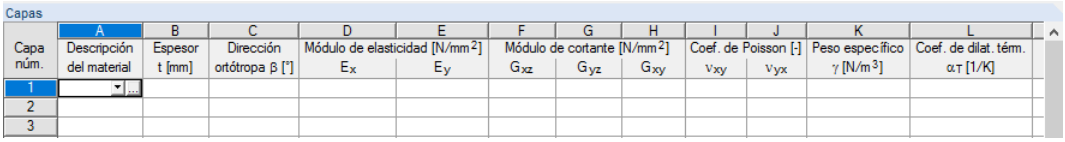


Figura 2.3: Modelo de material ortótropo

Los módulos de elasticidad y los módulos de cortante deben cumplir: $E_x \geq 0$, $E_y \geq 0$, $G_{yz} \geq 0$, $G_{xz} \geq 0$, $G_{xy} \geq 0$. La matriz de rigidez global ***D*** tiene que definirse positiva.

Tenga en cuenta que al contrario del modelo de material isótropo, donde los valores E, G y ν dependen mutuamente según la Ecuación 2.14, no existe tal relación para el modelo de material ortótropo. Los valores de E_x, E_y, ν_{xy} y G_{xy} son totalmente independientes entre sí.

Los módulos de elasticidad y los coeficientes de Poisson tienen la siguiente relación entre sí:

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \tag{2.1}$$

Los paneles de madera contralaminada (CLT) o chapas de metal laminadas son ejemplos de material ortótropo.

Al definir un material ortótropo, en teoría hay dos formas de cómo definir los coeficientes de Poisson. La forma usada en RFEM se describe en la Ecuación 2.1 y se caracteriza por la relación

$$\nu_{xy} > \nu_{yx} \tag{2.2}$$

en el caso de que la fibra vaya en dirección x', que es $E_x > E_y$. En publicaciones, a veces también puede encontrar la segunda forma de cómo definir los coeficientes de Poisson. Permítanos denotar aquellos coeficientes con líneas encima. Para ellos, se supone la ecuación $\overline{\nu}_{yx}/E_x = \overline{\nu}_{xy}/E_y$ conduciendo hacia la desigualdad $\overline{\nu}_{xy} < \overline{\nu}_{yx}$. Si usted toma las propiedades de material ortótropo a partir de un documento determinado, puede buscar fácilmente la definición de ortotropía aplicada a partir de la desigualdad de ambos coeficientes de Poisson.

En la práctica, se toman los parámetros de material de las normas. Por ejemplo, los valores de la madera de coníferas de clase resistente C24 se dan en EN 338, Tabla 1.

$$\begin{aligned} E_{0,\text{media}} &= 11\,000\ \text{N/mm}^2 \\ E_{90,\text{media}} &= 370\ \text{N/mm}^2 \\ G_{\text{media}} &= 690\ \text{N/mm}^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se asume de forma predeterminada que la fibra vaya en dirección x'. En este caso, los valores representan

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0,\text{media}} \\ E_y &= E_{90,\text{media}} \\ G_{xy} &= G_{xz} = G_{\text{media}} \\ G_{yz} &= \frac{G_{\text{media}}}{10} \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde G_{yz} es el módulo de cortante correspondiente a la tensión tangencial por rodadura.

Si los coeficientes de Poisson no se encuentran disponibles, es posible usar los valores $\nu_{vx} = \nu_{xv} = 0$. Otra posibilidad es aproximar los valores según las fórmulas de HUBER ([1]).

$$\begin{aligned} \nu_{xy} &\approx \left(\frac{\sqrt{E_x E_y}}{2G_{xy}} - 1 \right) \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \\ \nu_{yx} &\approx \left(\frac{\sqrt{E_x E_y}}{2G_{xy}} - 1 \right) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para la madera de coníferas C24 mencionada anteriormente usted obtiene

$$\begin{aligned} E_x &= 11\,000 \text{ MPa} \\ E_y &= 370 \text{ MPa} \\ G_{xy} &= G_{xz} = 690 \text{ MPa} \\ G_{yz} &= 69 \text{ MPa} \\ \nu_{xy} &\approx \left(\frac{\sqrt{11\,000 \cdot 370}}{2 \cdot 690} - 1 \right) \sqrt{\frac{11\,000}{370}} = 2{,}52 \\ \nu_{yx} &\approx \left(\frac{\sqrt{11\,000 \cdot 370}}{2 \cdot 690} - 1 \right) \sqrt{\frac{370}{11\,000}} = 0{,}08 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ejemplo

Permítanos darle un ejemplo que ilustre la relevancia de los coeficientes de Poisson para los materiales ortótropos.

Consideramos la tensión del plano de una placa plana de dimensiones 1 m $\times$1 m. En el caso de la condición de tensiones del plano para un material ortótropo homogéneo, la ley de HOOKE adopta la forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Además, consideramos las condiciones de tensión sin la tensión tangencial ($\tau_{xy} = 0$). Entonces la Ecuación 2.7 implica que $\gamma_{xy} = 0$. La matriz se puede simplificar a la forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

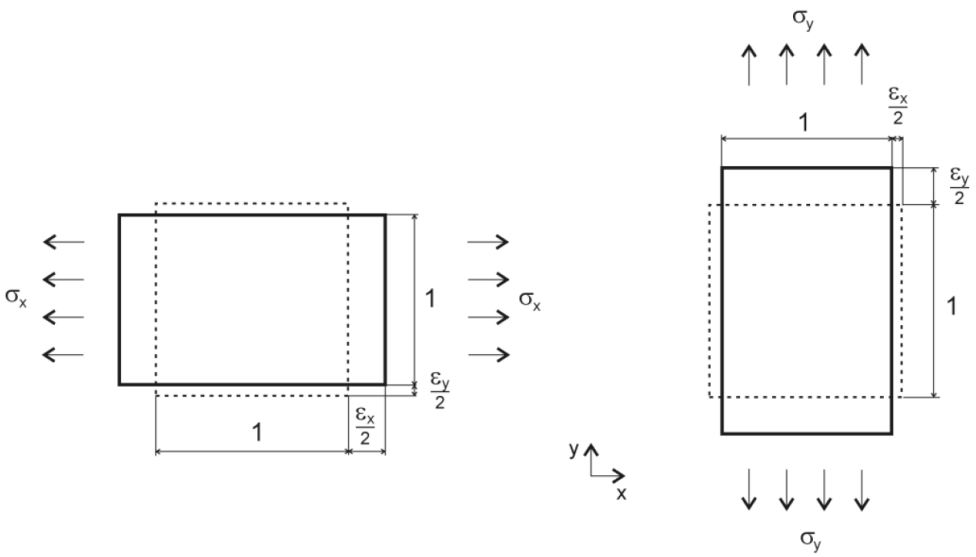


Figura 2.4: Tensión del plano de la placa en dirección *x* y en dirección *y*

En primer lugar, consideramos la tensión en dirección *x*, donde se da la tensión con la relación $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = 0$. Con la sustitución de la Ecuación 2.8, obtenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \qquad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\,\sigma_x$$

Combinando la Ecuación 2.9 y la Ecuación 2.1, obtenemos la relación para el coeficiente de Poisson ν_{xy}:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad (2.10)$$

Procedemos en consecuencia para la tensión en dirección *y*, donde se da la tensión con la relación $\sigma_x = 0$, $\sigma_y \neq 0$. Con la sustitución de la Ecuación 2.8, obtenemos

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}\,\sigma_y \qquad (2.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}$$

Combinando la Ecuación 2.11 y la Ecuación 2.1, obtenemos la relación para el coeficiente de Poisson ν_{yx}:

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \qquad (2.12)$$

La Ecuación 2.10 y la Ecuación 2.12 se pueden interpretar como sigue: el coeficiente de Poisson ν_{ij} es igual al coeficiente de retracción negativo en dirección *j* en la extensión en dirección *i*.

El caso de la tensión combinada se puede describir mediante la Ecuación 2.8. Se puede convertir a la siguiente forma esquemática:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{yx} \\ -\nu_{xy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{E_x} \\ \frac{\sigma_y}{E_y} \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

© Dlubal Software 2017

2.3.2 Isótropo

Un material isótropo tiene propiedades mecánicas idénticas en todas las direcciones. El material está definido por el módulo de elasticidad E, el módulo de cortante G y el coeficiente de Poisson ν.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Módulo de elast. E [N/mm²]	E Módulo de cortante G [N/mm²]	F Coef. de Poisson ν [-]	G Peso específico γ [N/m³]	H Coef. de dilat. térm. α_T	I Comentario
1									
2									
3									

Figura 2.5: Modelo de material isótropo

El módulo de elasticidad y el módulo de cortante deben cumplir $E \geq 0$, $G \geq 0$. La matriz de rigidez global $\boldsymbol{D}$ tiene que definirse positiva.

Algunos ejemplos de materiales isótropos son el vidrio o el acero. Para el módulo de elasticidad E, el módulo de cortante G y el coeficiente de Poisson ν, se aplica la siguiente relación:

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{2.14}$$

El valor del coeficiente de Poisson en el intervalo $\langle -0{,}999, 0{,}5 \rangle$, donde el valor límite $\nu = 0{,}5$ corresponde al material voluminoso e incompresible (p.ej. el caucho).

2.3.3 Definido por el usuario

El modelo de material definido por el usuario hace posible que se introduzcan directamente los elementos de la matriz de rigidez de las capas particulares. Para calcular los elementos de cortante de la matriz de rigidez global, necesita rellenar también los módulos de cortante G_{xz} y G_{yz}.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}
1											
2											
3											

Figura 2.6: Modelo de material definido por el usuario

Los elementos de la matriz de rigidez y los módulos de cortante deben cumplir: $d'_{11} \geq 0$, $d'_{22} \geq 0$, $d'_{33} \geq 0$, $G_{xz} \geq 0$ y $G_{yz} \geq 0$. La matriz de rigidez global $\boldsymbol{D}$ tiene que definirse positiva.

2.3.4 Híbrido

Un modelo de material híbrido permite la combinación de capas isótropas y ortótropas.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Modelo de material	D Espesor t [mm]	E Dirección ortótropa β [°]	F Módulo de elasticidad [N/mm²] E	G E_y	H Módulo de cortante [N/mm²] G	I G_{yz}	J G_{xy}	K Coef. de Poisson [-] ν	L ν_{yx}
1												
2			Ortótropo									
3			Isótropo									
4			Definido por el usuario									

Figura 2.7: Modelo de material híbrido

La matriz de rigidez global $\boldsymbol{D}$ tiene que definirse positiva.

Un material compuesto de madera con hormigón es un ejemplo de material híbrido.

2.4 Matriz de rigidez

2.4.1 Con consideración del acoplamiento a cortante

Consideramos una placa que consta de n capas de un material ortótropo en general. Cada capa tiene el espesor t_i y las coordenadas z mínimas y máximas $z_{mín,i}$, $z_{máx,i}$.

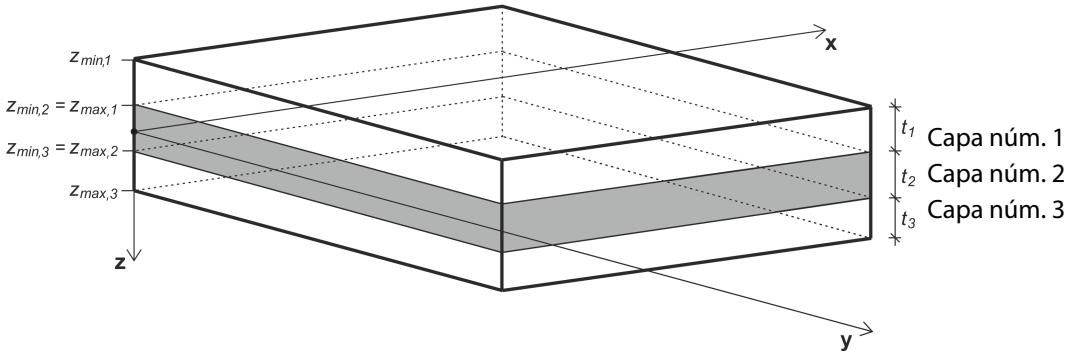


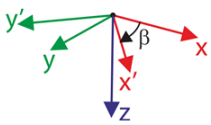
Figura 2.8: Esquema de capas

La matriz de rigidez para cada capa $\boldsymbol{d}_i'$ (matriz de rigidez plana) se calcula de acuerdo con la siguiente relación, usando los módulos de elasticidad, el módulo de cortante y el coeficiente de Poisson para cada capa.

$$\boldsymbol{d}_i' = \begin{bmatrix} d'_{11,i} & d'_{12,i} & 0 \\ & d'_{22,i} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{x,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & \dfrac{\nu_{xy,i}\, E_{y,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ \text{sim.} & & G_{xy,i} \end{bmatrix} \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.15}$$

Para los materiales isótropos, donde se aplica $E_{x,i} = E_{y,i}$, la matriz de rigidez tiene la forma simplificada

$$\boldsymbol{d}_i' = \begin{bmatrix} d'_{11,i} & d'_{12,i} & 0 \\ & d'_{22,i} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & \dfrac{\nu_i E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ & \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ \text{sim.} & & G_i \end{bmatrix} \quad i = 1,\ldots,n \;\; \text{donde } G_i = \frac{E_i}{2\,(1+\nu_i)} \tag{2.16}$$



Debido a que las capas con materiales ortótropos se pueden girar arbitrariamente un ángulo β, es necesario transformar las matrices de rigidez de las capas individuales a un sistema de coordenadas uniforme x, y (p.ej. el sistema de coordenadas local de una superficie).

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} d_{11,i} & d_{12,i} & d_{13,i} \\ & d_{22,i} & d_{23,i} \\ \text{sim.} & & d_{33,i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{3\times3,i}^T\, d_i'\, T_{3\times3,i} \tag{2.17}$$

donde

$$\boldsymbol{T}_{3\times3,i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad c = \cos(\beta_i)\,,\, s = \text{sen}\,(\beta_i) \tag{2.18}$$

Los elementos individuales entonces son

$$d_{11,i} = c^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + s^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{12,i} = c^2s^2 d'_{11,i} + s^4 d'_{12,i} + c^4 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} - 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{13,i} = c^3s d'_{11,i} + cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{22,i} - 2c^3s d'_{33,i} + 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{22,i} = s^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{23,i} = cs^3 d'_{11,i} + c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{22,i} + 2c^3s d'_{33,i} - 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{33,i} = c^2s^2 d'_{11,i} - 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{33,i}$$

La matriz de rigidez global es

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sim.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sim.} & \text{sim.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sim.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sim.} & \text{sim.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

- Flexión y torsión
- Cortante
- Membrana
- Excentricidad

Si los ángulos β_i son múltiplos de 90 °, la matriz de rigidez global tiene la forma simplificada

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & \text{sim.} & D_{27} & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{38} \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Elementos de la matriz de rigidez: flexión y torsión [Nm]

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{11,i} \quad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{12,i} \quad D_{13} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{13,i}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{22,i} \quad D_{23} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{23,i}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{33,i}$$

En caso de una placa de capas individuales de espesor *t*, las relaciones introducidas conducen a la relación familiar

$$D_{ij} = \sum_{i=1}^{n=1} \frac{z_{max,i}^3 - z_{mín,i}^3}{3} d_{ij,i} = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3 - \left(-\frac{t}{2}\right)^3}{3} d_{ij,1} = \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3} d_{ij,1} = \frac{t^3}{12} d_{ij,1} \qquad i,j = 1,2,3$$

Elementos de la matriz de rigidez: efectos de excentricidad [Nm/m]

$$D_{16} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{11,i} \quad D_{17} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{12,i} \quad D_{18} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{13,i}$$

$$D_{27} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{22,i} \quad D_{28} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{23,i}$$

$$D_{38} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{máx,i}^2 - z_{mín,i}^2}{2} d_{33,i}$$

Los elementos de la matriz de rigidez de la excentricidad son distintos de cero para composiciones de capas asimétricas, p.ej. una composición de dos capas de idéntico material ortótropo para cada capa donde la segunda capa se gira 90 ° ($\beta_1 = 0$ °, $\beta_2 = 90$ °).

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}
1	C24	Madera maciza	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	69.0	690.0	0.000	0.000
2	C24	Madera maciza	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	69.0	690.0	0.000	0.000

Figura 2.9: Composición de capa asimétrica

Para las composiciones de capas simétricas, la matriz de rigidez de la excentricidad vale cero.

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}
1	C24	Madera maciza	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	69.0	690.0	0.000	0.000
2	C24	Madera maciza	40.0	90.00	11000.0	370.0	690.0	69.0	690.0	0.000	0.000
3	C24	Madera maciza	40.0	0.00	11000.0	370.0	690.0	69.0	690.0	0.000	0.000

Figura 2.10: Composición de capa simétrica

La flexión y los elementos de la matriz de rigidez de la membrana se acoplan a través de los elementos de la matriz de rigidez de la excentricidad. La carga de flexión pura produce esfuerzos internos distintos de cero n_x, n_y, n_{xy}, y viceversa. La carga de la membrana pura produce momentos internos distintos de cero m_x, m_y, m_{xy}.

Por lo tanto, no se pueden calcular modelos 2D (plano XY, plano XZ, plano YZ) en RF-LAMINATE, ya que sólo se usan elementos de rigidez de la membrana o elementos de rigidez por flexión. El tipo de modelo tiene que establecerse en **3D** en el cuadro de diálogo *Datos generales* de RFEM.

Elementos de la matriz de rigidez: membrana [N/m]

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{11,i} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{12,i} \qquad D_{68} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{13,i}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{22,i} \qquad D_{78} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{23,i}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{33,i}$$

Elementos de la matriz de rigidez: cortante [N/m]

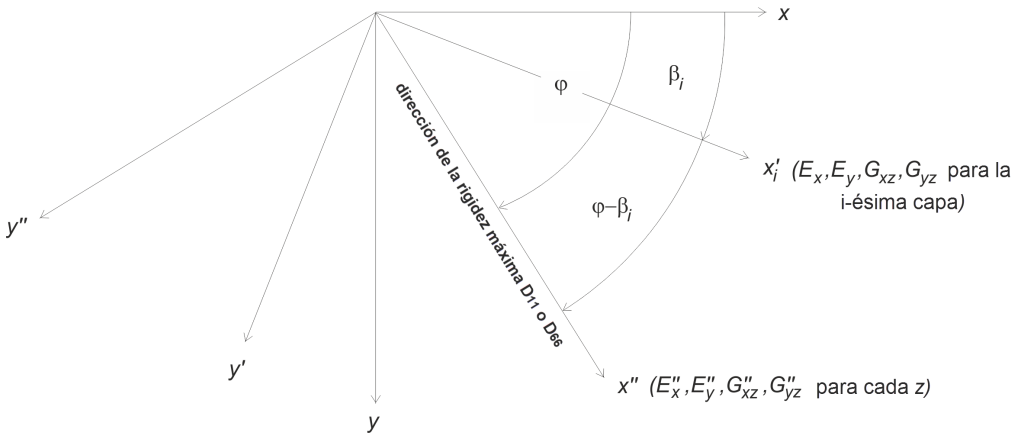


Figura 2.11: Cálculo de los elementos de la matriz transversal

Los elementos de la matriz de rigidez a cortante se calculan de acuerdo con el siguiente algoritmo.

1. Busque la dirección de la rigidez máxima y el sistema de coordenadas correspondiente x'', y''. El ángulo entre los ejes x y x'' está denotado por φ.

2. Transforme las rigideces por cortante transversales $G_{xz,i}$, $G_{yz,i}$ para cada capa del sistema de coordenadas x', y' al sistema de coordenadas x'', y'' con el fin de obtener $G''_{xz,i}$, $G''_{yz,i}$.

$$G''_{xz,i} = \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \mathrm{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \tag{2.22}$$

$$G''_{yz,i} = \mathrm{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \quad i = 1,\ldots,n$$

3. Transforme la matriz de rigidez plana $\boldsymbol{d}'_i$ para cada capa del sistema de coordenadas x', y' al sistema de coordenadas x'', y'' con el fin de obtener la matriz de rigidez plana $\boldsymbol{d}''_i$.

$$\boldsymbol{d}''_i = \boldsymbol{T}^{-T}_{3\times3,i}\boldsymbol{d}'_i\boldsymbol{T}^{-1}_{3\times3,i} \tag{2.23}$$

donde

$$\boldsymbol{T}_{3\times3,i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{donde } c = \cos(\varphi - \beta_i),\ s = \mathrm{sen}(\varphi - \beta_i),\ \ i = 1,\ldots,n \tag{2.24}$$

De la matriz de rigidez $\boldsymbol{d}''_i$, se extraen los módulos de Young $E''_{x,i}$, $E''_{y,i}$.

$$E''_{x,i} = d''_{11,i} + \frac{2d''_{12,i}d''_{13,i}d''_{23,i} - d''_{22,i}\left(d''_{13,i}\right)^2 - d''_{33,i}\left(d''_{12,i}\right)^2}{d''_{22,i}d''_{33,i} - \left(d''_{23,i}\right)^2} \tag{2.25}$$

$$E''_{y,i} = d''_{22,i} + \frac{2d''_{12,i}d''_{13,i}d''_{23,i} - d''_{11,i}\left(d''_{23,i}\right)^2 - d''_{33,i}\left(d''_{12,i}\right)^2}{d''_{11,i}d''_{33,i} - \left(d''_{13,i}\right)^2} \tag{2.26}$$

© Dlubal Software 2017

4. En el sistema de coordenadas x'', y'', calcule $D''_{44,\text{cálc}}$, $D''_{55,\text{cálc}}$ de acuerdo con la fórmula integral de GRASHOFF y considere $D''_{45} = 0$.

$$D''_{44,\text{cálc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G''_{xz}(z)} \left(\frac{\displaystyle\int_{z}^{t/2} E''_x(\bar{z})\left(\bar{z} - z_{0,x}\right) d\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\left(\bar{z} - z_{0,x}\right)^2 d\bar{z}} \right)^2 dz}, \quad z_{0,x} = \frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,\bar{z}\,d\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,d\bar{z}} \tag{2.27}$$

$$D''_{55,\text{cálc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G''_{yz}(z)} \left(\frac{\displaystyle\int_{z}^{t/2} E''_y(\bar{z})\left(\bar{z} - z_{0,y}\right) d\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\left(\bar{z} - z_{0,y}\right)^2 d\bar{z}} \right)^2 dz}, \quad z_{0,y} = \frac{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,\bar{z}\,d\bar{z}}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,d\bar{z}} \tag{2.28}$$

Los valores de las rigideces D''_{44}, D''_{55} se dan con las siguientes ecuaciones:

$$D''_{44} = \text{máx}\left(D''_{44,\text{cálc}}, \frac{48}{5\ell^2} \frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i} \dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i} \dfrac{z_{\text{máx},i}^3 - z_{\text{mín},i}^3}{3}}} \right) \tag{2.29}$$

$$D''_{55} = \text{máx}\left(D''_{55,\text{cálc}}, \frac{48}{5\ell^2} \frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i} \dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i} \dfrac{z_{\text{máx},i}^3 - z_{\text{mín},i}^3}{3}}} \right) \tag{2.30}$$

donde ℓ es la longitud principal de las líneas que rodean a la superficie como un "cajón".

5. Transforme los valores D''_{44}, D''_{55} del sistema de coordenadas x'', y'' al anterior sistema de coordenadas x, y (sistema de coordenadas local de la superficie) con el fin de obtener las rigideces D_{44}, D_{55}, D_{45}.

$$\begin{aligned} D_{44} &= \cos^2(\varphi)\, D''_{44} + \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{55} \\ D_{55} &= \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{44} + \cos^2(\varphi)\, D''_{55} \\ D_{45} &= \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\left(D''_{44} - D''_{55}\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.4.2 Sin consideración del acoplamiento a cortante

Examinaremos una placa que consta de n capas de materiales isótropos. Las capas individuales no están acopladas frente a cortante. Cada capa tiene el espesor t_i y las coordenadas z máximas y mínimas $z_{mín,i}$, $z_{máx,i}$.

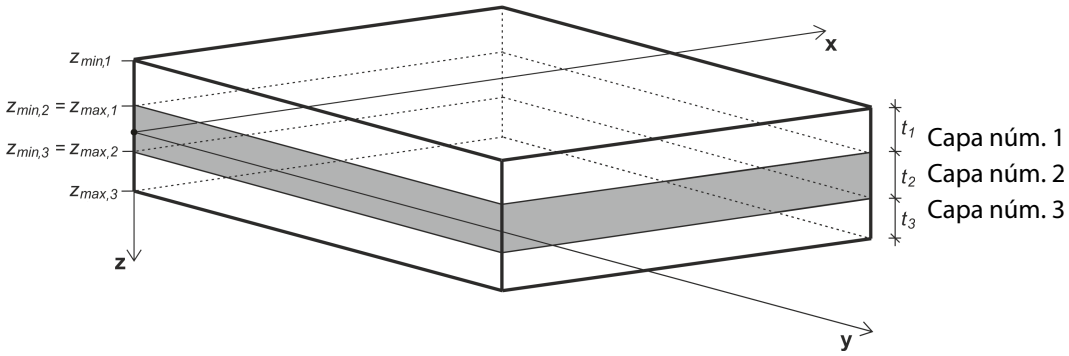


Figura 2.12: Esquema de capas

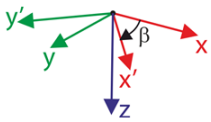
La matriz de rigidez para cada capa $\boldsymbol{d}_i'$ está conforme a la siguiente relación.

$$\boldsymbol{d}_i' = \begin{bmatrix} d'_{11,i} & d'_{12,i} & 0 \\ & d'_{22,i} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{x,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & \dfrac{\nu_{xy,i}\, E_{y,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy,i}^2 \dfrac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ \text{sim.} & & G_{xy,i} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\ldots,n \quad (2.32)$$

Para los materiales isótropos, donde se aplica $E_{x,i} = E_{y,i}$, la matriz de rigidez tiene la forma simplificada

$$\boldsymbol{d}_i' = \begin{bmatrix} d'_{11,i} & d'_{12,i} & 0 \\ & d'_{22,i} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & \dfrac{\nu_i\, E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ & \dfrac{E_i}{1-\nu_i^2} & 0 \\ \text{sim.} & & G_i \end{bmatrix}, \qquad G_i = \frac{E_i}{2\,(1+\nu_i)}, \qquad i = 1,\ldots,n$$

(2.33)



Debido a que las capas con materiales ortótropos se pueden girar arbitrariamente un ángulo β, es necesario transformar las matrices de rigidez de las capas individuales a un sistema de coordenadas uniforme x, y (p.ej. el sistema de coordenadas local de una superficie).

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} d_{11,i} & d_{12,i} & d_{13,i} \\ & d_{22,i} & d_{23,i} \\ \text{sim.} & & d_{33,i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{3\times3,i}^T\, \boldsymbol{d}_i'\, \boldsymbol{T}_{3\times3,i} \qquad (2.34)$$

donde

$$\boldsymbol{T}_{3\times3,i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \quad \text{donde } c = \cos(\beta_i)\,,\, s = \operatorname{sen}(\beta_i) \qquad (2.35)$$

Los elementos individuales entonces son

$$d_{11,i} = c^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + s^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{12,i} = c^2s^2 d'_{11,i} + s^4 d'_{12,i} + c^4 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} - 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{13,i} = c^3s d'_{11,i} + cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{22,i} - 2c^3s d'_{33,i} + 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{22,i} = s^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{23,i} = cs^3 d'_{11,i} + c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{22,i} + 2c^3s d'_{33,i} - 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{33,i} = c^2s^2 d'_{11,i} - 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{33,i}$$

La matriz de rigidez global es

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Flexión y torsión

Cortante

Membrana

Si los ángulos β_i son múltiplos de 90 °, la matriz de rigidez global tiene la forma simplificada

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Elementos de la matriz de rigidez: flexión y torsión [Nm]

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{11,i} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{12,i}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{22,i}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{33,i}$$

Elementos de la matriz de rigidez: membrana [N/m]

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{11,i} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{12,i}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{22,i}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{33,i}$$

Elementos de la matriz de rigidez: cortante [N/m]

Los elementos de la matriz de rigidez a cortante se calculan de acuerdo con el siguiente algoritmo.

1. Busque la dirección de la rigidez máxima y el sistema de coordenadas correspondiente x'', y''. El ángulo entre los ejes x y x'' está denotado por φ.

2. Transforme las rigideces por cortante transversales G_{xz}, G_{yz} para cada capa del sistema de coordenadas x', y' al sistema de coordenadas x'', y'' con el fin de obtener $G''_{xz,i}$, $G''_{yz,i}$.

$$G''_{xz,i} = \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \text{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \tag{2.39}$$

$$G''_{yz,i} = \text{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

3. En el sistema de coordenadas x'', y'', calcule D''_{44}, D''_{55} y considere $D''_{45} = 0$.

$$D''_{44} = \frac{5}{6} \sum_{i=1}^{n} G''_{xz,i} t_i \tag{2.40}$$

$$D''_{55} = \frac{5}{6} \sum_{i=1}^{n} G''_{yz,i} t_i \tag{2.41}$$

4. Transforme los valores D''_{44}, D''_{55} del sistema de coordenadas x'', y'' al anterior sistema de coordenadas x, y (sistema de coordenadas local de la superficie) con el fin de obtener las rigideces D_{44}, D_{55}, D_{45}.

$$\begin{aligned} D_{44} &= \cos^2(\varphi)\, D''_{44} + \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{55} \\ D_{55} &= \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{44} + \cos^2(\varphi)\, D''_{55} \\ D_{45} &= \text{sen}(\varphi) \cos(\varphi) \left(D''_{44} - D''_{55}\right) \end{aligned} \tag{2.42}$$

© Dlubal Software 2017

3 Datos de entrada

Cuando inicia RF-LAMINATE, aparece una nueva ventana. En esta ventana, se visualiza un navegador a la izquierda. Gestiona las ventanas y tablas de todos los datos de entrada.

Para seleccionar una ventana, haga clic en la entrada correspondiente en el navegador. Para establecer la ventana de entrada anterior o siguiente, use los botones que se muestran a la izquierda. También puede usar las teclas de función para seleccionar la ventana siguiente [F2] o anterior [F3].

Detalles...

Al hacer clic en el botón [Detalles], aparece un cuadro de diálogo donde puede especificar las tensiones y ventanas de resultados para mostrar (véase el Capítulo 4.1, página 37).

Norma

El botón [Norma] abre un cuadro de diálogo que controla los factores de seguridad y modificación de la norma seleccionada (véase el Capítulo 4.2, página 46).

Aceptar Cancelar

Al [Aceptar] se guardan los datos introducidos (y los resultados, en caso de cálculo). De este modo, sale de RF-LAMINATE y regresa al programa principal RFEM. Para salir del módulo sin guardar ningún cambio haga clic en [Cancelar].

3.1 Datos generales

En la ventana *1.1 Datos generales*, puede seleccionar las superficies y acciones que desee para el cálculo. Las dos pestañas gestionan los casos de carga, las combinaciones de carga y de resultados para el análisis del ELU y ELS.

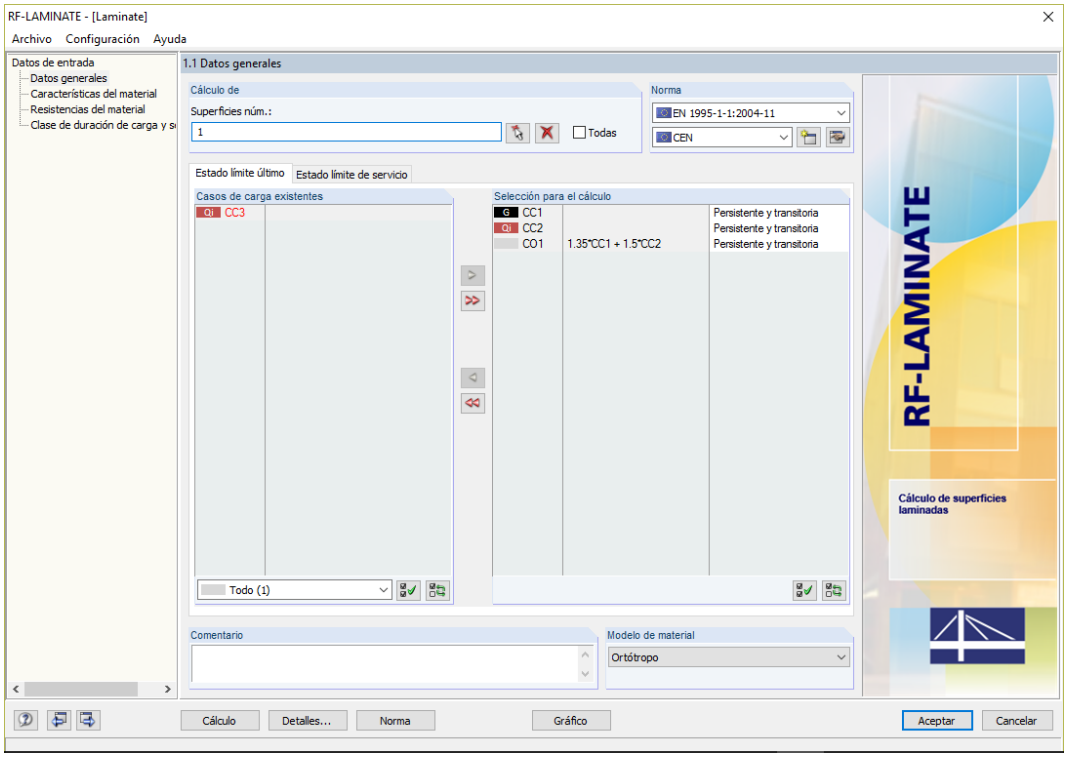


Figura 3.1: Ventana 1.1 *Datos generales*

Cálculo de

Si desea calcular sólo *Superficies* específicas, vacíe la casilla de verificación *Todas*. Luego puede acceder a la casilla de texto e introducir los números de las superficies relevantes. Puede quitar la lista de números con el botón [Eliminar]. Use el botón [Seleccionar] para las superficies de los objetos gráficamente en la ventana de trabajo de RFEM.

Norma

En la lista de menú desplegable en la esquina superior derecha de la ventana, puede seleccionar la norma cuyos parámetros son relevantes para el cálculo y cuyos valores límite de flecha se van a aplicar.

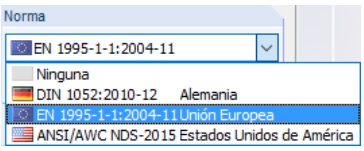


Figura 3.2: Lista de normas

Para EN 1995-1-1 [2], es posible seleccionar el Anejo Nacional de la lista siguiente.

Figura 3.3: Lista de Anejos Nacionales

Norma

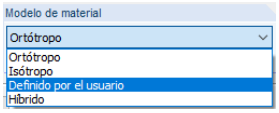
Use el botón [Editar] para abrir el cuadro de diálogo donde puede comprobar y, en caso necesario, ajustar los parámetros de la norma o el Anejo Nacional seleccionado. Este cuadro de diálogo se describe en el Capítulo 4.2 en la página 46. También puede hacer clic en el botón [Norma] que abre el cuadro de diálogo *Norma*. Este botón está disponible en todas las ventanas.

Para crear una norma o un Anejo Nacional definidos por el usuario, haga clic en el botón [Nuevo].

Comentario

En este cuadro de texto en la parte inferior de la ventana, puede introducir notas o explicaciones adicionales.

Modelo de material



En esta sección, usted selecciona el modelo de material. Se encuentran disponibles los siguientes modelos de material:

- *Ortótropo*
- *Isótropo*
- *Definido por el usuario*
- *Híbrido*

Los modelos de material se describen en el Capítulo 2.2 en la página 7.

3.1.1 Estado límite último

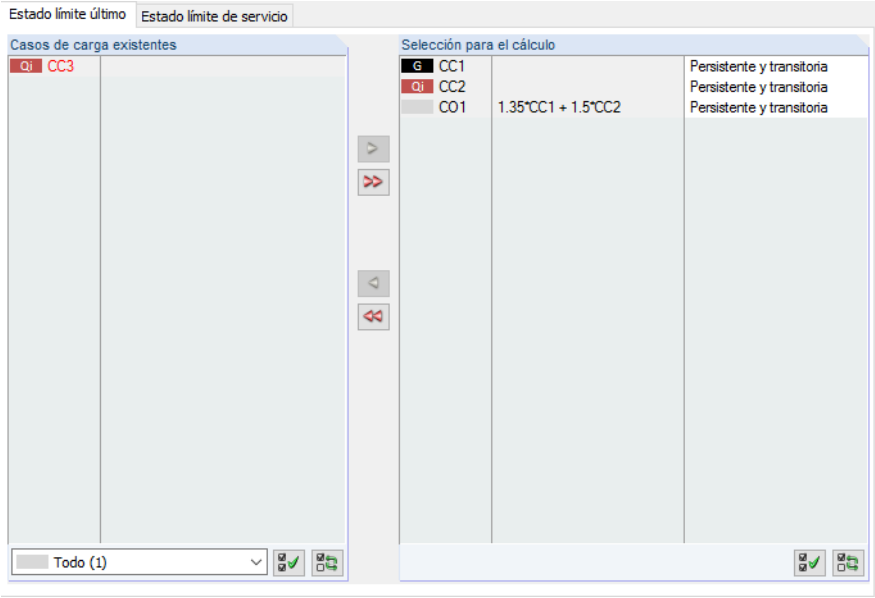


Figura 3.4: Ventana *1.1 Datos generales*, pestaña *Estado límite último*

Casos de carga existentes

Esta columna enuncia todos los casos de carga, combinaciones de carga y de resultados que se han creado en RFEM.

Use el botón > para transferir las entradas seleccionadas para la tabla de la derecha *Selección para el cálculo*. Como alternativa, puede hacer doble clic sobre las entradas. Para transferir la lista completa de la derecha, use el botón >>.

Para añadir entradas múltiples de casos de carga, haga clic sobre las entradas mientras presiona la tecla [Ctrl], como es común para aplicaciones de Windows. De este modo, puede transferir varios casos de carga al mismo tiempo.

Los casos de carga marcados en rojo no se pueden calcular (véase la Figura 3.4): esto ocurre cuando los casos de carga se definen sin ningún dato de carga o contienen sólo imperfecciones.

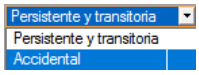
Al final de la lista, se encuentran disponibles varias opciones de filtro. Le ayudarán a asignar las entradas ordenadas por caso de carga, combinación de carga o categoría de acciones. Los botones tienen las siguientes funciones:

	Seleccionar todos los casos de carga en la lista
	Invertir la selección de casos de carga

Tabla 3.1: Botones en la pestaña *Estado límite último*

Selección para el cálculo

La columna de la derecha enuncia los casos de carga así como las combinaciones de carga y de resultados seleccionados para el cálculo. Use el botón < o haga doble clic sobre las entradas para quitar las entradas seleccionadas de la lista. El botón << transfiere toda la lista a la izquierda.



Puede asignar casos de carga, combinaciones de carga y de resultados a las siguientes situaciones de proyecto:

- *Persistente y transitoria*
- *Accidental*

Norma

Esta clasificación gestiona el coeficiente parcial γ_M de las propiedades del material. Puede comprobar y ajustar este coeficiente en el cuadro de diálogo *Norma* (véase el Capítulo 4.2.1, página 47).

3.1.2 Estado límite de servicio

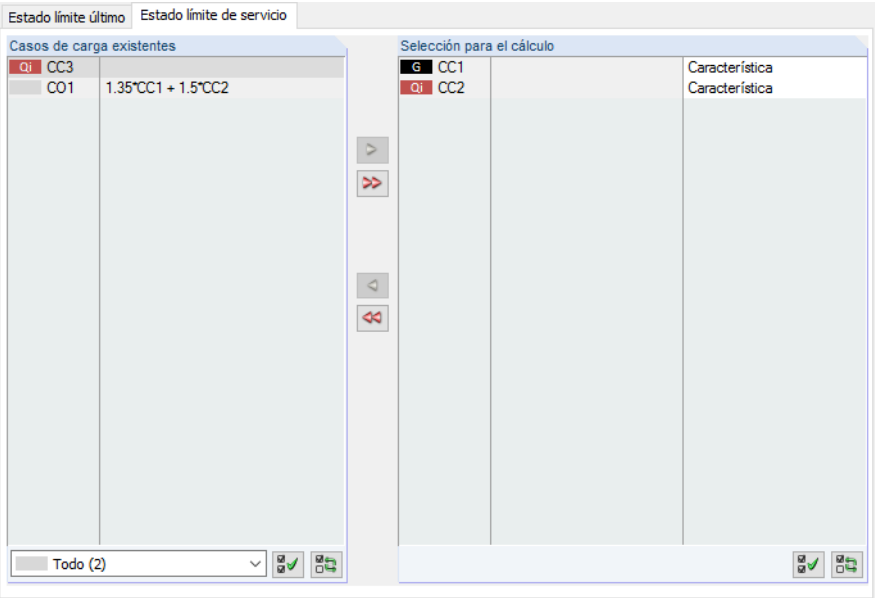


Figura 3.5: Ventana *1.1 Datos generales*, pestaña *Estado límite de servicio*

Casos de carga existentes

Esta selección enuncia todos los casos de carga, combinaciones de carga y de resultados que se han creado en RFEM.

Selección para el cálculo

Puede añadir o quitar casos de carga, combinaciones de carga y combinaciones de resultados como se describe en el Capítulo 3.1.1. Cuando se ha transferido un caso de carga, se agrega el elemento *Datos de servicio* al navegador.

Puede asignar casos de carga, combinaciones de carga y de resultados a las siguientes situaciones de proyecto:

- *Característica*
- *Frecuente*
- *Cuasipermanente*

Norma

Esta clasificación controla los valores límite que se van a aplicar para el análisis de flecha. Puede modificar los valores limite en el cuadro de diálogo *Norma* (véase el Capítulo 4.2.2, página 48).

3.2 Características del material

En esta ventana, es posible definir para las superficies las capas con los materiales respectivos.

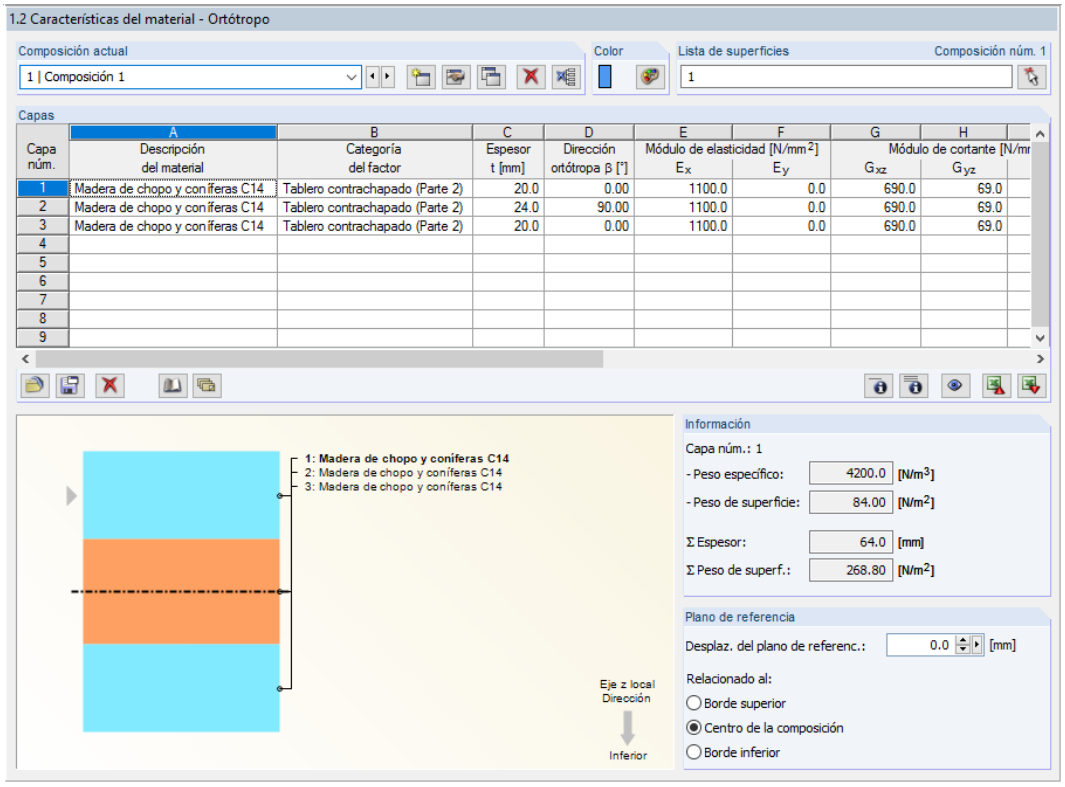


Figura 3.6: Ventana *1.2 Características del material - Ortótropo*

Composición actual

En esta sección de la ventana, se muestra la composición activa. Las capas de la composición se enumeran en la tabla siguiente. Para cada composición, se definen las capas por separado. Aquí puede crear más composiciones con varias capas.

Los botones tienen las siguientes funciones:

Botón	Función
	Crear nueva composición de capas
	Mostrar detalles de la composición actual (véase la Figura 3.15, página 29)
	Copiar composición actual
	Eliminar composición actual
	Eliminar todas las composiciones

Tabla 3.2: Botones para la *Composición actual*

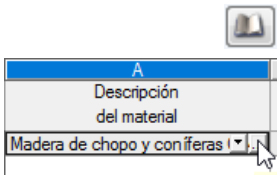
Color

Se pueden asignar colores específicos a las composiciones. Use el botón para cambiar el color de la composición actual.

Lista de superficies

Para cada composición, se pueden definir las superficies relevantes en esta sección de ventana. El botón le permite seleccionar gráficamente las superficies en la ventana de trabajo de RFEM.

Capas



En esta tabla, se van a definir las capas individuales de la composición actual. Se puede seleccionar el material de la [Biblioteca] que contiene un gran número de materiales con todos los parámetros requeridos. Puede abrir la biblioteca de materiales haciendo clic sobre el botón que se muestra a la izquierda. Como alternativa, puede situar el cursor en la línea correspondiente de la columna A y hacer clic sobre el botón ...

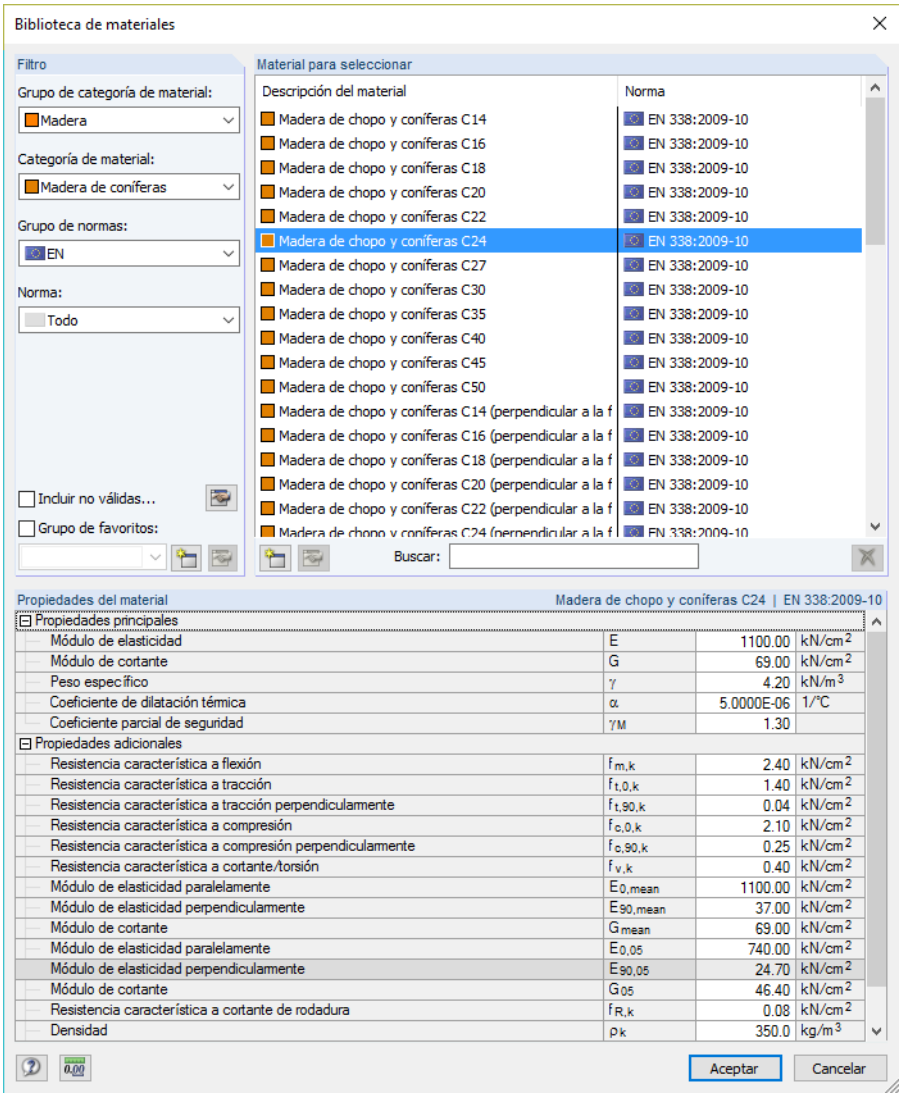


Figura 3.7: Biblioteca de materiales

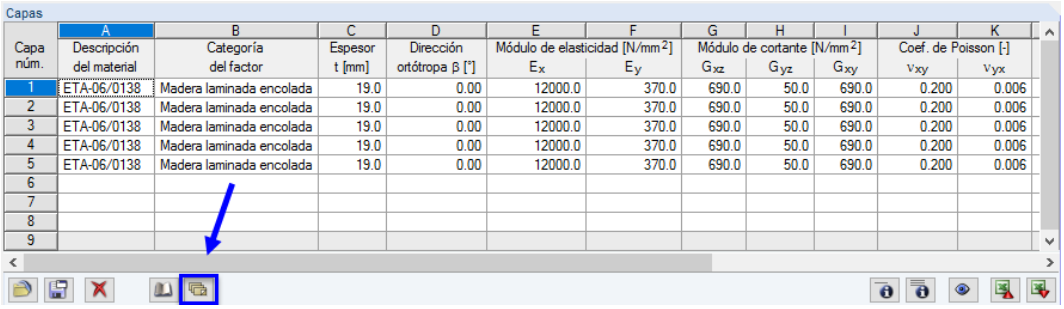
Como la biblioteca es muy extensa, se disponen de varias opciones de selección en la sección *Filtro*. Puede filtrar la lista de materiales según el *Grupo de categoría de material*, *Categoría de material*, *Grupo de normas* y *Norma*. En la lista *Material para seleccionar*, puede seleccionar el material relevante y comprobar sus parámetros en la parte inferior del cuadro de diálogo.

El Capítulo 4.3 del manual de RFEM describe cómo se pueden filtrar, añadir o reorganizar los materiales en la biblioteca.

Al hacer clic en [Aceptar], presionar la tecla [↵] o hacer doble clic sobre un material, el material se importa a la ventana *1.2 Características del material*. Luego puede ajustar todos los parámetros del material directamente en el módulo.

Composiciones de capas de fabricantes

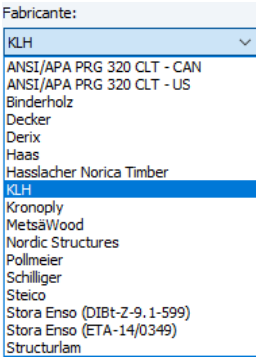
Además, se puede usar una biblioteca de capas para introducir toda la composición a la vez. Es posible acceder a la base de datos con el botón [Importar capas de la biblioteca] .



Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}
1	ETA-06/0138	Madera laminada encolada	19.0	0.00	12000.0	370.0	690.0	50.0	690.0	0.200	0.006
2	ETA-06/0138	Madera laminada encolada	19.0	0.00	12000.0	370.0	690.0	50.0	690.0	0.200	0.006
3	ETA-06/0138	Madera laminada encolada	19.0	0.00	12000.0	370.0	690.0	50.0	690.0	0.200	0.006
4	ETA-06/0138	Madera laminada encolada	19.0	0.00	12000.0	370.0	690.0	50.0	690.0	0.200	0.006
5	ETA-06/0138	Madera laminada encolada	19.0	0.00	12000.0	370.0	690.0	50.0	690.0	0.200	0.006
6											
7											
8											
9											

Figura 3.8: Botón [Importar capas de la biblioteca]

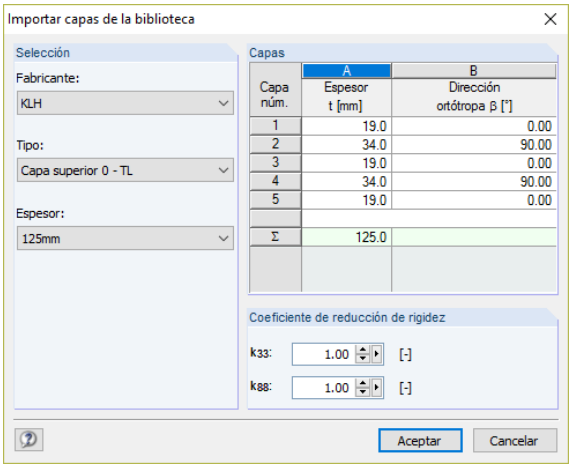


Fabricante:

KLH

ANSI/APA PRG 320 CLT - CAN
ANSI/APA PRG 320 CLT - US
Binderholz
Decker
Derix
Haas
Hasslacher Norica Timber
KLH
Kronoply
MetsäWood
Nordic Structures
Pollmeier
Schilliger
Steico
Stora Enso (DIBt-Z-9.1-599)
Stora Enso (ETA-14/0349)
Structurlam

En la biblioteca de capas, puede seleccionar el *Fabricante*, *Tipo* y *Espesor*.



Importar capas de la biblioteca

Selección

Fabricante: KLH

Tipo: Capa superior 0 - TL

Espesor: 125mm

Capas

Capa núm.	A Espesor t [mm]	B Dirección ortótropa β [°]
1	19.0	0.00
2	34.0	90.00
3	19.0	0.00
4	34.0	90.00
5	19.0	0.00
Σ	125.0	

Coeficiente de reducción de rigidez

k_{33}: 1.00 [-]

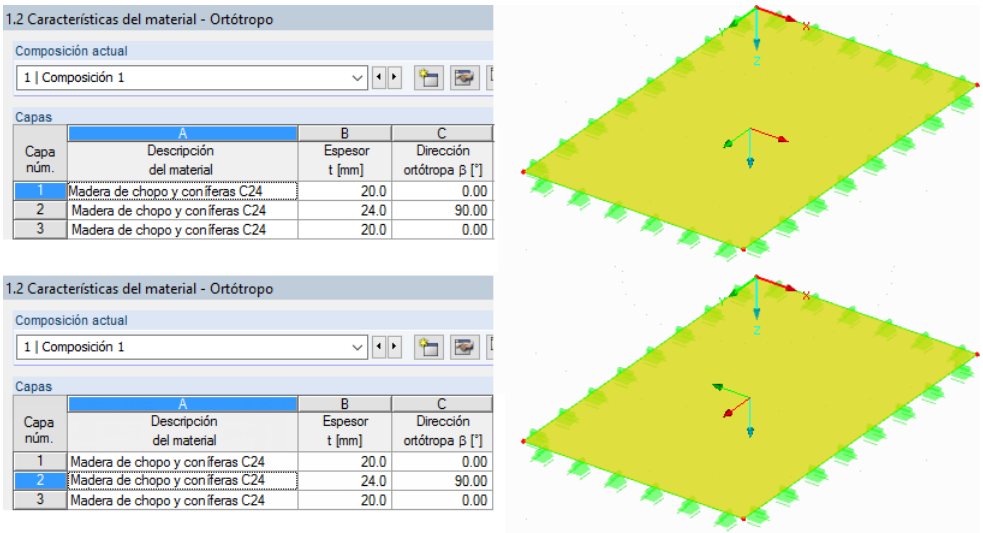
k_{88}: 1.00 [-]

Aceptar Cancelar

Figura 3.9: Cuadro de diálogo *Importar capas de la biblioteca*

Se pueden modificar, en caso necesario, los parámetros de la composición de la capa importada en la tabla *Capas*.

Cuando haya elegido el modelo ortótropo en la ventana *1.1 Datos generales*, se mostrará la dirección ortótropa β introducida en este momento en el modelo de RFEM en el fondo (véase la Figura 3.10). De este modo, puede comprobar su configuración visualmente.



1.2 Características del material - Ortótropo

Composición actual: 1 | Composición 1

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Espesor t [mm]	C Dirección ortótropa β [°]
1	Madera de chopo y coníferas C24	20.0	0.00
2	Madera de chopo y coníferas C24	24.0	90.00
3	Madera de chopo y coníferas C24	20.0	0.00

1.2 Características del material - Ortótropo

Composición actual: 1 | Composición 1

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Espesor t [mm]	C Dirección ortótropa β [°]
1	Madera de chopo y coníferas C24	20.0	0.00
2	Madera de chopo y coníferas C24	24.0	90.00
3	Madera de chopo y coníferas C24	20.0	0.00

Figura 3.10: Visualización de la dirección ortótropa β

Se encuentran disponibles varios botones debajo de la tabla *Capas*. Tienen las siguientes funciones:

Botón	Nombre	Función
	Cargar capas	Cargar la composición que se guardó anteriormente.
	Guardar capas	Guardar la composición actual como plantilla para diferentes modelos. La composición se puede volver a cargar para cualquier otra composición mediante el botón .
	Eliminar todas las capas	Eliminar todos los datos de la composición actual.
	Biblioteca de materiales	Abrir el cuadro de diálogo *Biblioteca de materiales*.
	Biblioteca de capas	Abrir el cuadro de diálogo *Importar capas de la biblioteca*.
	Matriz de capas	Mostrar los elementos de la matriz de rigidez de la capa actual. → Capítulo 2.4, página 12
	Matriz de la composición	Mostrar los elementos de la matriz de rigidez de toda la composición. → Capítulo 2.4, página 12
	Modo visualización	Pasar a la ventana de trabajo de RFEM para comprobaciones gráficas sin cerrar RF-LAMINATE.
	Exportación a Excel	Exportar la tabla actual a MS Excel u OpenOffice Calc. → Capítulo 7.2, página 63
	Importación de Excel	Importar los contenidos de una hoja de MS Excel u OpenOffice Calc para la tabla actual.

Tabla 3.3: Botones para *Capas*

Información

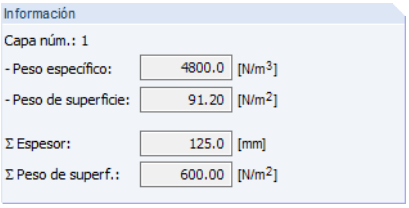


Figura 3.11: Sección *Información*

La sección *Información* debajo de la tabla ofrece información sobre el peso específico y el peso de la superficie de la capa actual, y sobre el espesor total y el peso de la superficie total de la composición actual.

Plano de referencia

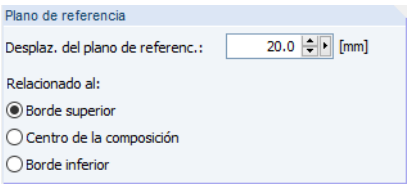


Figura 3.12: Sección *Plano de referencia*

Si la superficie está apoyada con soportes excéntricos, es posible considerar el *desplazamiento* del plano de referencia. Las excentricidades son siempre relevantes para las composiciones asimétricas.

Con el desplazamiento, se contabiliza el centro de gravedad desplazado y los apoyos por encima o por debajo de las capas.

Los elementos de la excentricidad de la matriz de rigidez (véase la Ecuación 2.20, página 13) se calculan con respecto al desplazamiento definido. El desplazamiento del plano de referencia básicamente indica el lugar donde están ubicados los apoyos. Un gráfico dinámico muestra el plano de referencia de forma que pueda comprobar la entrada.

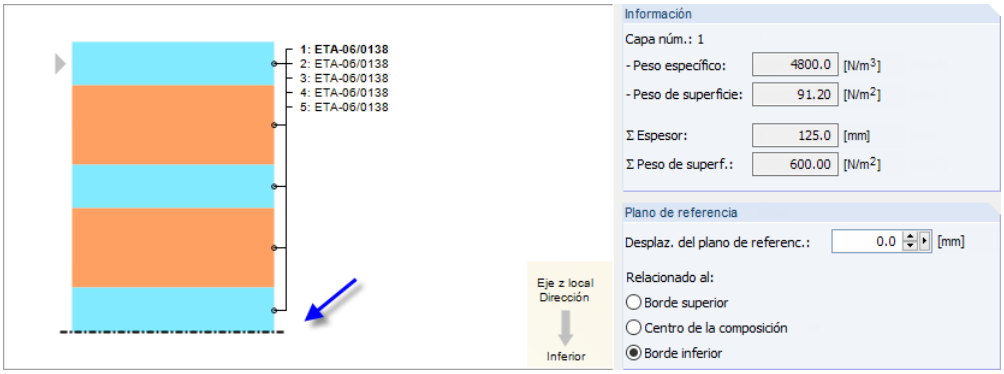


Figura 3.13: Plano de referencia desplazado hacia el *Borde inferior*

Puede comprobar los elementos modificados de la matriz de rigidez haciendo clic en el botón [Matriz de la composición]. En el cuadro de diálogo *Matriz de rigidez ampliada*, se muestran los elementos de la matriz de excentricidad.

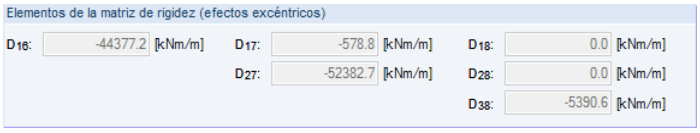


Figura 3.14: Información sobre los *Elementos de la matriz de rigidez (efectos de excentricidad)*

Detalles de la composición

Para cada composición, se encuentra disponible el cuadro de diálogo *Detalles de la composición*. Puede abrirlo haciendo clic en el botón [Editar] que está localizado a la derecha de la lista *Composición actual*.

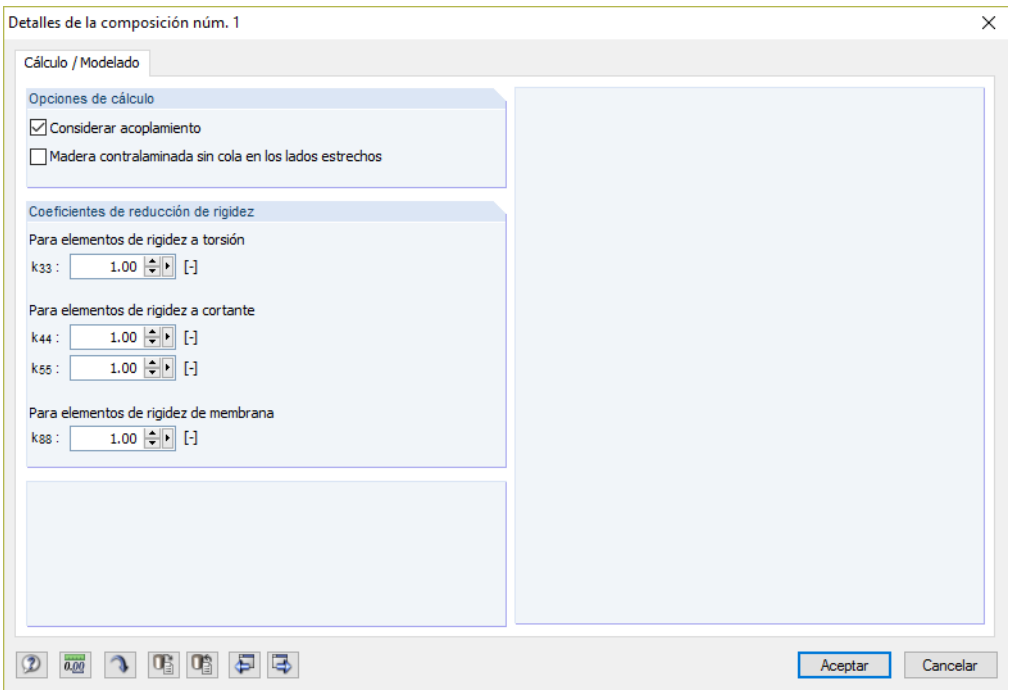


Figura 3.15: Cuadro de diálogo *Detalles de la composición*

Opciones de cálculo

En la sección superior del diálogo se selecciona la casilla de verificación *Considerar acoplamiento* de forma predeterminada, lo que significa que se considera el acoplamiento a cortante de las capas.

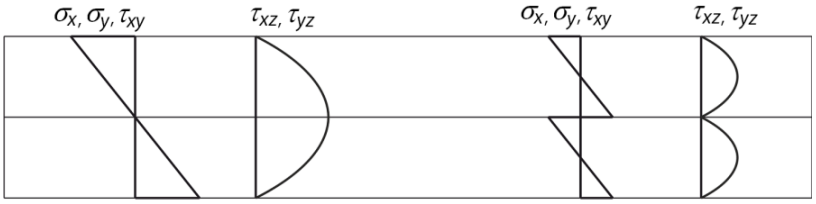


Figura 3.16: Tensiones de flexión básicas de la placa de dos capas – con (izquierda) y sin (derecha) acoplamiento a cortante de las capas

En el Capítulo 2.4.1 y Capítulo 2.4.2 se describen las aproximaciones referentes al acoplamiento a cortante.

Es posible aplicar la casilla de verificación *Madera contralaminada sin cola en los lados estrechos* a paneles multicapa de madera contralaminada. Para modelos de material ortótropos, se considera la definición de $E_y = 0$ y el elemento de la matriz de rigidez D_{88} como sigue:

$$D_{88} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} t_i \, d_{33,i} \tag{3.1}$$

Se recomienda el factor de reducción $\frac{1}{4}$ p.ej. en DIN EN 1995-1-1, expresión (NA.28).

Para modelos de material isótropos y definidos por el usuario, se define el elemento de la matriz de rigidez D_{88} como se describe en la Ecuación 3.1.

Factores de reducción de la rigidez

En esta sección del diálogo, puede reducir el elemento de la matriz de rigidez a torsión D_{33} con el factor k_{33}. Sólo es posible la corrección para placas que tengan composiciones simétricas y ángulos de giro que sean múltiplos de 90 °. En las normas ČSN 73 1702:2007, D.2.2(5) y DIN 1052:2008, D.2.2(5) se recomienda una corrección.

También es posible reducir los elementos de la matriz de rigidez a cortante D_{44} y D_{55} con los factores k_{44} y k_{55}. Sólo se pueden aplicar esos factores a las placas cuyos ángulos de giro sean múltiplos de 90 °.

Finalmente, se pueden reducir los elementos de rigidez de la membrana con el factor k_{88}.

Para las composiciones simétricas, la matriz de rigidez es entonces igual a

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ v_x \\ v_y \\ n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33}D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44}D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_{55}D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & k_{88}D_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

3.3 Resistencias del material

En la ventana 1.3 se muestran las resistencias características de las capas simples. Los valores de cada *Composición actual* se importan de la biblioteca de materiales (véase la Figura 3.7, página 25).

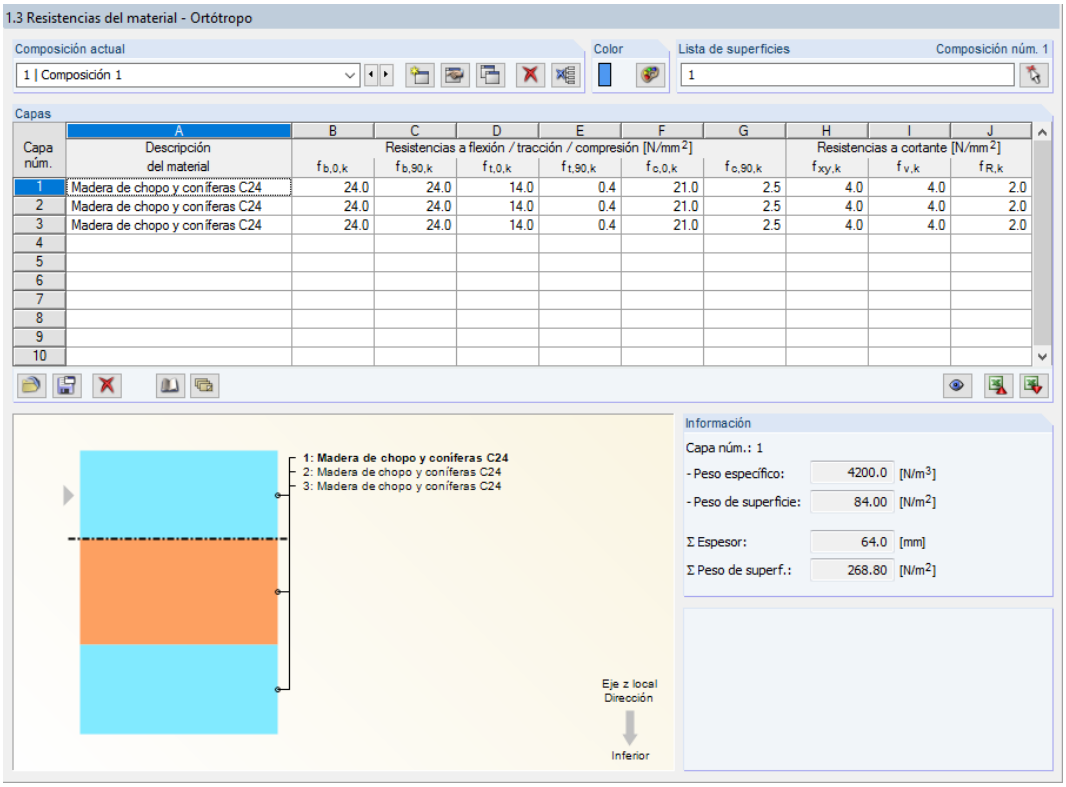


Figura 3.17: Ventana *1.3 Resistencias del material*

En la tabla, puede modificar los valores de las *Resistencias a flexión / tracción / compresión* así como de las *Resistencias a cortante*.

Debajo de la tabla, se encuentran los mismos botones que en la ventana anterior *1.2 Características del material*. Se describen en el Capítulo 3.2 en la página 27.

De nuevo, la sección *Información* ofrece información sobre el peso específico y el peso de la superficie de la capa actual, y sobre el espesor total y el peso de la superficie total de la composición actual.

© Dlubal Software 2017

3.4 Clase de duración de carga y servicio

Si el cálculo está según EN 1995-1-1:2004-11 o DIN 1052:2010-12 y se ha seleccionado una acción en la pestaña *Estado límite último* de la ventana 1.1, se muestra la ventana *1.4 Clase de duración de carga y servicio*.

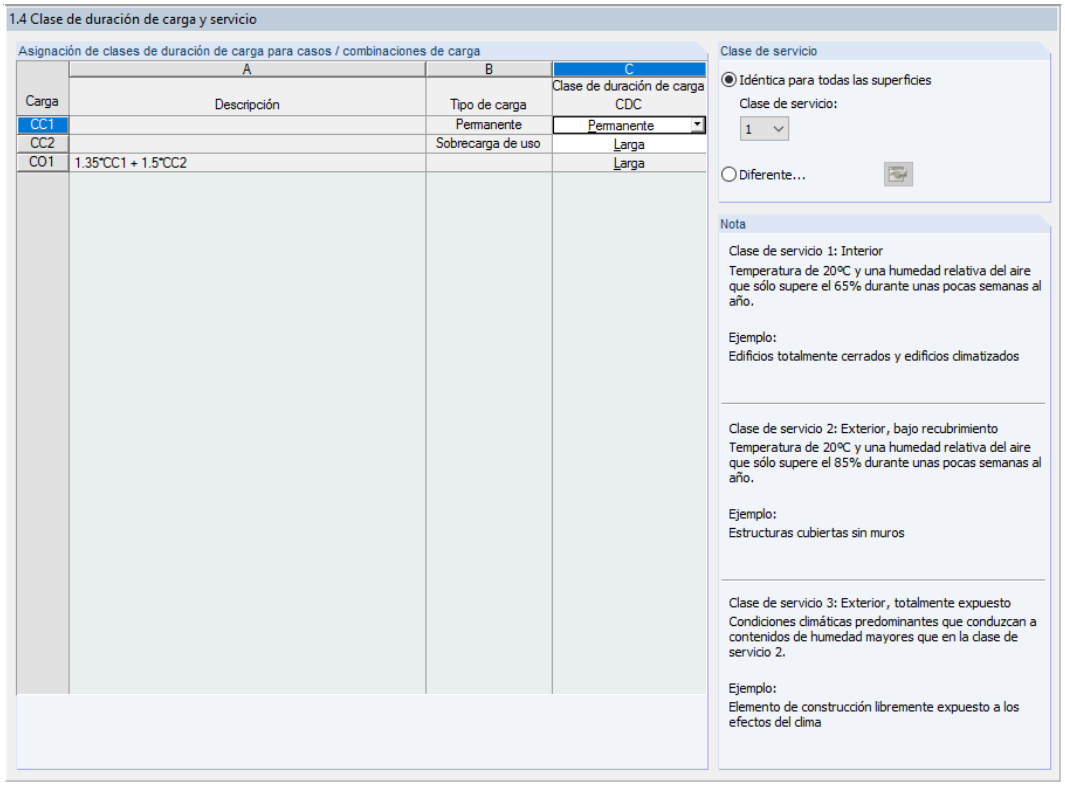


Figura 3.18: Ventana *1.4 Clase de duración de carga y servicio*

En esta ventana, se van a asignar las clases de duración de carga y servicio de las acciones de forma que se contabilicen las condiciones climáticas respectivas.

Carga

En esta tabla, se enumeran todos los casos de carga y combinaciones para el cálculo del ELU. Para las combinaciones de carga y de resultados también se incluyen los casos de carga contenidos.

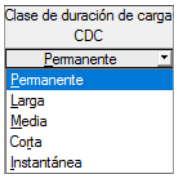
Descripción

La definición de las descripciones en RFEM hace más sencilla la clasificación de acciones.

Tipo de carga

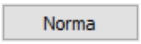
Esta columna muestra las categorías de acciones de los casos de carga según sus definiciones en RFEM. Las preselecciones de la siguiente columna se basan en aquellos tipos de carga.

Clase de duración de carga CDC



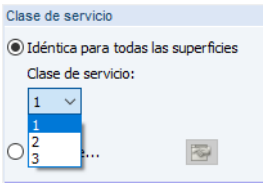
Los casos de carga y sus combinaciones se tienen que asignar a las clases de duración de carga específicas para el cálculo. Esas clases se describen p.ej. en EN 1995-1-1, Tabla 3.1. Cuando se selecciona una entrada de la lista, se asigna automáticamente el factor correspondiente k_{mod} según la clase duración de carga y la categoría del factor correspondientes.

Las combinaciones de carga y de resultados se clasifican de acuerdo con el caso de carga determinante.



Puede comprobar los valores de k_{mod} en el cuadro de diálogo *Norma* (véase el Capítulo 4.2.1, página 47).

Clase de servicio



Mediante la asignación de la *Clase de servicio* en la parte derecha de la ventana, puede controlar los factores de modificación k_{mod} y el análisis de flecha con respecto a las condiciones ambientales. Por ejemplo, las clases de servicio se describen en EN 1995-1-1, Cláusula 2.3.1.3.

De forma predeterminada, se asignan todas las superficies a una y la misma clase de servicio. Si desea asignar clases de servicio *Diferentes*, active la opción correspondiente y haga clic en el botón . Un nuevo cuadro de diálogo se abre, donde puede asignar por separado clases de servicio a las superficies seleccionadas.

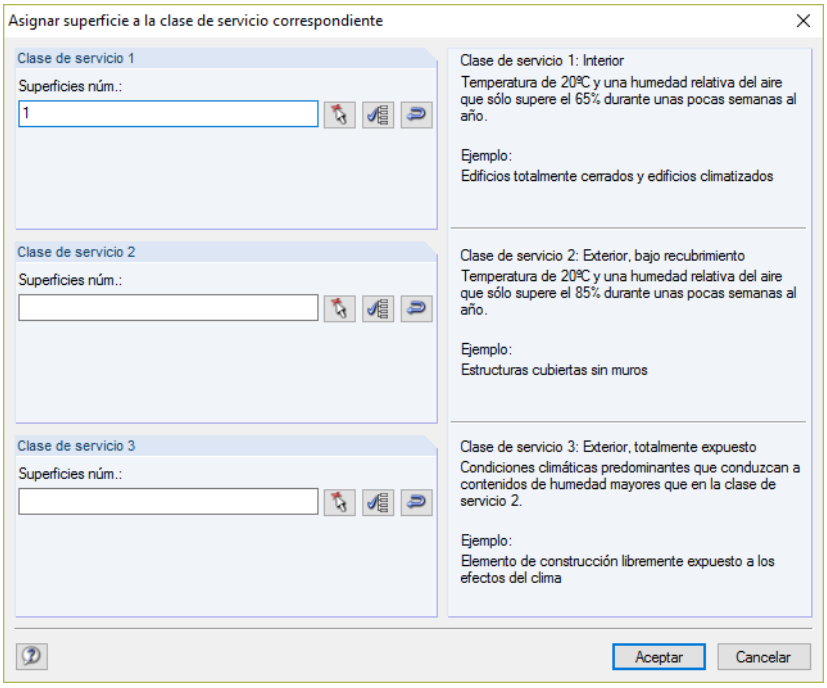


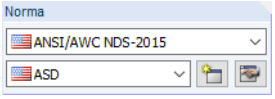
Figura 3.19: Cuadro de diálogo *Asignar superficie a la clase de servicio correspondiente*

Los botones próximos a los cuadros de texto tienen los siguientes significados:

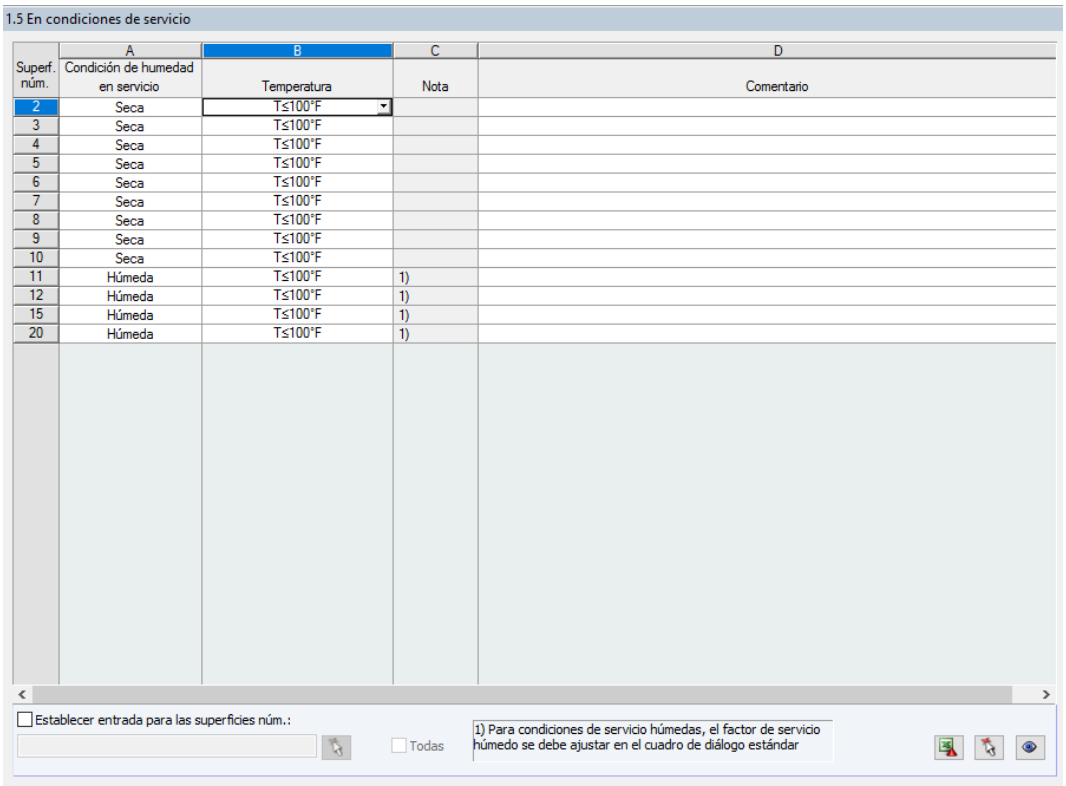
Botón	Función
	Seleccionar superficies gráficamente en la ventana de trabajo de RFEM.
	Asignar todas las superficies a esta clase de servicio.
	Asignar todas las superficies que no hayan sido aún seleccionadas a esta clase de servicio.

Tabla 3.4: Botones en el cuadro de diálogo *Asignar superficie a la clase de servicio correspondiente*

3.5 En condiciones de servicio



Si el cálculo se realiza según ANSI/AWC NDS-2015 [3], se muestra la ventana *1.5 En condiciones de servicio*. La configuración de esta ventana controla los factores de humedad en servicio, C_M, y los factores de temperatura, C_t.

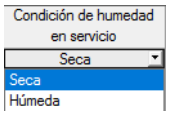


Superf. núm.	A Condición de humedad en servicio	B Temperatura	C Nota	D Comentario
2	Seca	T≤100°F		
3	Seca	T≤100°F		
4	Seca	T≤100°F		
5	Seca	T≤100°F		
6	Seca	T≤100°F		
7	Seca	T≤100°F		
8	Seca	T≤100°F		
9	Seca	T≤100°F		
10	Seca	T≤100°F		
11	Húmeda	T≤100°F	1)	
12	Húmeda	T≤100°F	1)	
15	Húmeda	T≤100°F	1)	
20	Húmeda	T≤100°F	1)	

Figura 3.20: Ventana *1.5 En condiciones de servicio*

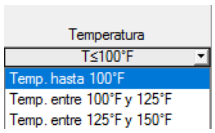
En esta tabla, se pueden especificar para el cálculo las condiciones en servicio para cada superficie.

Condición de humedad en servicio



De forma predeterminada, se establecen las condiciones de humedad *Seca* en servicio, donde el contenido de humedad en servicio es inferior al 16 %. Para cambiar la condición en servicio, use el botón y abra la lista.

Temperatura



Son posibles temperaturas elevadas hasta 150°F para el cálculo. Si se requiere, también se puede modificar la configuración de la temperatura predeterminada *T≤100°F* con el botón .

Nota

Cuando se cambia la configuración, es posible que se muestre una nota en esta columna. Se explica debajo de la tabla.

Establecer la entrada para las superficies núm.

Si se selecciona esta casilla de verificación debajo de la tabla, se aplica la configuración introducida posteriormente a las superficies seleccionadas o a *Todas* las superficies. Es posible seleccionar las superficies introduciendo sus números o haciendo clic sobre ellos gráficamente con el botón [Seleccionar] Esa opción es útil cuando desea asignar condiciones idénticas a varias superficies. Tenga en cuenta que con esta función no es posible cambiar posteriormente algunos parámetros que ya se han definido.

© Dlubal Software 2017

3.6 Datos de servicio

La ventana *1.6 Datos de servicio* contiene la última tabla de entrada para los datos de entrada. Se visualiza cuando se haya seleccionado al menos una acción en la pestaña *Estado límite de servicio* de la ventana *1.1 Datos generales*.

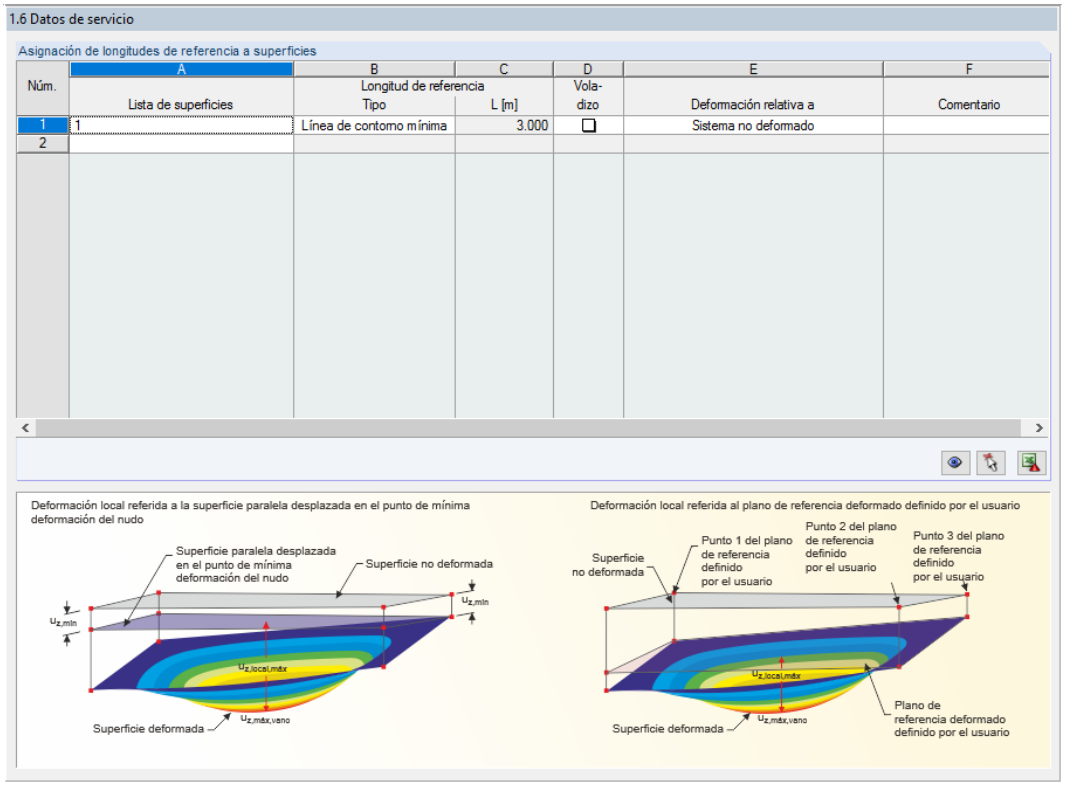


Figura 3.21: Ventana *1.6 Datos de servicio*

Norma

La configuración de esta ventana es importante para la correcta aplicación de las deformaciones límite. Puede comprobar y, en caso necesario, ajustar los valores límite del cálculo de ELS en el cuadro de diálogo *Norma* (véase el Capítulo 4.2.2, página 48).

Lista de superficies

En la columna A, especifique las superficies cuyas deformaciones se vayan a analizar.

Longitud de referencia

Tipo
Línea de contorno mínima
Línea de contorno mínima
Línea de contorno máxima
Definido por el usuario

El *Tipo* de longitud de referencia se puede seleccionar de la lista. Si se establece la *Línea de contorno máxima* de una superficie, el lado más largo se aplica para determinar la deformación límite de p.ej. $\frac{\ell}{300}$. Con la *Línea de contorno mínima*, se usa en su lugar la línea más corta.

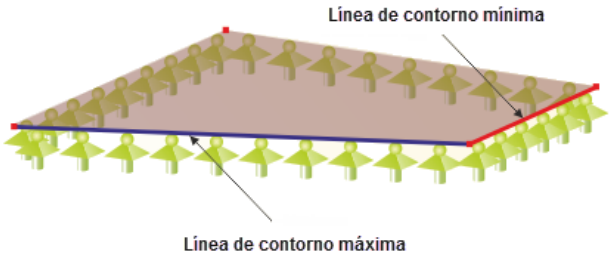


Figura 3.22: Línea de contorno máxima y mínima para determinar $u_{z,max}$

L [m]
2.446
2.446
2.895

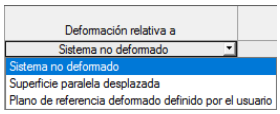
La opción *Definido por el usuario* le permite definir manualmente la longitud de referencia de la superficie. Teniendo seleccionada esta entrada, puede definir el valor en el cuadro de texto *L*.

También es posible seleccionar la longitud de la lista o definirla gráficamente mediante el botón ... en la ventana de trabajo de RFEM. Puede que sea necesario por ejemplo establecer la longitud de referencia manualmente para las superficies que se ubiquen dentro de otras superficies.

Voladizo

En la columna D, puede especificar si la superficie es o no un voladizo.

Deformación relativa a



El criterio de cálculo de deformación usa la flecha de una superficie, p.ej. la deformación perpendicular relativa a la línea más corta que conecta los puntos del apoyo. Hay tres posibilidades de cómo calcular la deformación local $u_{z,local}$ que luego se usa en el cálculo.

- *Sistema no deformado:* La deformación está ligada al modelo inicial.
- *Superficie paralela desplazada:* Se recomienda esta opción para los apoyos elásticos. La deformación $u_{z,local}$ está ligada a una superficie de referencia virtual que se desplaza paralela al sistema no deformado. Para el vector de desplazamiento de la superficie de referencia, se aplica la deformación mínima en el nudo de la superficie.

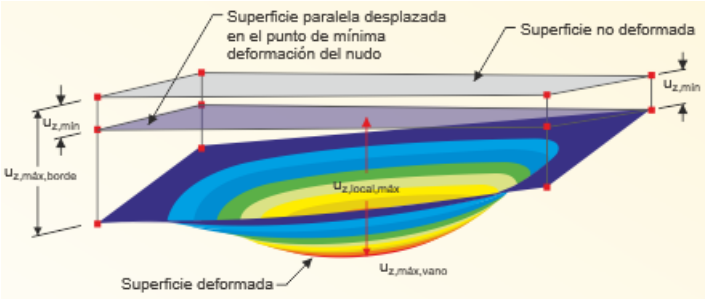


Figura 3.23: Superficie paralela desplazada, con la menor deformación en el nudo $u_{z,min}$ como vector de desplazamiento

- *Plano de referencia deformado:* Si las deformaciones de los apoyos difieren considerablemente, es posible definir un plano de referencia inclinado para la deformación relevante $u_{z,local}$. El plano se va a definir con tres puntos del sistema no deformado. El programa determina las deformaciones de esos tres puntos, lugares del plano de referencia en los puntos desplazados, y luego calcula la deformación $u_{z,local}$.

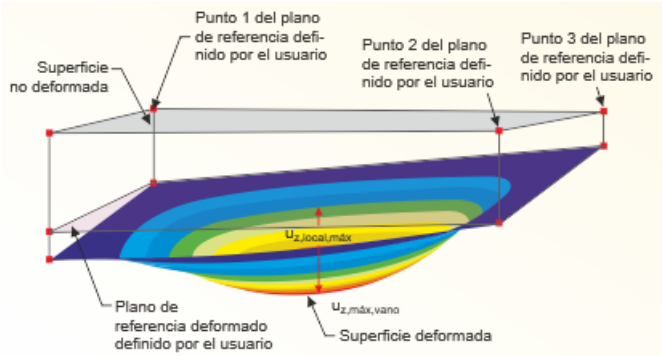


Figura 3.24: Plano de referencia desplazado definido por el usuario

4 Cálculo

Detalles...

Antes de iniciar el cálculo debería comprobar la configuración detallada para la evaluación. Haciendo clic en el botón [Detalles] abre el cuadro de diálogo relevante que se describe a continuación.

Al inicio del cálculo, el programa comprueba si la matriz de rigidez global está definida positiva (véase el Capítulo 9.2, página 94).

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sim.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sim.} & \text{sim.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Entonces el cálculo se ejecuta globalmente para toda la estructura modelada en RFEM.

4.1 Detalles

El cuadro de diálogo *Detalles* consta de estas pestañas:

- *Tensiones*
- *Resultados*

Los siguientes botones son comunes para ambas pestañas:

Botón	Nombre	Función
	Ayuda	Buscar la ayuda en línea.
	Unidades y decimales	Abrir el cuadro de diálogo *Unidades y decimales* que controla las unidades de RF-LAMINATE.
	Restablecer valores estándar de Dlubal	Establecer todos los parámetros en el cuadro de diálogo *Detalles* a los valores originales de DLUBAL.
	Predeterminado	Establecer todos los parámetros en el cuadro de diálogo *Detalles* de acuerdo con la configuración predeterminada que se guardó anteriormente.
	Establecer como predeterminado	Guardar la configuración actual como predeterminada. Se puede volver a cargar para cualquier otro caso de RF-LAMINATE mediante el botón .

Tabla 4.1: Botones en el cuadro de diálogo *Detalles*

4.1.1 Tensiones

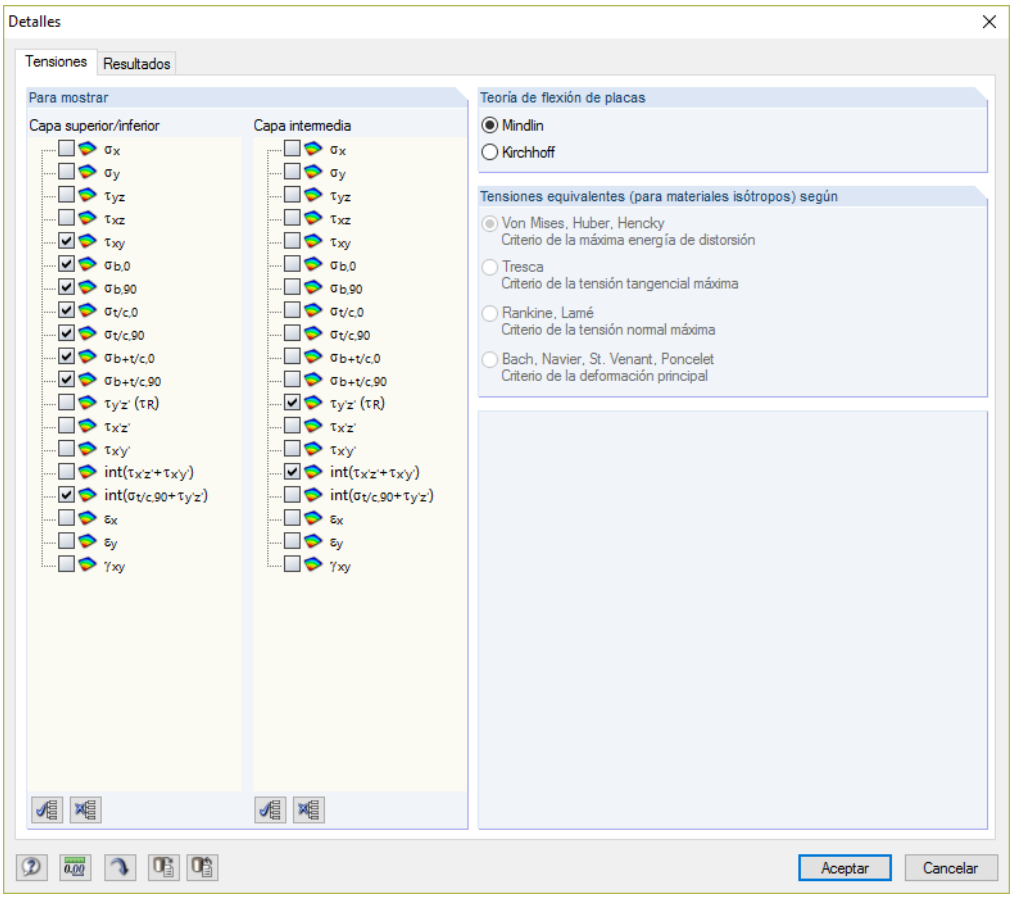


Figura 4.1: Cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Tensiones*

Para mostrar

Seleccionando las casillas de verificación apropiadas en esta sección del diálogo, determina qué tensiones se muestran en las tablas de resultados. Las tensiones se ajustan por separado para la *Capa superior/inferior* y *Capa intermedia*.

Los botones [Seleccionar todo] y [Anular toda la selección] facilitan la selección de los tipos de tensión.

Las tensiones básicas σ_x, σ_v, τ_{xv}, τ_{xz} y τ_{vz} se calculan con el método de elementos finitos en RFEM. A partir de esas tensiones básicas, se determina todo el resto de tensiones con el módulo RF-LAMINATE.

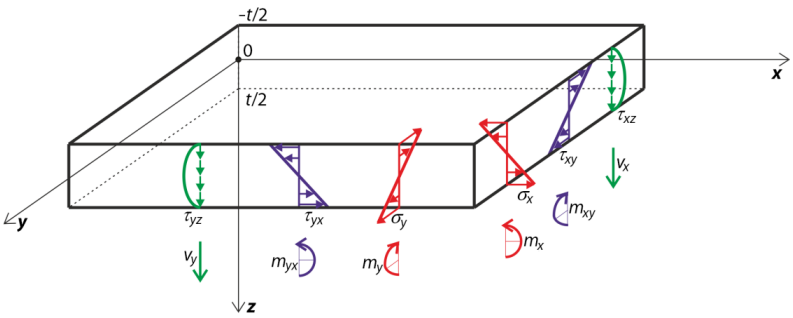


Figura 4.2: Tensiones básicas y convención de signos para una placa de capa simple sometida a flexión

En la Tabla 4.2, se dan las ecuaciones que son válidas para placas de capa simple.

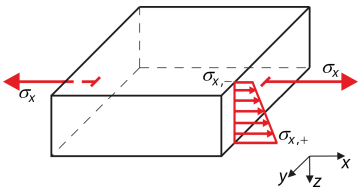
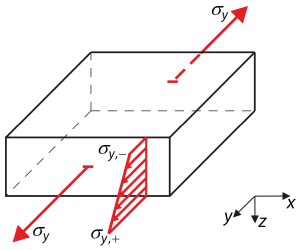
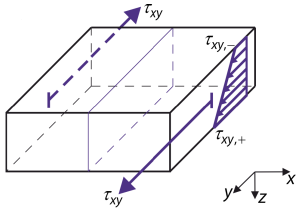
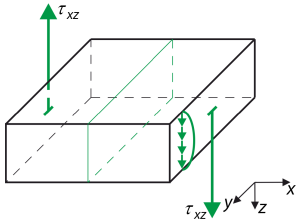
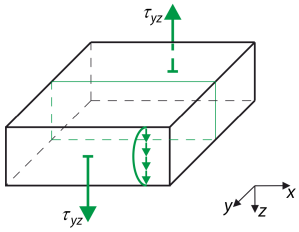
σ_x	Tensión normal en dirección *x* • Tensión en el lado positivo de la superficie $\sigma_{x,+} = \frac{n_x}{t} + \frac{6\,m_x}{t^2}$ donde t = espesor de la placa • Tensión en el lado negativo de la superficie $\sigma_{x,-} = \frac{n_x}{t} - \frac{6\,m_x}{t^2}$	
σ_y	Tensión normal en dirección *y* • Tensión en el lado positivo de la superficie $\sigma_{y,+} = \frac{n_y}{t} + \frac{6\,m_y}{t^2}$ • Tensión en el lado negativo de la superficie $\sigma_{y,-} = \frac{n_y}{t} - \frac{6\,m_y}{t^2}$	
τ_{xy}	Tensión tangencial en el plano *xy* • Tensión en el lado positivo de la superficie $\tau_{xy,+} = \frac{n_{xy}}{t} + \frac{6\,m_{xy}}{t^2}$ • Tensión en el lado negativo de la superficie $\tau_{xy,-} = \frac{n_{xy}}{t} - \frac{6\,m_{xy}}{t^2}$	
τ_{xz}	Tensión tangencial en el plano *xz* • Tensión en el centro de la placa $\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{v_x}{t}$	
τ_{yz}	Tensión tangencial en el plano *yz* • Tensión en el centro de la placa $\tau_{yz} = \frac{3}{2}\frac{v_y}{t}$	

Tabla 4.2: Tensiones básicas

En general, las tensiones en las capas simples se calculan a partir de las deformaciones internas totales de la placa:

$$\varepsilon_{tot}^{T} = \left[\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y, \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{4.2}$$

Las deformaciones en las capas individuales se calculan usando la relación

$$\varepsilon(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

donde *z* es la coordenada en dirección *z* en la cual se requiere el valor de tensiones. Para el ejemplo de la *i*-ésima capa, la tensión se calcula usando la relación

$$\sigma(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{d_i}\varepsilon(\boldsymbol{z}) \tag{4.4}$$

donde $\boldsymbol{d_i}$ es la matriz de rigidez parcial de la *i*-ésima capa.

Las tensiones se diferencian según el modelo de material – isótropo u ortótropo.

Modelo de material isótropo

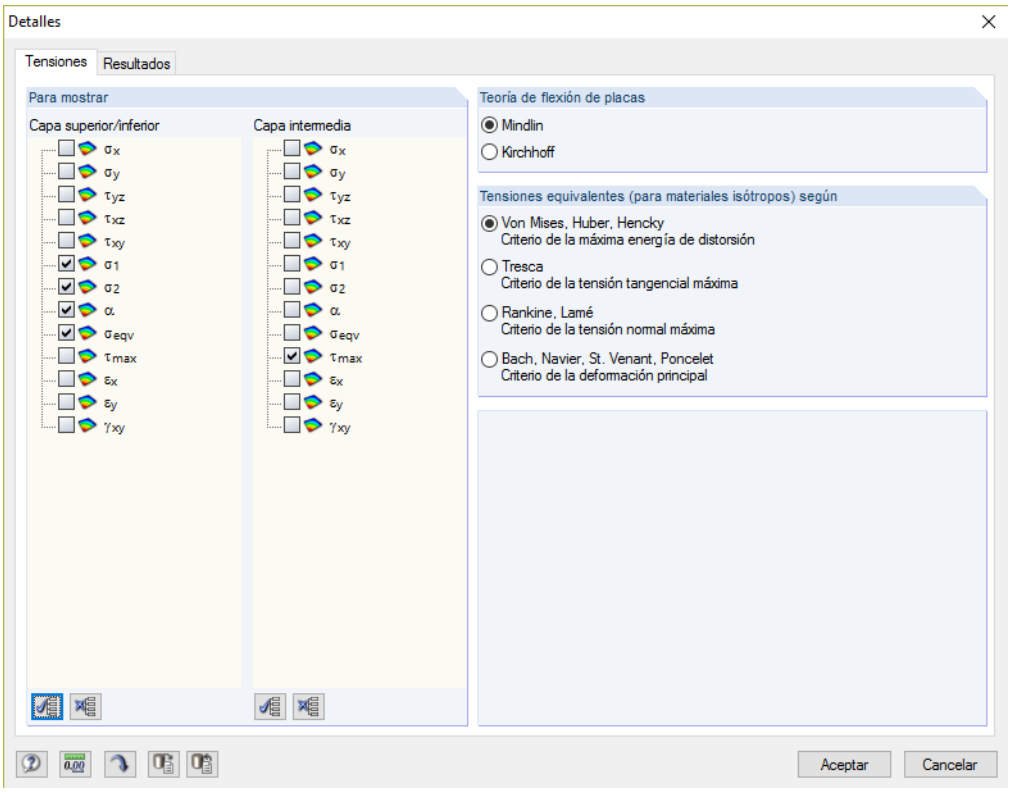


Figura 4.3: Cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Tensiones* para un modelo de material isótropo

El efecto de las tensiones tangenciales transversales se expresa mediante la cantidad:

$\tau_{máx}$	Tensión tangencial transversal máxima $\tau_{máx} = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}$

Tabla 4.3: Tensión tangencial transversal máxima

Las relaciones para el cálculo de las tensiones principales y equivalentes se introducen en la Tabla 4.4. El efecto de las tensiones tangenciales se omite en las fórmulas τ_{xz} y τ_{yz}.

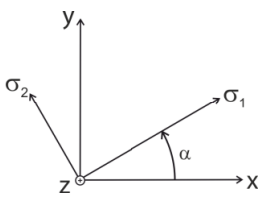
σ_1	Tensión principal $\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2}$	
σ_2	Tensión principal $\sigma_2 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2}$	
α	Ángulo entre el eje *x* local y la dirección de la primera tensión principal $\alpha = \frac{1}{2}\text{atan2}\left(2\tau_{xy}, \sigma_x - \sigma_y\right), \quad \alpha \in (-90\,°, 90\,°\rangle$ La función atan2 se implementa en RFEM como sigue: $\text{atan2}\,(y,x) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ 0 & y = 0, x = 0 \end{cases}$	
σ_{eqv}	Tensión equivalente según VON MISES, HUBER, HENCKY – Criterio de la máxima energía de distorsión $\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\,\tau_{xy}^2}$	
	Tensión equivalente según TRESCA – Criterio de la tensión tangencial máxima $\sigma_{eqv} = \text{máx}\left[\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}, \dfrac{\lvert\sigma_x + \sigma_y\rvert + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2}\right]$	
	Tensión equivalente según RANKINE, LAMÉ – Criterio de la tensión normal máxima $\sigma_{eqv} = \dfrac{\lvert\sigma_x + \sigma_y\rvert + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2}$	
	Tensión equivalente según BACH, NAVIER, ST. VENANT, PONCELET – Criterio de la deformación principal $\sigma_{eqv} = \text{máx}\left[\frac{1-\nu}{2}\lvert\sigma_x + \sigma_y\rvert + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}, \nu\lvert\sigma_x + \sigma_y\rvert\right]$	

Tabla 4.4: Tensiones para un modelo de material isótropo

Modelo de material ortótropo

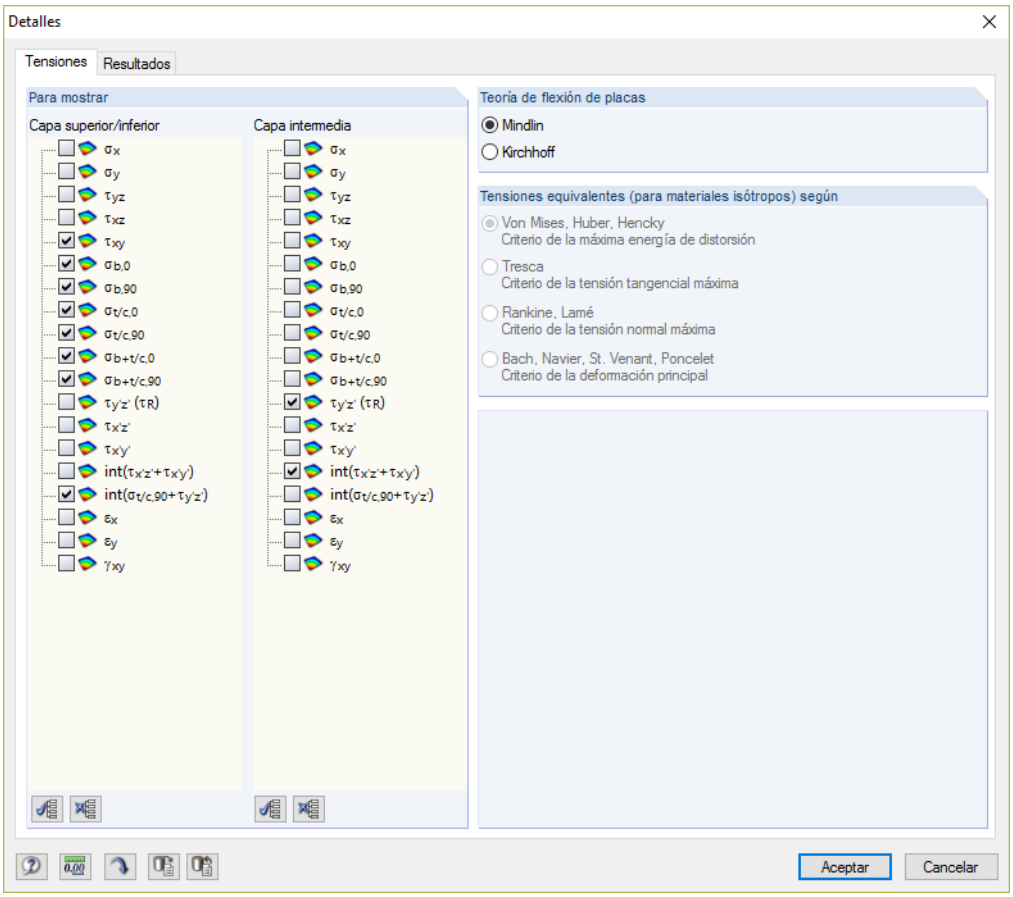
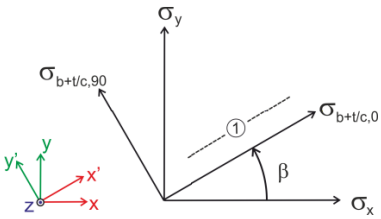


Figura 4.4: Cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Tensiones* para el modelo de material ortótropo

$\sigma_{b+t/c,0}$	Tensión normal a lo largo de la fibra $\sigma_{b+t/c,0} = \sigma_x \cos^2\beta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\beta + \sigma_y\,\text{sen}^2\beta$	 *1 – Dirección de la fibra
$\sigma_{b+t/c,90}$	Tensión normal perpendicular a la fibra $\sigma_{b+t/c,90} = \sigma_x\,\text{sen}^2\beta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\beta + \sigma_y \cos^2\beta$	
$\sigma_{t/c,0}$	Componente de tracción/compresión de la tensión normal a lo largo de la fibra $\sigma_{t/c,0} = \dfrac{\sigma_{b+t/c,0(\text{superior})} + \sigma_{b+t/c,0(\text{intermedia})} + \sigma_{b+t/c,0(\text{inferior})}}{3}$	
$\sigma_{t/c,90}$	Componente de tracción/compresión de la tensión normal perpendicular a la fibra $\sigma_{t/c,90} = \dfrac{\sigma_{b+t/c,90(\text{superior})} + \sigma_{b+t/c,90(\text{intermedia})} + \sigma_{b+t/c,90(\text{inferior})}}{3}$	

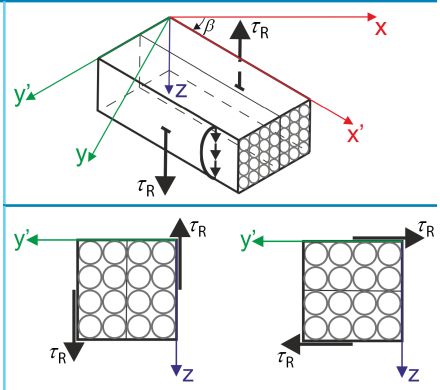
$\sigma_{b,0}$	Componente de flexión de la tensión normal a lo largo de la fibra $\sigma_{b,0} = \sigma_{b+t/c,0} - \sigma_{t/c,0}$	
$\sigma_{b,90}$	Componente de flexión de la tensión normal perpendicular a la fibra $\sigma_{b,90} = \sigma_{b+t/c,90} - \sigma_{t/c,90}$	
τ_R	Tensión tangencial por rodadura $\tau_R = -\tau_{xz} \operatorname{sen} \beta + \tau_{yz} \cos \beta$	

Tabla 4.5: Tensiones para el modelo de material ortótropo

Las tensiones $\sigma_{b+t/c,0}$, $\sigma_{b+t/c,90}$, $\sigma_{t/c,0}$, $\sigma_{t/c,90}$, $\sigma_{b,0}$, $\sigma_{b,90}$ y τ_R se expresan en el sistema de coordenadas de la fibra x', y', z. Como la fibra se puede girar por separado en cada capa, pueden ocurrir discontinuidades de los valores de tensiones en los contornos de las capas. Las fórmulas de transformación para esas tensiones se introducen en la Ecuación 5.1 y la Ecuación 5.2 en la página 54.

La tensión normal incluye los componentes de tensión/compresión y los componentes de flexión de las capas individuales.

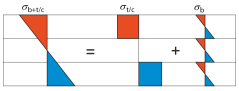
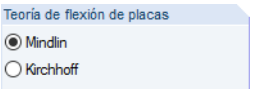


Figura 4.5: Tensión normal – acciones de los componentes de tracción/compresión y los componentes de flexión

Teoría de flexión de placas



Para las superficies, se disponen de dos teorías de flexión:

- Mindlin
- Kirchhoff

La deformación por cortante se considera para el cálculo según la teoría de MINDLIN, pero no según la de KIRCHHOFF.

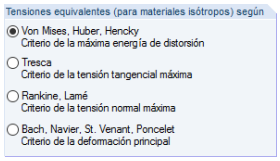
La teoría de flexión según MINDLIN es más bien adecuada para placas macizas. Sin embargo para placas relativamente delgadas se recomienda la teoría de flexión según KIRCHHOFF.

Como las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} no se determinan precisamente según KIRCHHOFF, se calculan a partir de las condiciones de equilibrio como sigue.

$$\tau_{xz,\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{v_x}{t} = 1{,}5\frac{v_x}{t} \tag{4.5}$$

$$\tau_{yz,\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{v_y}{t} = 1{,}5\frac{v_y}{t} \tag{4.6}$$

Tensiones equivalentes (para materiales isótropos) según



Para materiales isótropos, se pueden determinar las tensiones equivalentes de cuatro formas distintas. Si se ha seleccionado el modelo de material ortótropo, no se pueden calcular tensiones equivalentes.

Von Mises, Huber, Hencky – Criterio de la máxima energía de distorsión

A este criterio también se le conoce como la hipótesis HMH o la hipótesis de la modificación de forma. La tensión equivalente se calcula usando la relación

$$\sigma_{\text{eqv}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\,\tau_{xy}^2} \tag{4.7}$$

Tresca – Criterio de tensión tangencial máxima

Comúnmente, esta tensión equivalente se define con la relación

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\right), \tag{4.8}$$

la cual, en la condición $\sigma_3 = 0$, se simplifica a

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\right) \tag{4.9}$$

y la ecuación resultante

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left[\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}, \frac{|\sigma_x + \sigma_y| + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2}\right] \tag{4.10}$$

Rankine, Lamé – Criterio de la tensión normal máxima

Esta hipótesis también se conoce como la hipótesis de la tensión principal máxima o la teoría del máximo esfuerzo normal. La tensión de RANKINE se define generalmente como la máxima de los valores absolutos resultantes a partir de las tensiones principales.

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\right) \tag{4.11}$$

la cual, en la condición $\sigma_3 = 0$, se simplifica a

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1|, |\sigma_2|\right) \tag{4.12}$$

y la ecuación resultante

$$\sigma_{\text{eqv}} = \frac{|\sigma_x + \sigma_y| + \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}}{2} \tag{4.13}$$

Bach, Navier, St. Venant, Poncelet – Criterio de deformación principal

Según esta hipótesis, la tensión equivalente está basada en la deformación principal. Se supone que el fallo ocurre en la dirección de máxima deformación.

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)|, |\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)|, |\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)|\right) \tag{4.14}$$

la cual, en la condición $\sigma_3 = 0$, se simplifica a

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left(|\sigma_1 - \nu\sigma_2|, |\sigma_2 - \nu\sigma_1|, \nu|\sigma_1 + \sigma_2|\right) \tag{4.15}$$

y la ecuación resultante

$$\sigma_{\text{eqv}} = \text{máx}\left[\frac{1-\nu}{2}|\sigma_x + \sigma_y| + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}, \nu|\sigma_x + \sigma_y|\right] \tag{4.16}$$

En todas las ecuaciones relativas a la tensión equivalente se omite la influencia de las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz}.

4.1.2 Resultados

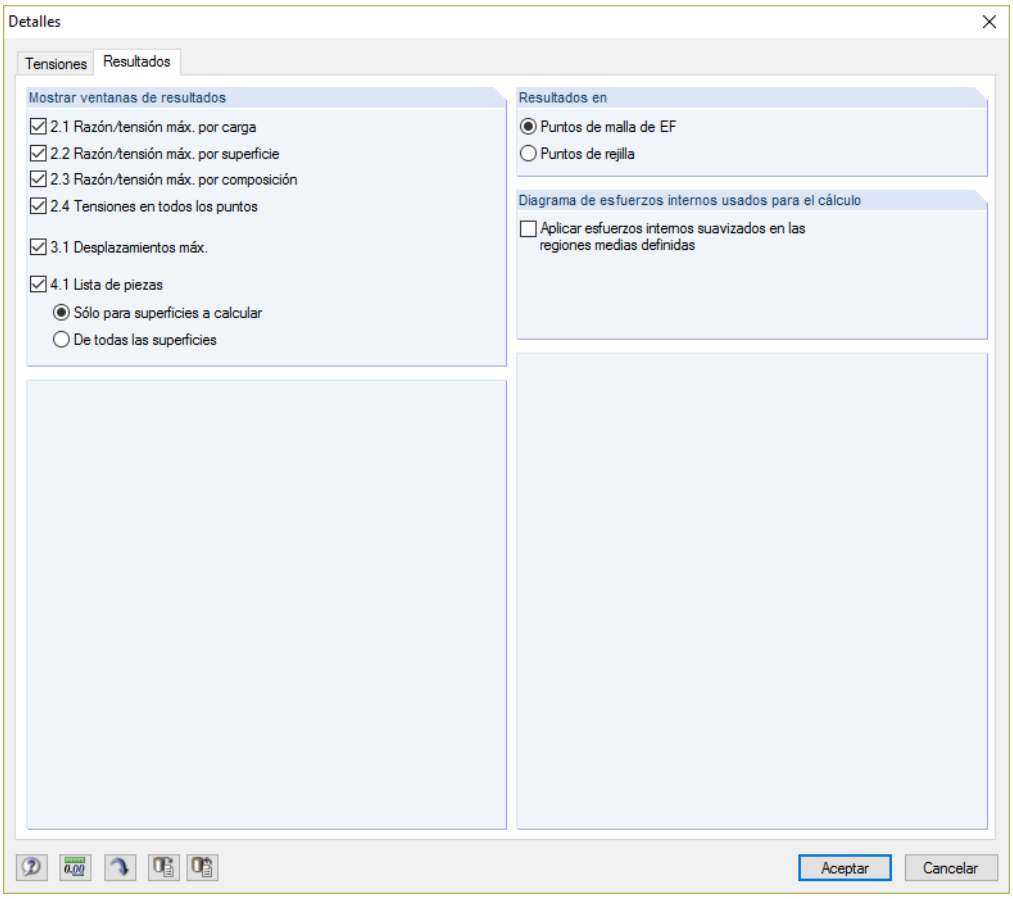


Figura 4.6: Cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Resultados*

Mostrar ventanas de resultados

En esta sección del diálogo, puede seleccionar las tablas de resultados que se van a mostrar después del cálculo (tensiones, desplazamientos, lista de piezas).

Las ventanas de resultados se describen en el Capítulo 5.

Resultados en

De forma predeterminada, se muestran las tensiones y los desplazamientos en todos los *puntos de malla de EF*. Como alternativa, puede establecer los resultados en los *Puntos de rejilla* de cada superficie. Es posible definir los puntos de rejilla en RFEM como una propiedad de una superficie (véase el manual de RFEM, Capítulo 8.13).

Si una superficie es bastante pequeña, la separación de puntos de rejilla predeterminada de 0,5 m puede producir muy pocos puntos de rejilla, o incluso sólo uno en el origen. En ese caso, las tablas de resultados no cubren los valores máximos: la rejilla no es lo suficientemente fina. Debería entonces adaptar la rejilla a las dimensiones de la superficie en RFEM de manera que se creen más puntos de rejilla.

Diagrama de esfuerzos internos usados para el cálculo

Si selecciona la casilla de verificación *Aplicar esfuerzos internos suavizados en las regiones medias definidas*, puede usar los resultados suavizados de las regiones medias para el cálculo de tensiones en RF-LAMINATE. Se pueden encontrar detalles sobre las regiones medias en el manual de RFEM, Capítulo 9.7.3.

4.2 Norma

Norma

Para abrir el cuadro de diálogo *Norma*, haga clic en el botón correspondiente. Este botón está disponible en cada ventana del módulo RF-LAMINATE.

En la esquina derecha de la ventana *1.1 Datos generales*, puede seleccionar qué parámetros son relevantes para el cálculo y qué valores límite de flecha se van a aplicar (véase la Figura 3.2, página 21).

Es posible seleccionar las siguientes normas:

- Ninguna
- DIN 1052:2010-12 [4]
- EN 1995-1-1:2004-11 [2] con Anejos Nacionales
- ANSI/AWC NDS-2015 [3]

Si selecciona *Ninguna*, puede introducir valores básicos definidos por el usuario para las propiedades del material, γ_M, y para los límites en servicio que sean independientes de cualquier norma específica.

El cuadro de diálogo *Norma* se describe de forma ejemplar para **EN 1995-1-1:2004-11** para ilustrar los parámetros relevantes.

Para EN 1995-1-1, se calculan valores de cálculo de tensiones (con subíndice *d*) a partir de los valores límite característicos de las tensiones (con subíndice *k*) según la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} f_{b,d} \\ f_{t,d} \\ f_{c,d} \\ f_{b,0,d} \\ f_{t,0,d} \\ f_{c,0,d} \\ f_{b,90,d} \\ f_{t,90,d} \\ f_{c,90,d} \\ f_{xy,d} \\ f_{v,d} \\ f_{\mathrm{eqv},d} \\ f_{R,d} \end{Bmatrix} = \frac{k_{\mathrm{mod}}}{\gamma_M} \begin{Bmatrix} f_{b,k} \\ f_{t,k} \\ f_{c,k} \\ f_{b,0,k} \\ f_{t,0,k} \\ f_{c,0,k} \\ f_{b,90,k} \\ f_{t,90,k} \\ f_{c,90,k} \\ f_{xy,k} \\ f_{v,k} \\ f_{\mathrm{eqv},k} \\ f_{R,k} \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

El cuadro de diálogo *Norma - EN 1995-1-1* consta de estas pestañas:

- *Factores de material*
- *Límites de servicio*

4.2.1 Factores de material

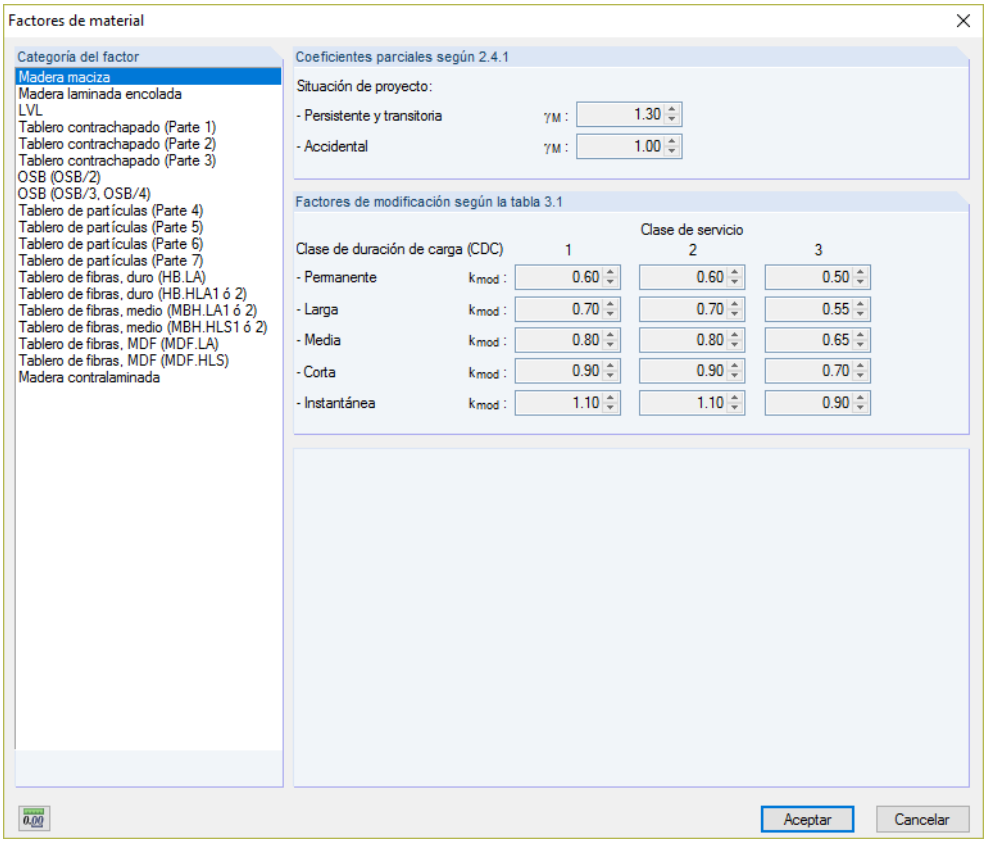


Figura 4.7: Cuadro de diálogo *Norma* para EN 1995-1-1, pestaña *Factores de material*

Categoría del factor

Los grados del material listados en la *Categoría del factor* corresponden a las entradas en la columna B de la ventana *1.2 Características del material* (véase la Figura 3.6, página 24). RF-LAMINATE preestablece los factores parciales y los factores de modificación según la categoría seleccionada.

Para mostrar todas las categorías disponibles en la lista, use el botón [Incluir categorías de materiales no usados].

Si desea aplicar factores definidos por el usuario, cree una [Nueva norma o Anejo Nacional] en la ventana *1.1 Datos generales*. Entonces puede definir los parámetros relevantes en la pestaña *Factores de material*.

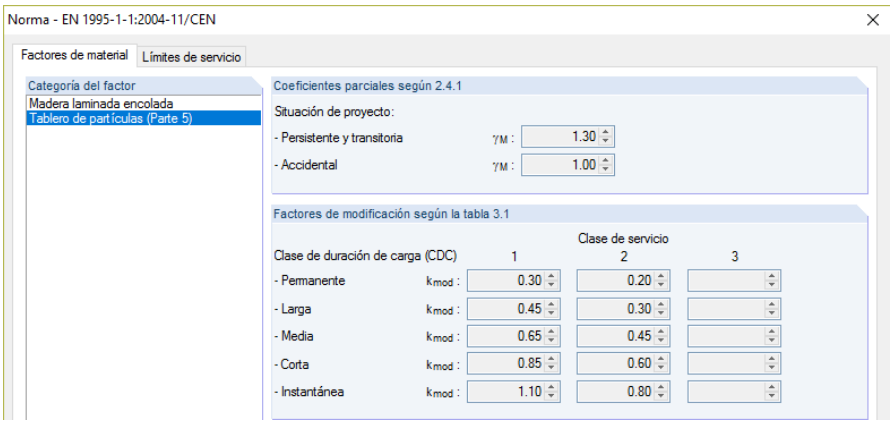
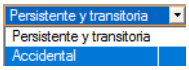


Figura 4.8: Pestaña *Factores de material* de la norma definida por el usuario

Para los materiales del tablero de partículas, no se admite la clase de servicio 3 (véase la Figura 4.8).

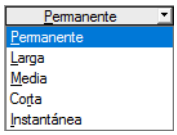
Coeficientes parciales según 2.4.1



En esta sección del diálogo, puede comprobar los coeficientes parciales de las propiedades del material, γ_M, para cada situación de proyecto diferente. Las situaciones de proyecto se van a asignar a los casos y combinaciones de carga seleccionados en la pestaña *Estado límite último* de la ventana *1.1 Datos generales* (véase el Capítulo 3.1.1, página 22).

Factores de modificación según la Tabla 3.1

Para la *Categoría del factor* seleccionada, se muestran los valores del factor de modificación k_{mod} para las diferentes clases de duración de carga y clases de servicio. Se especifican en [2], Tabla 3.1.



Se asigna el factor de modificación k_{mod} a los casos de carga según la duración de carga y las clases de servicio como se define en la ventana *1.4 Duración de carga y clase de servicio* (véase el Capítulo 3.4, Página 32).

4.2.2 Límites de servicio

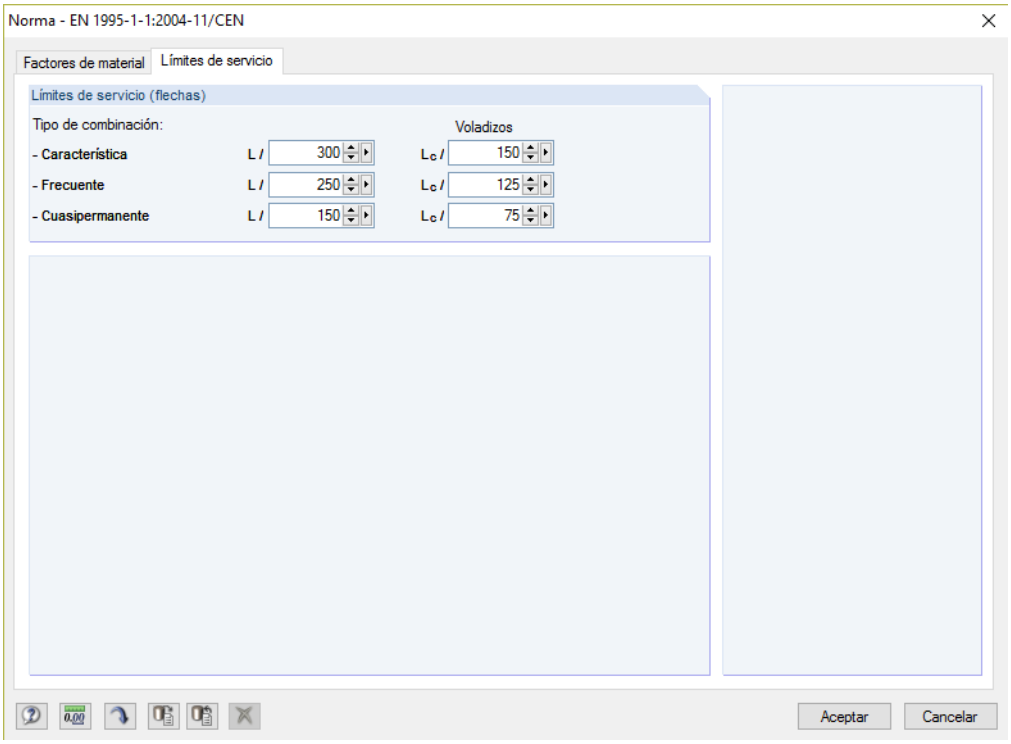
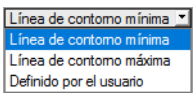


Figura 4.9: Cuadro de diálogo *Norma* para EN 1995-1-1, pestaña *Límites de servicio*

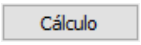
Los valores límite de las flechas admisibles se controlan mediante seis cuadros de texto. De este modo, puede definir límites específicos para las diferentes combinaciones de acciones (*Característica*, *Frecuente*, *Cuasipermanente*) así como para las superficies apoyadas en ambos lados o en uno sólo (*Voladizos*).

Es posible clasificar los casos de carga en la pestaña *Estado límite de servicio* de la ventana *1.1 Datos generales* (véase el Capítulo 3.1.2, página 23).



En la ventana *1.6 Datos de servicio*, se va a definir la longitud de referencia *L* de cada superficie (véase el Capítulo 3.6, página 35).

4.3 Inicio del cálculo



En todas las ventanas de entrada de RF-LAMINATE, puede iniciar el cálculo haciendo clic con el botón [Cálculo].

También puede iniciar el cálculo de RF-LAMINATE en la interfaz de usuario de RFEM: abra el cuadro de diálogo *Para calcular* usando el comando del menú principal

Calcular → **Para calcular**.

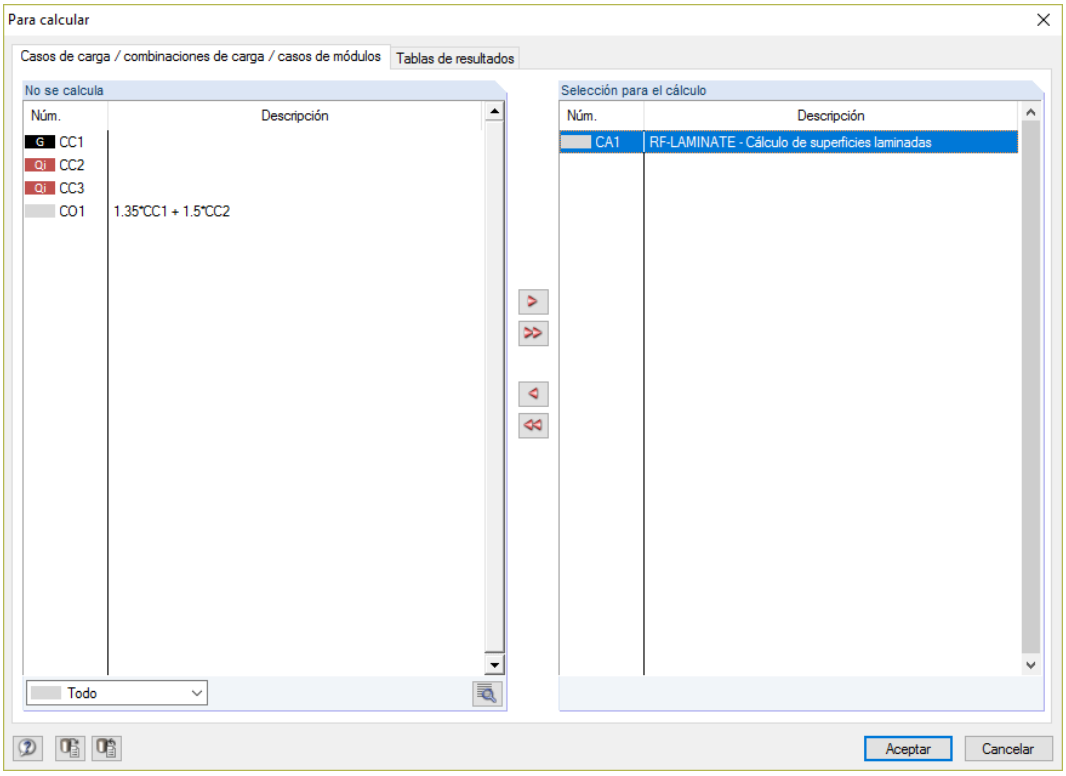


Figura 4.10: Cuadro de diálogo *Para calcular* en RFEM

Si el caso de cálculo de RF-LAMINATE no se encuentra en la lista *No se calcula*, seleccione *Módulos adicionales* o *Todo* debajo de la lista.

Añada el caso de cálculo seleccionado a la lista de la derecha con el botón [>]. Luego inicie el cálculo al [Aceptar].

También es posible iniciar el cálculo de RF-LAMINATE desde la barra de herramientas de RFEM: ponga RF-LAMINATE en la lista y luego haga clic en el botón [Mostrar resultados].

Figura 4.11: Inicio del cálculo de RF-LAMINATE en la barra de herramientas

5 Resultados

La ventana *2.1 Razón máx. de tensiones por carga* se muestra inmediatamente después del cálculo.

Detalles...

En el cuadro de diálogo *Detalles*, puede especificar qué ventanas de resultados se van a visualizar (véase el Capítulo 4.1.2, página 45).

Para seleccionar una ventana de resultados, haga clic en la entrada correspondiente en el navegador. Para establecer la ventana anterior y la posterior, use los botones que se muestran a la izquierda. También puede usar las teclas de función para seleccionar la ventana siguiente [F2] o la anterior [F3].

Aceptar Cancelar

[Aceptar] guarda todos los datos y cierra RF-LAMINATE. Para salir del módulo sin guardar, haga clic en [Cancelar].

En las ventanas de resultados, se disponen de varios botones. Tienen las siguientes funciones:

Botón	Nombre	Función
	Modo de visualización	Pasar a la ventana de trabajo de RFEM sin cerrar RF-LAMINATE.
	Selección	Seleccionar la superficie o señalarla gráficamente para mostrar sus resultados en la tabla.
	Resultados gráficos	Mostrar u ocultar los resultados de la línea actual en la ventana de trabajo de RFEM.
>1 / >1 / Max / Definir	Parámetros de filtro	Definir el criterio para filtrar los resultados en las tablas: razones superiores a 1, valor máximo, o el límite definido por el usuario.
	Barras de colores	Mostrar u ocultar las escalas de relación de colores en las tablas de resultados.
	Exportar a Excel	Exportar la tabla actual a MS Excel u OpenOffice Calc → Capítulo 7.2, página 63.

Tabla 5.1: Botones en las ventanas de resultados

5.1 Razón máx. de tensiones por carga

2.1 Razón máx. de tensiones por carga

Carga	A Superf. núm.	B Punto núm.	C Coordenadas del punto [m] X	D Y	E Z	F Núm.	G Capa z [mm]	H Lado	I Símbolo	J Tensiones [N/mm²] Existente	K Límite	L Razón [-]	M Gráfico en informe
CC1													
	1	13	0.500	3.000	0.000	1	0.0	Superior	τ_{xy}	-0.62	1.85	0.34	☑
	1	1	0.000	0.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-10.30	12.00	0.86	☐
	1	13	0.500	3.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	12.00	0.00	☐
	1	18	1.000	1.500	0.000	3	44.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	3.88	7.00	0.55	☐
	1	1	0.000	0.000	0.000	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.15	0.00	☐
	1	1	0.000	0.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-10.30		0.86	☐
	1	13	0.500	3.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	☐
	1	8	0.000	1.500	0.000	2	20.0	Superior	τ_R	-0.17	1.00	0.17	☐
	1	13	0.500	3.000	0.000	1	0.0	Superior	int($\tau_d+\tau_{xy}$)			0.11	☐
	1	8	0.000	1.500	0.000	2	20.0	Superior	int($\sigma_{t/c,90}+\tau_R$			0.17	☐
CC2													
	1	13	0.500	3.000	0.000	1	0.0	Superior	τ_{xy}	-0.11	2.15	0.05	☐
	1	1	0.000	0.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-1.80	14.00	0.13	☐
	1	13	0.500	3.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	14.00	0.00	☐
	1	18	1.000	1.500	0.000	3	44.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	0.68	8.17	0.08	☐
	1	1	0.000	0.000	0.000	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.35	0.00	☐
	1	1	0.000	0.000	0.000	2	20.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-1.80		0.13	☐

◉ Razón máx. de tensiones ○ Valor máx. de tensiones Razón máx.: 0.96 ≤ 1 > 1,0

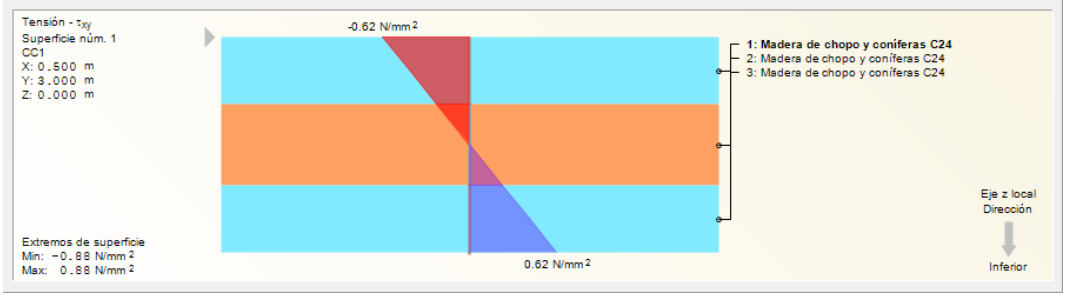


Figura 5.1: Ventana *2.1 Razón máx. de tensiones por carga*

En esta ventana, las razones máximas de tensiones (o valores máximos de tensiones) se visualizan para cada caso de carga, combinación de carga o de resultados que se seleccionó para el cálculo en la ventana *1.1 Datos generales*, pestaña *Estado límite último*. Los números de casos de carga, combinaciones de carga y de resultados se muestran en los encabezados de cada sección de la tabla.

◉ Razón máx. de tensiones ○ Valor máx. de tensiones

Hay dos botones de opción debajo de la tabla. Controlan si la *Razón máx. de tensiones* o el *Valor máx. de tensiones* se enumeran para cada tipo de tensión en la tabla. Para las composiciones con capas de diferentes materiales, pueden haber diferencias entre las razones máximas y los valores máximos de tensiones. Las dos opciones le permiten evaluar los resultados en consecuencia.

Superficie núm.

Esta columna contiene los números de aquellas superficies en las cuales se producen las razones máximas de tensiones o los valores máximos de tensiones. Los resultados se muestran para cada caso de carga calculado.

Punto núm.

En esta columna, los números de los nudos de malla de EF se muestran donde se producen las razones máximas de tensiones o los valores máximos de tensiones. Los tipos de tensiones respectivos se dan en la columna *Símbolo*.

Detalles...

Como alternativa, se enumeran los números de puntos de rejilla, dependiendo de la configuración en el cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Resultados* (véase el Capítulo 4.1.2, página 45). Los puntos de rejilla son una opción para mostrar los resultados independientemente de la malla de EF, según su requisito en RFEM para cada superficie.

© Dlubal Software 2017

Coordenadas del punto

Las coordenadas X, Y, Z globales de cada punto de malla de EF (o punto de rejilla) se especifican en estas columnas.

Capa

En las columnas F hasta H, se enumeran los números de las capas con sus coordenadas *z* y lados donde tienen lugar las razones máximas de tensiones (o valores máximos de tensiones).

Tensiones

Símbolo

En la columna I, se describen los tipos de tensiones cuyos valores se enumeran en la siguiente columna.

Puede reducir o extender la lista de tensiones en el cuadro de diálogo *Detalles* (véase el Capítulo 4.1.1, página 38).

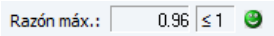
Existente

En esta columna, se enumeran los valores calculados de las tensiones. Se determinan conforme a las ecuaciones que puede revisar en la Tabla 4.2 hasta la Tabla 4.5.

Límite

Los valores límite o las tensiones límite se basan en las propiedades del material especificadas en la ventana *1.3 Resistencias del material* y en la norma seleccionada. La Ecuación 4.17 en la página 46 describe cómo se calculan los valores límite según EN 1995-1-1.

Razón



La razón de la tensión calculada y la tensión límite se enumera para cada componente de tensión. Si no se sobrepasa la tensión límite, la razón es menor o igual a 1 y se cumple el cálculo de tensiones. De este modo, las entradas en la columna L le permiten acceder rápidamente a la eficiencia del cálculo.

La Tabla 5.2 y la Tabla 5.3 ilustran cómo se determinan las razones para los diferentes tipos de tensiones.

© Dlubal Software 2017

Modelo de material isótropo

Tensiones [Pa]	Razones [—]
σ_x	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,x}}{f_{t,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,x}\rvert}{f_{b,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,x} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,x}\rvert}{f_{c,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,x}\rvert}{f_{b,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,x} \leq 0 \end{cases}$
σ_y	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,y}}{f_{t,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,y}\rvert}{f_{b,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,y} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,y}\rvert}{f_{c,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,y}\rvert}{f_{b,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,y} \leq 0 \end{cases}$
σ_1	$= \begin{cases} \frac{\sigma_1}{f_{t,d}} & \text{si } \sigma_1 > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_1\rvert}{f_{c,d}} & \text{si } \sigma_1 \leq 0 \end{cases}$
σ_2	$= \begin{cases} \frac{\sigma_2}{f_{t,d}} & \text{si } \sigma_2 > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_2\rvert}{f_{c,d}} & \text{si } \sigma_2 \leq 0 \end{cases}$
σ_{eqv}	$\frac{\lvert\sigma_{eqv}\rvert}{f_{eqv,d}}$
$\tau_{máx.}$	$\frac{\lvert\tau_{máx.}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{xz}	$\frac{\lvert\tau_{xz}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{xy}	$\frac{\lvert\tau_{xy}\rvert}{f_{v,d}}$
τ_{yz}	$\frac{\lvert\tau_{yz}\rvert}{f_{v,d}}$

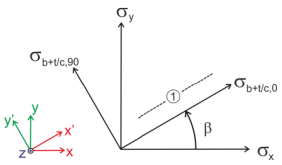
Tabla 5.2: Razones para un modelo de material isótropo

Modelo de material ortótropo

Tensiones [Pa]	Razones [—]	
$\sigma_{b,0}$	$\frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}}$	
$\sigma_{b,90}$	$\frac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}}$	
$\sigma_{t/c,0}$	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,0}}{f_{t,0,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,0} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,0}\rvert}{f_{c,0,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,0} \leq 0 \end{cases}$	
$\sigma_{t/c,90}$	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} \leq 0 \end{cases}$	
$\sigma_{b+t/c,0}$	$= \begin{cases} \frac{\sigma_{t/c,0}}{f_{t,0,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,0} > 0 \\ \frac{\lvert\sigma_{t/c,0}\rvert}{f_{c,0,d}} + \frac{\lvert\sigma_{b,0}\rvert}{f_{b,0,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,0} \leq 0 \end{cases}$	Según: ČSN 73 1702, (127), (128) DIN 1052, (127), (128) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.130), (NA.131)

$\sigma_{b+t/c,90}$	$= \begin{cases} \dfrac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}} + \dfrac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} > 0 \\ \dfrac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}} + \dfrac{\lvert\sigma_{b,90}\rvert}{f_{b,90,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} \leq 0 \end{cases}$	
$\tau_{x'y'}$	$\dfrac{\lvert\tau_{x'y'}\rvert}{f_{xy,d}}$	
$\tau_{y'z'}$	$\dfrac{\lvert\tau_{y'z'}\rvert}{f_{R,d}}$	
int $(\tau_{x'z'} + \tau_{x'y'})$	$\dfrac{\tau^2_{x'z'}}{f^2_{v,d}} + \dfrac{\tau^2_{x'y'}}{f^2_{xy,d}}$	Según: ČSN 73 1702, (129) DIN 1052, (129) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.132)
int $(\sigma_{t/c,90} + \tau_{y'z'})$	$= \begin{cases} \dfrac{\sigma_{t/c,90}}{f_{t,90,d}} + \dfrac{\lvert\tau_{y'z'}\rvert}{f_{R,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} > 0 \\ \dfrac{\lvert\sigma_{t/c,90}\rvert}{f_{c,90,d}} + \dfrac{\lvert\tau_{y'z'}\rvert}{f_{R,d}} & \text{si } \sigma_{t/c,90} \leq 0 \end{cases}$	Según: ČSN 73 1702, (130), (131) DIN 1052, (130), (131) DIN EN 1995-1-1/NA, (NA.133), (NA.134)

Tabla 5.3: Razones para el modelo de material ortótropo



*1 – Dirección de la fibra

Las tensiones $\sigma_{b+t/c,0}$, $\sigma_{b+t/c,90}$, τ_d y τ_R se definen en el sistema de coordenadas de la fibra x', y', z. Se determinan según las fórmulas de transformación

$$\begin{bmatrix} \sigma_{b+t/c,0} \\ \sigma_{b+t/c,90} \\ * \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2\,cs \\ s^2 & c^2 & -2\,cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{T_{3\times3}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_R \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{T_{2\times2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

o, de manera equivalente, en la forma de no matriz

$$\begin{aligned} \sigma_{b+t/c,0} &= c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2\,cs\tau_{xy} \\ \sigma_{b+t/c,90} &= s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2\,cs\tau_{xy} \\ \tau_d &= c\tau_{xz} + s\tau_{yz} \\ \tau_R &= -s\tau_{xz} + c\tau_{yz} \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $s = \text{sen}\,\beta$, $c = \cos\beta$ y β es el ángulo de giro de la capa considerada.

Gráfico en el informe

En la última columna de la tabla, puede seleccionar los diagramas de tensiones que se van a incluir en el informe de RF-LAMINATE (véase el Capítulo 6.2.2, página 62).

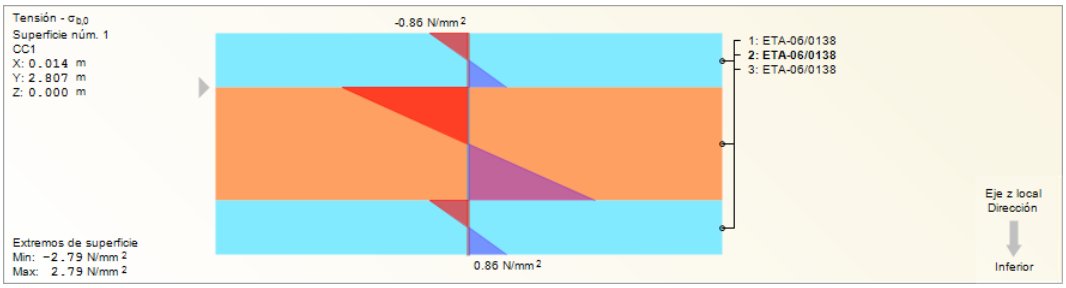


Figura 5.2: Diagrama de tensiones

5.2 Razón máx. de tensiones por superficie

2.2 Razón máx. de tensiones por superficie

Superf. núm.	Punto núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Capa Núm.	z [mm]	Lado	Tensiones [N/mm²] Símbolo	Existente	Límite	Razón [-]	Gráfico en informe
1	18	0.014	2.807	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-2.76	15.33	0.18	
	68	0.992	4.978	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	
	42	0.014	3.772	0.000	CO1	3	59.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	4.90	11.00	0.45	
	1	0.014	2.325	0.000	CC1	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.35	0.00	
	42	0.014	3.772	0.000	CO1	3	59.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	3.32		0.55	
	68	0.992	4.978	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	
	37	1.237	3.772	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\tau_{y'z'}$	0.17	1.00	0.17	
	12	1.237	2.566	0.000	CO1	2	39.0	Intermedio	$\tau_{x'z'}$	-0.34	1.80	0.19	
	68	0.992	4.978	0.000	CO1	1	0.0	Superior	$\tau_{x'y'}$	0.81	1.80	0.45	
	68	0.992	4.978	0.000	CO1	1	0.0	Superior	$int(\tau_{x'z'}+\tau_{x'y'})$			0.20	
	37	1.237	3.772	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$int(\sigma_{t/c,90}+\tau_y$			0.17	
2	18	0.014	2.807	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-2.76	15.33	0.18	
	85	-0.965	2.566	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	
	42	0.014	3.772	0.000	CO1	3	59.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	4.90	11.00	0.45	
	1	0.014	2.325	0.000	CC1	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.35	0.00	
	42	0.014	3.772	0.000	CO1	3	59.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	3.32		0.55	
	85	-0.965	2.566	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	
	113	-1.209	3.772	0.000	CO1	2	19.0	Superior	$\tau_{y'z'}$	-0.17	1.00	0.17	

Razón máx. de tensiones | Valor máx. de tensiones | Razón máx.: 0.55 ≤ 1 | >1

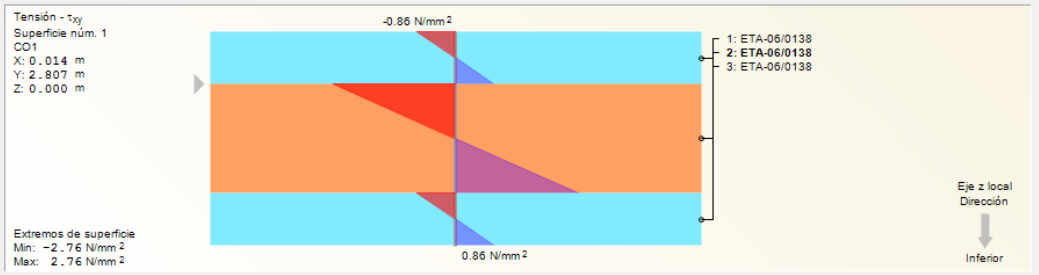


Figura 5.3: Ventana *2.2 Razón máx. de tensiones por superficie*

Razón máx. de tensiones | Valor máx. de tensiones

Esta ventana de resultados contiene las razones máx. de tensiones (o valores máx. de tensiones) para cada superficie calculada. Las columnas de esta tabla se describen en el Capítulo 5.1 anterior.

5.3 Razón máx. de tensiones por composición

2.3 Razón máx. de tensiones por composición

Compos. núm.	Superficie núm.	Capa núm.	Punto núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Capa z [mm]	Lado	Tensiones [N/mm²] Símbolo	Existente	Límite	Razón [-]	Gráfico en informe
1	1	1	42	0.014	3.772	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\sigma_{b,0}$	1.58	15.33	0.10	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	
			42	0.014	3.772	0.000	CO1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	-4.90	20.00	0.24	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.80	0.00	
			42	0.014	3.772	0.000	CO1	0.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-6.48		0.35	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\tau_{y'z'}$	0.00	1.00	0.00	
			37	1.237	3.772	0.000	CO1	19.0	Inferior	$\tau_{x'z'}$	-0.17	1.80	0.09	
			68	0.992	4.978	0.000	CO1	0.0	Superior	$\tau_{x'y'}$	0.81	1.80	0.45	
			68	0.992	4.978	0.000	CO1	0.0	Superior	$int(\tau_{x'z'}+\tau_{x'y'})$			0.20	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	19.0	Inferior	$int(\sigma_{t/c,90}+\tau_y$			0.00	
		2	18	0.014	2.807	0.000	CO1	19.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-2.76	15.33	0.18	
			68	0.992	4.978	0.000	CO1	19.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	59.0	Inferior	$\sigma_{t/c,0}$	0.00	20.00	0.00	
			143	0.748	2.566	0.000	CO1	59.0	Inferior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.80	0.00	
			18	0.014	2.807	0.000	CO1	19.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-2.76		0.18	
			68	0.992	4.978	0.000	CO1	19.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	
			37	1.237	3.772	0.000	CO1	19.0	Superior	$\tau_{y'z'}$	0.17	1.00	0.17	
			12	1.237	2.566	0.000	CO1	39.0	Intermedio	$\tau_{x'z'}$	-0.34	1.80	0.19	

Razón máx. de tensiones | Valor máx. de tensiones | Razón máx.: 0.55 ≤ 1 | >1

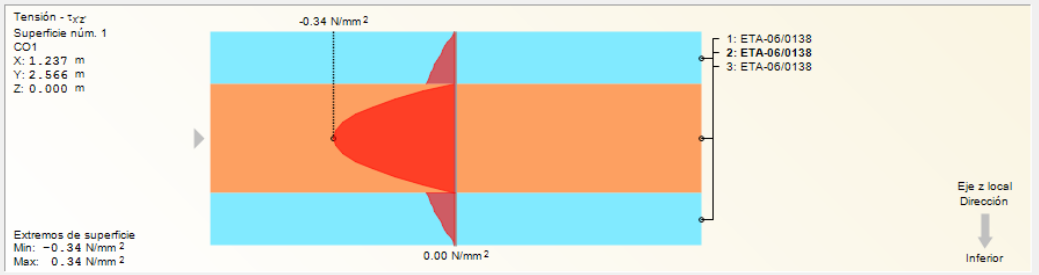


Figura 5.4: Ventana *2.3 Razón máx. de tensiones por composición*

En esta ventana, las razones máximas de tensiones (o valores máximos de tensiones) se enumeran para cada capa de cada composición. Las columnas se describen en el Capítulo 5.1.

5.4 Tensiones en todos los puntos

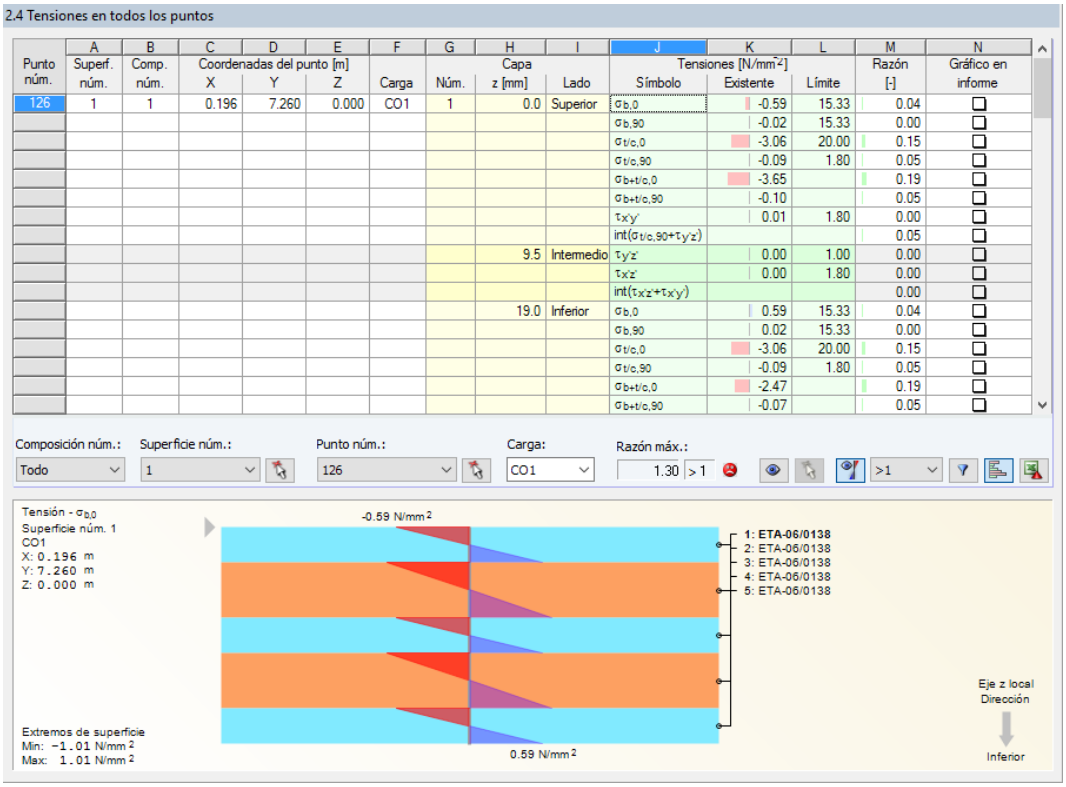
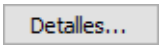


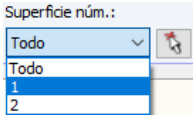
Figura 5.5: Ventana *2.4 Tensiones en todos los puntos*

En esta ventana, se pueden evaluar los resultados para cada punto de malla de EF o punto de rejilla de las capas calculadas. Puede modificar la referencia en el cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Resultados* (véase el Capítulo 4.1.2, página 45).



Para reducir el número de resultados, también puede seleccionar los componentes de la tensión en el cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Tensiones*.

Las columnas de esta tabla se describen en el Capítulo 5.1.



Puede filtrar los datos de acuerdo con las composiciones, superficies, puntos y cargas. Esta selección es posible o bien a partir de las listas debajo de la tabla o eligiendo el punto o la superficie relevante en la ventana de trabajo mediante el botón .

5.5 Desplazamientos máx.

3.1 Desplazamientos máx.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Superf. núm.	Punto núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Tipo de combinación	Desplazamientos [mm] u_z	Límite u_z	Razón u_z [-]
1	73	0.110	4.926	0.000	CC1	Cuasipermanente	0.3	19.5	0.01
	73	0.110	4.926	0.000	CC2	Característica	6.2	9.7	0.64
2	73	0.110	4.926	0.000	CC1	Cuasipermanente	0.3	12.2	0.02
	73	0.110	4.926	0.000	CC2	Característica	6.2	6.1	1.02
3	8	0.118	5.162	0.000	CC1	Cuasipermanente	0.3	14.3	0.02
	8	0.118	5.162	0.000	CC2	Característica	6.2	7.1	0.87
	Desplazamiento máximo / razón máxima de desplazamiento								
2	73	0.110	4.926	0.000	CC2	Característica	6.2	6.1	1.02
	73	0.110	4.926	0.000	CC2	Característica	6.2	6.1	1.02

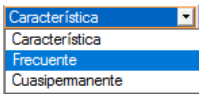
Razón máx.: 1.02 > 1

Figura 5.6: Ventana *3.1 Desplazamientos máx.*

Esta ventana se visualiza cuando haya seleccionado al menos un caso o una combinación de carga para el cálculo en la ventana *1.1 Datos generales*, pestaña *Estado límite de servicio* (véase el Capítulo 3.1.2, página 23). En la tabla, se muestran las flechas máximas para cada caso de carga, combinación de carga y de resultados que se seleccionaron para el cálculo de ELS.

Los resultados se enumeran por números de superficie.

Tipo de combinación



En esta columna, se muestran las situaciones de proyecto que se definieron para los casos y las combinaciones de carga relevantes (véase el Capítulo 3.1.2, página 23).

Desplazamientos

En la columna u_z, se enumeran los desplazamientos determinantes que se producen en la dirección de los ejes *z* locales de las superficies. Esos ejes son perpendiculares al plano de la superficie.

Los valores de la columna *Límite* u_z representan las flechas máximas admisibles. Esos valores se determinan a partir de las longitudes de referencia como se define en la ventana *1.6 Datos de servicio* (véase el Capítulo 3.6, página 35) y a partir de los límites generales, como se especifica en el cuadro de diálogo *Norma*, pestaña *Límites de servicio* (véase el Capítulo 4.2.2, página 48).

Razón

Razón máx.: 0.96 ≤ 1

En la última columna, se muestran las razones del desplazamiento resultante u_z (columna G) y del desplazamiento límite (columna H). Si no se sobrepasan los límites de la deformación, la razón es menor o igual a 1 y se cumple el cálculo de flecha.

5.6 Lista de piezas

4.1 Lista de piezas

Superf. núm.	A Descripción del material	B Espesor t [mm]	C Núm. de capas	D Área [m²]	E Revestimiento [m²]	F Volumen [m³]	G Peso [t]
1	ETA-06/0138	19.0	3	6.942	13.883	0.396	0.190
	ETA-06/0138	30.0	2	6.942	0.000	0.417	0.200
Σ		117.0	5	6.942	13.883	0.812	0.390
2	ETA-06/0138	19.0	3	3.471	6.942	0.198	0.095
	ETA-06/0138	30.0	2	3.471	0.000	0.208	0.100
Σ		117.0	5	3.471	6.942	0.406	0.195
3	ETA-06/0138	19.0	3	3.471	6.942	0.198	0.095
	ETA-06/0138	30.0	2	3.471	0.000	0.208	0.100
Σ		117.0	5	3.471	6.942	0.406	0.195
Σ Total				13.883	27.767	1.624	0.780

Figura 5.7: Ventana *4.1 Lista de piezas*

La última ventana de resultados ofrece una revisión global de las superficies. Los datos sólo se refieren a las superficies calculadas de forma predeterminada. Si desea visualizar la lista de piezas de todas las superficies que contiene el modelo, modifique la configuración en el cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Resultados* (véase el Capítulo 4.1.2, página 45).

Superficie núm.

La lista de piezas se organizan por números de superficie.

Descripción del material

En esta columna, se especifican los materiales de las superficies.

Espesor t

Los espesores de las capas que se enumeran en esta columna se pueden también comprobar en la ventana *1.2 Características del material*. Se resumen las capas con espesores idénticos.

Núm. de capas

Esta columna especifica cuántas capas del mismo material y espesor existen para cada superficie.

Área

Para cada superficie, se da información sobre el área de la superficie de las capas.

Revestimiento

El revestimiento de la superficie se calcula a partir de las áreas de las superficies superiores e inferiores. Se omiten los lados de las superficies de pared bastante fina.

Volumen

El volumen se calcula como el producto del espesor por el área de la superficie.

Peso

En la última columna, se muestra el peso de cada superficie. Esos valores se basan en los volúmenes de las superficies y el peso específico de cada material.

Total

En la última fila de la tabla, puede leer las sumas de las columnas individuales.

© Dlubal Software 2017

6 Informe

6.1 Informe

Como en RFEM, se crea un informe para los datos de RF-LAMINATE al cual puede agregar gráficos y comentarios. En el informe, también puede seleccionar qué datos de entrada y resultados del módulo se van a incluir en el informe.

El informe se describe en el manual de RFEM. En particular, el Capítulo 10.1.3.5 *Seleccionar datos de módulos adicionales* describe cómo se pueden organizar los datos de entrada y salida de los módulos adicionales para el informe.

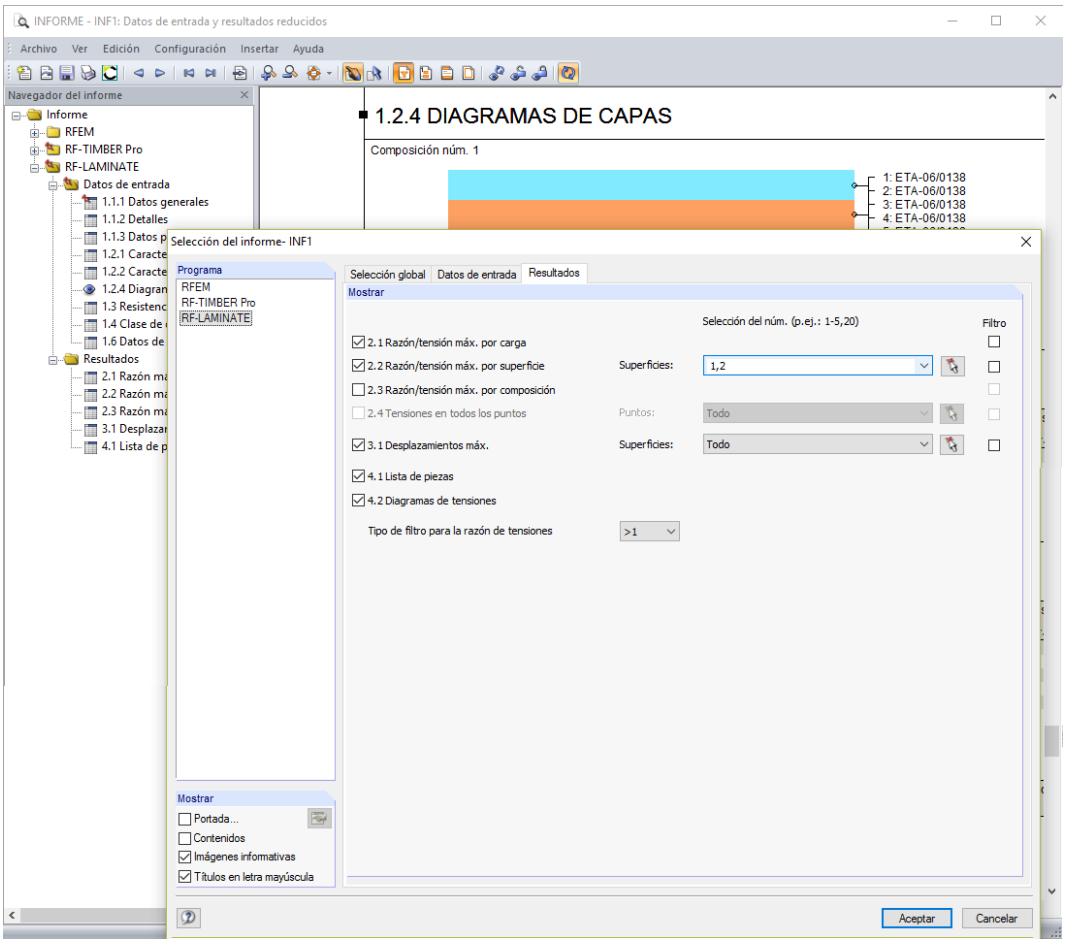


Figura 6.1: Seleccionar temas de RF-LAMINATE en el informe

Puede crear varios informes para cada modelo. Especialmente para sistemas de estructuras complejas se recomienda dividir los datos en varios informes. Por ejemplo, al crear un informe sólo para los datos de RF-LAMINATE, los datos se procesan con mayor rapidez.

El informe sólo incluye los tipos de tensiones que se seleccionaron para la visualización en las ventanas de resultados. Por ejemplo, si desea imprimir las tensiones por cortante de rodadura, tiene que activar las tensiones $\tau_{y'z'}(\tau_R)$ para la visualización en el cuadro de diálogo *Detalles*. El Capítulo 4.1.1 en la página 38 describe cómo se pueden seleccionar esas tensiones.

6.2 Informe gráfico

6.2.1 Resultados en el modelo de RFEM

En RFEM, puede agregar cada vista de la ventana de trabajo para el informe o enviarla directamente a la impresora. De esta forma, puede preparar las tensiones que se visualizan en el modelo de RFEM para el informe.

La impresión de gráficos se describe en el manual de RFEM, Capítulo 10.2.

Puede imprimir las tensiones de RF-LAMINATE actuales en la ventana de trabajo de RFEM usando el comando del menú principal.

Archivo → Imprimir gráfico

o haciendo clic en el botón correspondiente en la barra de herramientas.

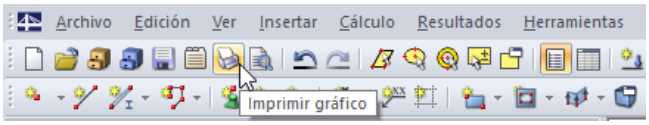


Figura 6.2: Botón *Imprimir gráfico* en la barra de herramientas de RFEM

El mismo botón le permite imprimir los diagramas de resultados de secciones.

Aparece el siguiente cuadro de diálogo.

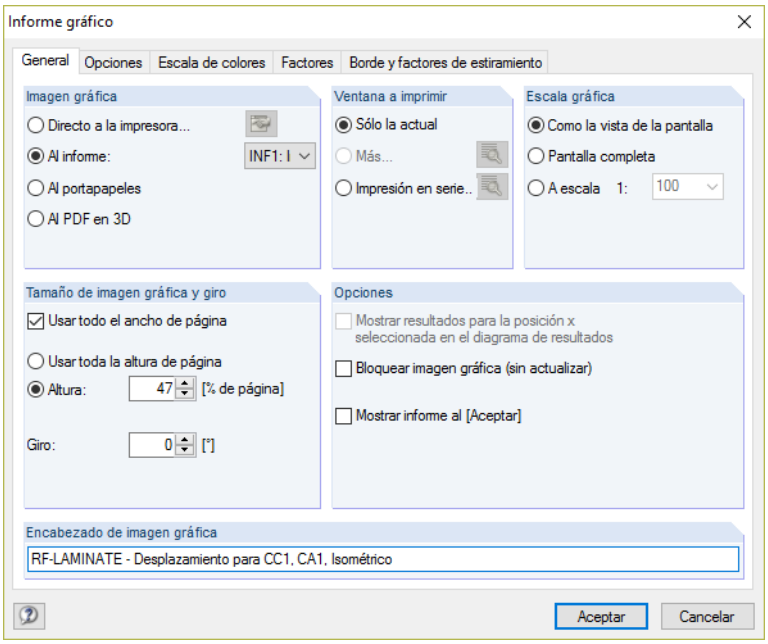
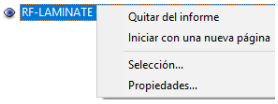


Figura 6.3: Cuadro de diálogo *Informe gráfico*, pestaña *General*

El cuadro de diálogo *Informe gráfico* se describe en detalle en el manual de RFEM, Capítulo 10.2.

En el informe, puede desplazar los gráficos a diferentes posiciones mediante arrastrar y soltar.



Es posible modificar posteriormente las imágenes insertadas: haga clic con el botón secundario del ratón sobre el elemento en el navegador del informe y seleccione la opción *Propiedades* en el menú contextual. El cuadro de diálogo *Informe gráfico* se visualiza una vez más para que así pueda modificar la configuración.

6.2.2 Diagramas de tensiones

N
Gráfico en informe
☐
☑
☑
☐
☑
☐

Las ventanas 2.1, 2.2 y 2.3 de RF-LAMINATE le permiten incorporar diagramas de tensiones al informe. Seleccione las imágenes relevantes en la columna *Gráfico en el informe* como se observa a la izquierda. Según la configuración en la Figura 6.4, se van a imprimir los diagramas de tensiones $\sigma_{b,0}$ en el punto 3 (superficie 1) y en el punto 4 (superficie 2).

2.2 Razón máx. de tensiones por superficie

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Superf. núm.	Punto núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Capa Núm.	z [mm]	Lado	Tensiones [N/mm²] Símbolo	Existente	Límite	Razón [-]	Gráfico en informe
1	3	1.237	2.325	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-11.33	15.33	0.74	☑
	137	1.001	2.569	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	☐
	85	0.092	4.453	0.000	CO1	3	61.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	4.13	11.00	0.38	☐
	1	0.014	2.325	0.000	CO1	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.80	0.00	☐
	3	1.237	2.325	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-11.33		0.74	☐
	137	1.001	2.569	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	☐
	11	1.437	7.753	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\tau_{y'z'}$	0.23	1.00	0.23	☐
	3	1.237	2.325	0.000	CO1	2	47.5	Intermedio	$\tau_{x'z'}$	-0.88	1.80	0.49	☐
	137	1.001	2.569	0.000	CO1	1	0.0	Superior	$\tau_{x'y'}$	-0.87	1.80	0.49	☐
	3	1.237	2.325	0.000	CO1	2	47.5	Intermedio	int($\tau_{x'z'}+\tau_{x'y'}$)			0.24	☐
	11	1.437	7.753	0.000	CO1	2	34.0	Superior	int($\sigma_{t/c,90}+\tau_y$)			0.23	☐
2	4	-1.209	2.325	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-10.62	15.33	0.69	☑
	151	-0.956	2.561	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b,90}$	0.00	15.33	0.00	☐
	85	0.092	4.453	0.000	CO1	3	61.0	Superior	$\sigma_{t/c,0}$	4.13	11.00	0.38	☐
	1	0.014	2.325	0.000	CO1	1	0.0	Superior	$\sigma_{t/c,90}$	0.00	1.80	0.00	☐
	4	-1.209	2.325	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,0}$	-10.62		0.69	☐
	151	-0.956	2.561	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\sigma_{b+t/c,90}$	0.00		0.00	☐
	7	-1.105	5.162	0.000	CO1	2	34.0	Superior	$\tau_{y'z'}$	-0.23	1.00	0.23	☐

◉ Razón máx. de tensiones ○ Valor máx. de tensiones Razón máx.: 0.74 ≤ 1 >1

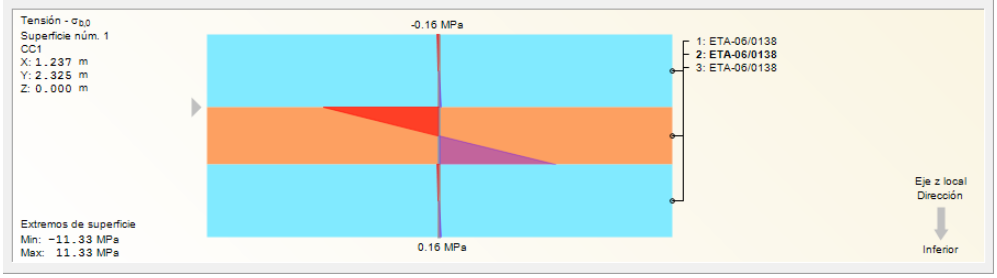


Figura 6.4: Ventana *2.2 Razón máx. de tensiones por superficie*

Al cerrar el módulo con [Aceptar] y abrir el informe, se visualizan las imágenes seleccionadas en el Capítulo *4.2 Diagramas de tensiones*.

4.1 LISTA DE PIEZAS

Superf. núm.	Descripción del material	Espesor t [mm]	Núm. de capas	Área [m²]	Revestim. [m²]	Volumen [m³]	Peso [t]
1	ETA-06/0138	34.0	2	6.942	13.883	0.472	0.227
	ETA-06/0138	27.0	1	6.942	0.000	0.187	0.090
Σ		95.0	3	6.942	13.883	0.659	0.317
2	ETA-06/0138	34.0	2	3.471	6.942	0.236	0.113
	ETA-06/0138	27.0	1	3.471	0.000	0.094	0.045
Σ		95.0	3	3.471	6.942	0.330	0.158
3	ETA-06/0138	34.0	2	3.471	6.942	0.236	0.113
	ETA-06/0138	27.0	1	3.471	0.000	0.094	0.045
Σ		95.0	3	3.471	6.942	0.330	0.158
Σ Total				13.883	27.767	1.319	0.633

4.2 DIAGRAMAS DE TENSIONES

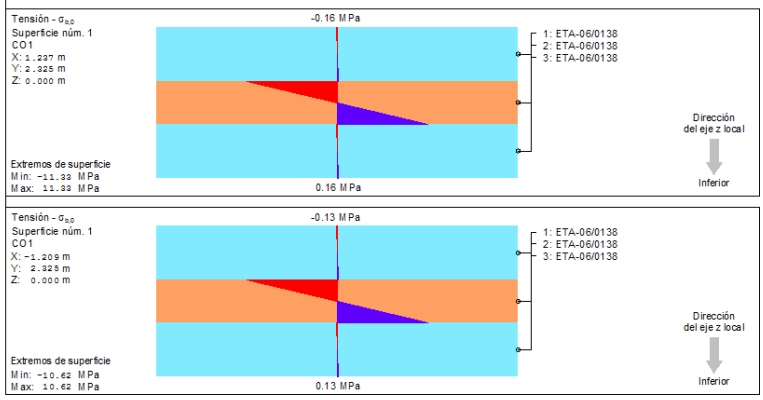


Figura 6.5: Diagramas de tensiones en el informe

7 Funciones generales

Este capítulo describe las funciones de menú y opciones de exportación para calcular resultados.

7.1 Unidades y decimales

Las unidades y decimales para RFEM y todos sus módulos adicionales se gestionan en un cuadro de diálogo. En RF-LAMINATE, puede abrir el cuadro de diálogo desde el menú principal

Configuración → **Unidades y decimales**.

El cuadro de diálogo también es ya familiar de RFEM. RF-LAMINATE está preestablecido en la lista *Programa / Módulo*.

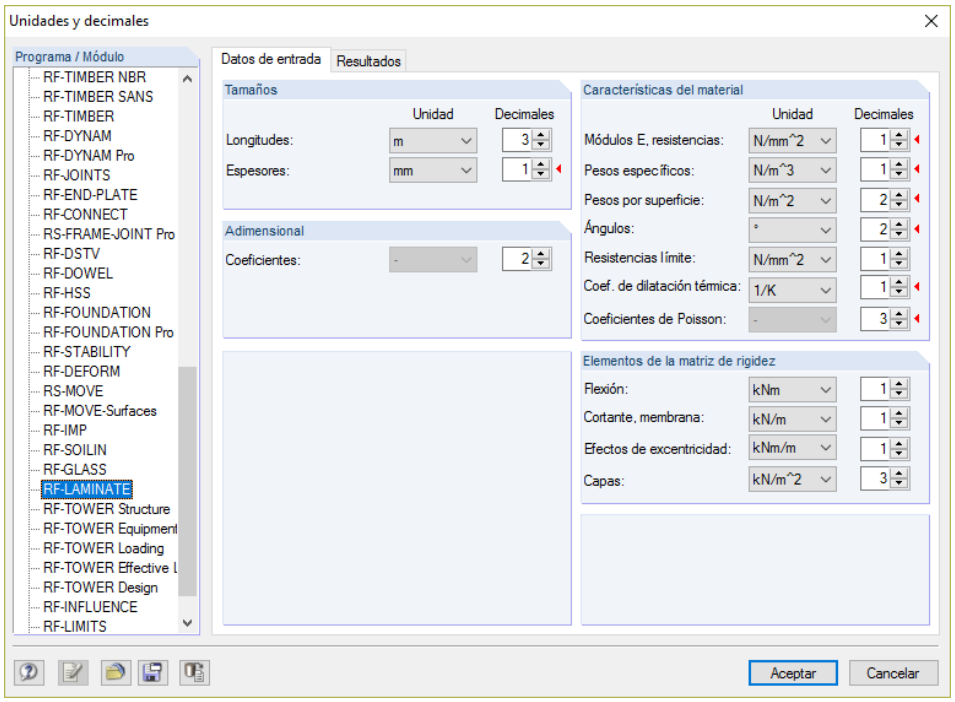


Figura 7.1: Cuadro de diálogo *Unidades y decimales*

En la Figura 7.1, puede ver que algunas unidades están marcadas con una flecha roja, tales como los espesores y las características del material. Esta marca se usa para una orientación rápida en el cuadro de diálogo *Unidades y decimales*, para la actual ventana abierta de RF-LAMINATE. En este caso, se abre la ventana 1.2 *Características del material* en el módulo, por tanto es muy fácil buscar y luego modificar las unidades relacionadas a esta ventana.

Puede guardar la configuración como un perfil definido por el usuario para volver a usarla en otros modelos. Las funciones se describen en el capítulo 11.1.3 del manual de RFEM.

7.2 Exportación de resultados

Puede transferir los resultados del cálculo a otros programas en una variedad de formas.

Portapapeles

Para copiar celdas seleccionadas de una ventana de resultados al portapapeles, use las teclas [Ctrl]+[C]. Por ejemplo, presione [Ctrl]+[V] para insertar las celdas en un programa procesador de textos. Los encabezados de las columnas de tabla no se transferirán.

Informe

Imprima los datos de RF-LAMINATE en el informe global (véase el Capítulo 6.1, página 60). Luego exporte el informe usando el menú principal

Archivo → Exportar a RTF.

Esta función se describe en el capítulo 10.1.11 del manual de RFEM.

Excel / OpenOffice

RF-LAMINATE ofrece una función para exportar datos directamente a MS Excel, OpenOffice Calc, o al formato de archivo CSV. Para abrir el cuadro de diálogo correspondiente, haga clic en

Archivo → Exportar tablas

o use el botón correspondiente.

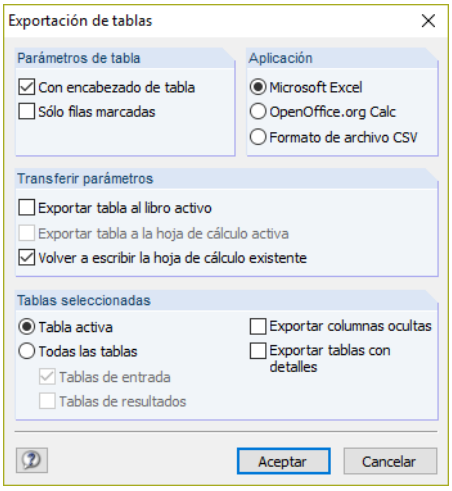
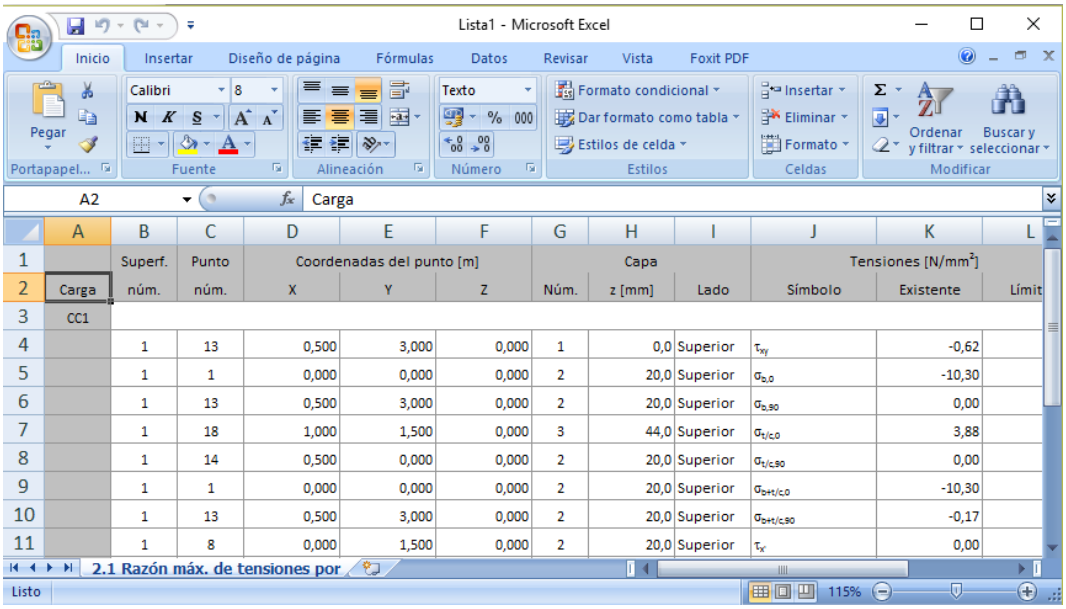


Figura 7.2: Cuadro de diálogo *Exportar - MS Excel*

Cuando haya seleccionado los parámetros relevantes, inicie la exportación haciendo clic en el botón [Aceptar]. Excel u OpenOffice no se ejecutan en segundo plano sino que se inician automáticamente.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Superf.	Punto	Coordenadas del punto [m]				Capa			Tensiones [N/mm²]	
2	Carga	núm.	núm.	X	Y	Z	Núm.	z [mm]	Lado	Símbolo	Existente	Límit
3	CC1											
4		1	13	0,500	3,000	0,000	1	0,0	Superior	τ_{xy}	-0,62	
5		1	1	0,000	0,000	0,000	2	20,0	Superior	$\sigma_{D,0}$	-10,30	
6		1	13	0,500	3,000	0,000	2	20,0	Superior	$\sigma_{D,90}$	0,00	
7		1	18	1,000	1,500	0,000	3	44,0	Superior	$\sigma_{T/C,0}$	3,88	
8		1	14	0,500	0,000	0,000	2	20,0	Superior	$\sigma_{T/C,90}$	0,00	
9		1	1	0,000	0,000	0,000	2	20,0	Superior	$\sigma_{D+T/C,0}$	-10,30	
10		1	13	0,500	3,000	0,000	2	20,0	Superior	$\sigma_{D+T/C,90}$	-0,17	
11		1	8	0,000	1,500	0,000	2	20,0	Superior	$\tau_{x'}$	0,00	

Figura 7.3: Resultados en MS Excel – Hoja de cálculo *2.1 Razón máx. de tensiones por carga*

8 Ejemplos

En este capítulo se introducen varios ejemplos.

8.1 Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez

Se van a determinar los elementos de la matriz de rigidez de una placa de tres capas. Las capas son como sigue:

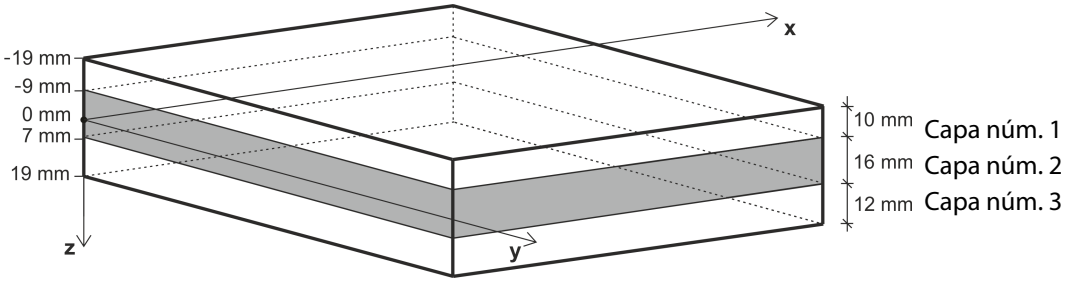


Figura 8.1: Esquema de capas

Las características del material de las capas se muestran en la Figura 8.2.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}	L Peso específico γ [N/m³]
1	Madera de chopo y coníferas	Madera maciza	10.0	0.00	8000.0	270.0	500.0	50.0	500.0	0.000	0.000	3700.0
2	Madera de coníferas C14	Madera maciza	16.0	90.00	7000.0	230.0	440.0	44.0	440.0	0.000	0.000	5000.0
3	Madera de chopo y coníferas	Madera maciza	12.0	0.00	8000.0	270.0	500.0	50.0	500.0	0.000	0.000	3700.0

Figura 8.2: Características del material

Primero, se calculan las matrices de rigideces de las capas individuales.

$$\boldsymbol{d}'_i = \begin{bmatrix} d'_{11,i} & d'_{12,i} & 0 \\ & d'_{22,i} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{x,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \frac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & \dfrac{\nu_{xy,i} E_{y,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \frac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ & \dfrac{E_{y,i}}{1-\nu_{xy,i}^2 \frac{E_{y,i}}{E_{x,i}}} & 0 \\ \text{sim.} & & G_{xy,i} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (8.1)$$

$$\boldsymbol{d}'_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{8\,000}{1-0{,}2^2 \frac{270}{8\,000}} & \dfrac{0{,}2 \cdot 270}{1-0{,}2^2 \frac{270}{8\,000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0{,}2^2 \frac{270}{8\,000}} & 0 \\ \text{sim.} & & 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

Elementos de la matriz

d'11: 8010.81 [MN/m²] d'12: 54.07 [MN/m²]
d'22: 270.36 [MN/m²]
d'33: 500.00 [MN/m²]

Figura 8.3: *Elementos de la matriz* de la capa núm. 1

$$\boldsymbol{d}_2' = \begin{bmatrix} \dfrac{7\,000}{1-0{,}2^2\dfrac{230}{7\,000}} & \dfrac{0{,}2\cdot 230}{1-0{,}2^2\dfrac{270}{7\,000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0{,}2^2\dfrac{230}{7\,000}} & 0 \\ \text{sim.} & & 440 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\,009{,}21 & 46{,}06 & 0 \\ 46{,}06 & 230{,}30 & 0 \\ 0 & 0 & 440{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

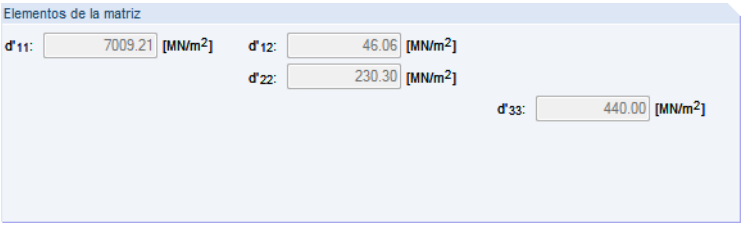


Figura 8.4: *Elementos de la matriz* de la capa núm. 2

$$\boldsymbol{d}_3' = \begin{bmatrix} \dfrac{8\,000}{1-0{,}2^2\dfrac{270}{8\,000}} & \dfrac{0{,}2\cdot 270}{1-0{,}2^2\dfrac{270}{8\,000}} & 0 \\ & \dfrac{270}{1-0{,}2^2\dfrac{270}{8\,000}} & 0 \\ \text{sim.} & & 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

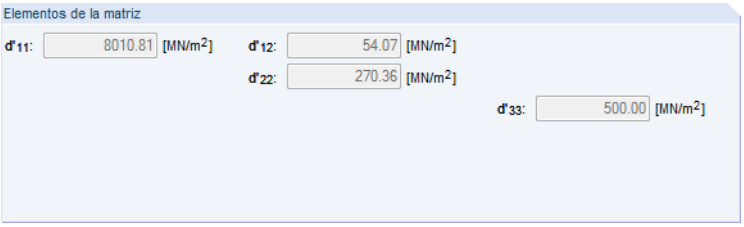
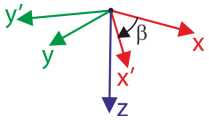


Figura 8.5: *Elementos de la matriz* de la capa núm. 3



Ahora las capas se giran respecto al mismo sistema de coordenadas x, y (sistema local de coordenadas de la superficie). Las capas núm. 1 y 3 tienen la dirección ortótropa $\beta = 0\,°$. Por tanto, se aplica que

$$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{d}_1' = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{d}_3' = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

Ya que la capa núm. 2 gira un ángulo $\beta = 90\,°$, es necesario transformar la matriz de rigidez de la capa núm. 2 al sistema de coordenadas x, y.

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_{11,i} & \mathrm{d}_{12,i} & \mathrm{d}_{13,i} \\ & \mathrm{d}_{22,i} & \mathrm{d}_{23,i} \\ \text{sim.} & & \mathrm{d}_{33,i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{3\times 3,i}^T \boldsymbol{d}_i' \boldsymbol{T}_{3\times 3,i} \tag{8.2}$$

donde

$$\boldsymbol{T}_{3\times 3,i} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}^2 & \mathrm{s}^2 & \mathrm{cs} \\ \mathrm{s}^2 & \mathrm{c}^2 & -\mathrm{cs} \\ -2\mathrm{cs} & 2\mathrm{cs} & \mathrm{c}^2-\mathrm{s}^2 \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \mathrm{c} = \cos(\beta_\mathrm{i}),\ \mathrm{s} = \mathrm{sen}(\beta_\mathrm{i}) \tag{8.3}$$

Los elementos individuales entonces son

$$d_{11,i} = c^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + s^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{12,i} = c^2s^2 d'_{11,i} + s^4 d'_{12,i} + c^4 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} - 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{13,i} = c^3s d'_{11,i} + cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{22,i} - 2c^3s d'_{33,i} + 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{22,i} = s^4 d'_{11,i} + 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^4 d'_{22,i} + 4c^2s^2 d'_{33,i}$$

$$d_{23,i} = cs^3 d'_{11,i} + c^3s d'_{12,i} - cs^3 d'_{12,i} - c^3s d'_{22,i} + 2c^3s d'_{33,i} - 2cs^3 d'_{33,i}$$

$$d_{33,i} = c^2s^2 d'_{11,i} - 2c^2s^2 d'_{12,i} + c^2s^2 d'_{22,i} + \left(c^2 - s^2\right)^2 d'_{33,i}$$

$$c = \cos 90\,^\circ = 0,\ s = \operatorname{sen} 90\,^\circ = 1$$

$$d_{11,2} = 0^4 \cdot 7\,009{,}21 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 46{,}06 + 1^4 \cdot 230{,}30 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 230{,}30\ \mathrm{MN/m^2}$$

$$d_{12,2} = 0^2 \cdot 1^2 \cdot 7\,009{,}21 + 1^4 \cdot 46{,}06 + 0^4 \cdot 46{,}06 + 0^2 \cdot 1^2 \cdot 230{,}30 - 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 46{,}06\,\mathrm{MN/m^2}$$

$$d_{13,2} = 0^3 \cdot 1 \cdot 7\,009{,}21 + 0 \cdot 1^3 \cdot 46{,}06 - 0^3 \cdot 1 \cdot 46{,}06 - 0 \cdot 1^3 \cdot 230{,}30 - 2 \cdot 0^3 \cdot 1 \cdot 440 + 2 \cdot 0 \cdot 1^3 \cdot 440 = 0\mathrm{MN/m^2}$$

$$d_{22,2} = 1^4 \cdot 7\,009{,}21 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 46{,}06 + 0^4 \cdot 230{,}30 + 4 \cdot 0^2 \cdot 1^2 \cdot 440 = 7\,009{,}21\ \mathrm{MN/m^2}$$

$$d_{23,2} = 0 \cdot 1^3 \cdot 7\,009{,}21 + 0^3 \cdot 1 \cdot 46{,}06 - 0 \cdot 1^3 \cdot 46{,}06 - 0^3 \cdot 1 \cdot 230{,}30 + 2 \cdot 0^3 \cdot 1 \cdot 440 - 2 \cdot 0 \cdot 1^3 \cdot 440 = 0\mathrm{MN/m^2}$$

$$d_{33,2} = 0^2 \cdot 1^2 \cdot 7\,009{,}21 - 2 \cdot 0^2 \cdot 1^2 46{,}06 + 0^2 \cdot 1^2 230{,}30 + \left(0^2 - 1^2\right)^2 \cdot 440 = 440{,}00\ \mathrm{MN/m^2}$$

La matriz de rigidez plana de la capa núm. 2 entonces es

$$\boldsymbol{d_2} = \begin{bmatrix} 230{,}30 & 46{,}06 & 0 \\ 46{,}06 & 7\,009{,}21 & 0 \\ 0 & 0 & 440{,}00 \end{bmatrix} \mathrm{MN/m^2}$$

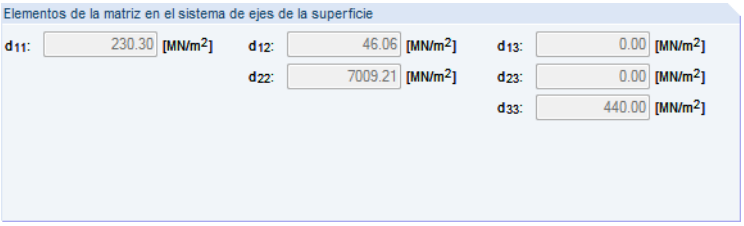


Figura 8.6: *Elementos de la matriz en el sistema de ejes de la superficie* de la capa núm. 2

8.1.1 Con acoplamiento a cortante de capas

Cuando se considera el acoplamiento a cortante de las capas, la matriz de rigidez global tiene la forma

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & \text{sim.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & 0 & 0 & \text{sim.} & \text{sim.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Elementos de la matriz de rigidez – flexión y torsión

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{11,i} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{12,i} \qquad D_{13} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{13,i}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{22,i} \qquad D_{23} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{23,i}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^3 - z_{min,i}^3}{3} d_{33,i}$$

$$D_{11} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 230{,}30 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 = 33{,}85 \text{ kNm}$$

$$D_{12} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 54{,}07 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 46{,}06 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 54{,}07 \cdot 10^3 = 0{,}24 \text{ kNm}$$

$$D_{13} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ kNm}$$

$$D_{22} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 270{,}36 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 7\,009{,}21 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 270{,}36 \cdot 10^3 = 3{,}64 \text{ kNm}$$

$$D_{23} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ kNm}$$

$$D_{33} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^3 - (-19 \cdot 10^{-3})^3}{3} 500 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^3 - (-9 \cdot 10^{-3})^3}{3} 440 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^3 - (7 \cdot 10^{-3})^3}{3} 500 \cdot 10^3 = 2{,}26 \text{ kNm}$$

Elementos de la matriz de rigidez – efectos de excentricidad

$$D_{16} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{11,i} \qquad D_{17} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{12,i} \qquad D_{18} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{13,i}$$

$$D_{27} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{22,i} \qquad D_{28} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{23,i}$$

$$D_{38} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{max,i}^2 - z_{min,i}^2}{2} d_{33,i}$$

$$D_{16} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 230{,}30 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 = 124{,}49 \text{ kNm/m}$$

$$D_{17} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 54{,}07 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 46{,}06 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 54{,}07 \cdot 10^3 = 0{,}13 \text{ kNm/m}$$

$$D_{18} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ kNm/m}$$

$$D_{27} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 270{,}36 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 7\,009{,}21 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 270{,}36 \cdot 10^3 = -107{,}82 \text{ kNm/m}$$

$$D_{28} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ kNm/m}$$

$$D_{38} = \frac{(-9 \cdot 10^{-3})^2 - (-19 \cdot 10^{-3})^2}{2} 500 \cdot 10^3 + \frac{(7 \cdot 10^{-3})^2 - (-9 \cdot 10^{-3})^2}{2} 440 \cdot 10^3 + \\ + \frac{(19 \cdot 10^{-3})^2 - (7 \cdot 10^{-3})^2}{2} 500 \cdot 10^3 = 0{,}96 \text{ kNm/m}$$

Elementos de la matriz de rigidez – membrana

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{11,i} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{12,i} \qquad D_{68} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{13,i}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{22,i} \qquad D_{78} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{23,i}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{33,i}$$

$$D_{66} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,010{,}81 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 230{,}30 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,010{,}81 \cdot 10^3 = 179\,923 \text{ N/m}$$

$$D_{67} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 54{,}07 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 46{,}06 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 54{,}07 \cdot 10^3 = 1\,927 \text{ N/m}$$

$$D_{68} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 46{,}06 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ N/m}$$

$$D_{77} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 270{,}36 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 7\,009{,}21 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 270{,}36 \cdot 10^3 = 118\,095 \text{ N/m}$$

$$D_{78} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 0 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 0 \cdot 10^3 = 0 \text{ N/m}$$

$$D_{88} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 440 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^3 = 18\,040 \text{ N/m}$$

© Dlubal Software 2017

Elementos de la matriz de rigidez – cortante

1. El ángulo $\varphi = 0\,°$ define el sistema de coordenadas x'', y'' con la rigidez máxima.
2. Las rigideces a cortante $G''_{xz,i}$, $G''_{yz,i}$ para cada capa en el sistema de coordenadas x'', y'' se definen mediante la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned}
G''_{xz,i} &= \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \operatorname{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \\
G''_{yz,i} &= \operatorname{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \qquad i = 1,\ldots,n \\
G''_{xz,1} &= G''_{xz,3} = \cos^2(0\,°)\,500 + \operatorname{sen}^2(0\,°)\,50 = 500\ \mathrm{MN/m^2} \\
G''_{yz,1} &= G''_{yz,3} = \operatorname{sen}^2(0\,°)\,500 + \cos^2(0\,°)\,50 = 50\ \mathrm{MN/m^2} \\
G''_{xz,2} &= \cos^2(-90\,°)\,440 + \operatorname{sen}^2(-90\,°)\,44 = 44\ \mathrm{MN/m^2} \\
G''_{yz,2} &= \operatorname{sen}^2(-90\,°)\,440 + \cos^2(-90\,°)\,44 = 440\ \mathrm{MN/m^2}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

3. Se define la matriz de rigidez plana $\boldsymbol{d}''_i$

$$\boldsymbol{d}''_i = \boldsymbol{T}^{-T}_{3\times3,i}\, \boldsymbol{d}'_i\, \boldsymbol{T}^{-1}_{3\times3,i} \tag{8.6}$$

donde

$$\boldsymbol{T}_{3\times3,i} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \text{ donde } c = \cos(\varphi - \beta_i),\ s = \operatorname{sen}(\varphi - \beta_i),\ i = 1,\ldots,n \tag{8.7}$$

$$\boldsymbol{T}_{3\times3,1} = \boldsymbol{T}_{3\times3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_{3\times3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}''_1 = \boldsymbol{d}''_3 = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \mathrm{MN/m^2}$$

$$\boldsymbol{d}''_2 = \begin{bmatrix} 230{,}30 & 46{,}06 & 0 \\ 46{,}06 & 7\,009{,}21 & 0 \\ 0 & 0 & 440{,}00 \end{bmatrix} \mathrm{MN/m^2}$$

De la matriz de rigidez $\boldsymbol{d}''_i$, se extraen los módulos de Young $E''_{x,i}$, $E''_{y,i}$

$$E''_{x,i} = d''_{11,i} + \frac{2d''_{12,i}d''_{13,i}d''_{23,i} - d''_{22,i}\left(d''_{13,i}\right)^2 - d''_{33,i}\left(d''_{12,i}\right)^2}{d''_{22,i}d''_{33,i} - \left(d''_{23,i}\right)^2} \tag{8.8}$$

$$E''_{y,i} = d''_{22,i} + \frac{2d''_{12,i}d''_{13,i}d''_{23,i} - d''_{22,i}\left(d''_{23,i}\right)^2 - d''_{33,i}\left(d''_{12,i}\right)^2}{d''_{11,i}d''_{33,i} - \left(d''_{13,i}\right)^2} \tag{8.9}$$

$$E''_{x,1} = E''_{x,3} = 8\,010{,}81 + \frac{2\cdot 54{,}07\cdot 0\cdot 0 - 270{,}36\,(0)^2 - 500{,}00\,(54{,}07)^2}{270{,}36\cdot 500{,}00 - (0)^2} = 8\,000{,}00\mathrm{MN/m^2}$$

$$E''_{x,2} = 230{,}30 + \frac{2\cdot 46{,}06\cdot 0\cdot 0 - 7\,009{,}21\,(0)^2 - 440{,}00\,(46{,}06)^2}{7\,009{,}21\cdot 440{,}00 - (0)^2} = 230{,}00\ \mathrm{MN/m^2}$$

$$E''_{y,1} = E''_{y,3} = 270{,}36 + \frac{2\cdot 54{,}07\cdot 0\cdot 0 - 8\,010{,}81\,(0)^2 - 500{,}00\,(54{,}07)^2}{8\,010{,}81\cdot 500{,}00 - (0)^2} = 270{,}00\mathrm{MN/m^2}$$

$$E''_{y,2} = 7\,009{,}21 + \frac{2\cdot 46{,}06\cdot 0\cdot 0 - 230{,}30\,(0)^2 - 440{,}00\,(46{,}06)^2}{230{,}30\cdot 440{,}00 - (0)^2} = 7\,000\ \mathrm{MN/m^2}$$

4. En el sistema de coordenadas x'', y'', los valores $D''_{44,\text{cálc}}$ y $D''_{55,\text{cálc}}$ se definen como sigue.

$$D''_{44,\text{cálc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G''_{xz}(z)} \left(\frac{\int_{z}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,(\bar{z} - z_{0,x})\,d\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,(\bar{z} - z_{0,x})^2\,d\bar{z}} \right)^2 dz}, \quad z_{0,x} = \frac{\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,\bar{z}\,d\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} E''_x(\bar{z})\,d\bar{z}} \tag{8.10}$$

$D''_{44,\text{cálc}} = 2\,128{,}07$ kN/m

$$D''_{55,\text{cálc}} = \frac{1}{\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2} \frac{1}{G''_{yz}(z)} \left(\frac{\int_{z}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,(\bar{z} - z_{0,y})\,d\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,(\bar{z} - z_{0,y})^2\,d\bar{z}} \right)^2 dz}, \quad z_{0,y} = \frac{\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,\bar{z}\,d\bar{z}}{\int_{-t/2}^{t/2} E''_y(\bar{z})\,d\bar{z}} \tag{8.11}$$

$D''_{55,\text{cálc}} = 7\,085{,}28$ kN/m

Los valores de las rigideces D_{44} y D_{55} se dan con las siguientes fórmulas.

$$D''_{44} = \text{máx}\left(D''_{44,\text{cálc}},\ \frac{48}{5\,\ell^2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\dfrac{z^3_{\text{máx},i} - z^3_{\text{mín},i}}{3}}} \right) \tag{8.12}$$

$$D''_{55} = \text{máx}\left(D''_{55,\text{cálc}},\ \frac{48}{5\,\ell^2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i}\dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i}\dfrac{z^3_{\text{máx},i} - z^3_{\text{mín},i}}{3}}} \right) \tag{8.13}$$

donde ℓ es la longitud media de las líneas alrededor de la superficie como un "cuadro".

$$\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\frac{t_i^3}{12} = 8\,000\,000\frac{0{,}010^3}{12} + 230\,000\frac{0{,}016^3}{12} + 8\,000\,000\frac{0{,}012^3}{12} = 1{,}897 \text{ kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\frac{z^3_{\text{máx},i} - z^3_{\text{mín},i}}{3} = 8\,000\,000\frac{(-0{,}009)^3 - (-0{,}019)^3}{3} +$$

$$+ 230\,000\frac{0{,}007^3 - (-0{,}009)^3}{3} + 8\,000\,000\frac{0{,}019^3 - 0{,}007^3}{3} =$$

$$= 33{,}805 \text{ kNm}$$

$$D''_{44} = \text{máx}\left(2\,128{,}07,\ \frac{48}{5\cdot 1^2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{1{,}897} - \dfrac{1}{33{,}805}} \right) = \text{máx}\,(2\,128{,}07,\ 19{,}30) = 2\,128{,}07\text{kN/m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i}\frac{t_i^3}{12} = 270\,000\frac{0{,}010^3}{12} + 7\,000\,000\frac{0{,}016^3}{12} + 270\,000\frac{0{,}012^3}{12} = 2{,}451 \text{ kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E''_{y,i}\frac{z^3_{\text{máx},i} - z^3_{\text{mín},i}}{3} = 270\,000\frac{(-0{,}009)^3 - (-0{,}019)^3}{3} +$$

$$+ 7\,000\,000\frac{0{,}007^3 - (-0{,}009)^3}{3} + 270\,000\frac{0{,}019^3 - 0{,}007^3}{3} =$$

$$= 3{,}640 \text{ kNm}$$

$$D''_{55} = \text{máx}\left(7\,085{,}28,\ \frac{48}{5\cdot 1^2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{2{,}451}-\dfrac{1}{3{,}640}}\right) = \text{máx}\,(7\,085{,}28,\ 72{,}03) = 7\,085{,}28\ \text{kN/m}$$

5. Las rigideces D_{44}, D_{55} y D_{45} se obtienen transformando los valores D''_{44}, D''_{55} a partir del sistema de coordenadas x'', y'' al anterior sistema de coordenadas x, y (sistema local de coordenadas de la superficie).

$$\begin{aligned}
D_{44} &= \cos^2(\varphi)\,D''_{44} + \text{sen}^2(\varphi)\,D''_{55}\\
D_{55} &= \text{sen}^2(\varphi)\,D''_{44} + \cos^2(\varphi)\,D''_{55}\\
D_{45} &= \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\left(D''_{44} - D''_{55}\right)\\
D_{44} &= \cos^2(0\,°)\cdot 2\,128{,}07 + \text{sen}^2(0\,°)\cdot 7\,085{,}28 = 2\,128{,}07\ \text{kNm}\\
D_{55} &= \text{sen}^2(0\,°)\cdot 2\,128{,}07 + \cos^2(0\,°)\cdot 7\,085{,}28 = 7\,085{,}28\ \text{kNm}\\
D_{45} &= \text{sen}(0\,°)\cdot\cos(0\,°)\cdot(2\,128{,}07 - 7\,085{,}28) = 0{,}00\ \text{kNm}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Matriz de rigidez global

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
33{,}85 & 0{,}24 & 0 & 0 & 0 & 124{,}49 & 0{,}13 & 0\\
 & 3{,}64 & 0 & 0 & 0 & 0{,}13 & -107{,}82 & 0\\
 & & 2{,}26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}96\\
 & & & 2\,128{,}07 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 7\,085{,}28 & 0 & 0 & 0\\
 & & \text{sim.} & & & 179\,923 & 1\,927 & 0\\
 & & & & & & 118\,095 & 0\\
 & & & & & & & 18\,040
\end{bmatrix}$$

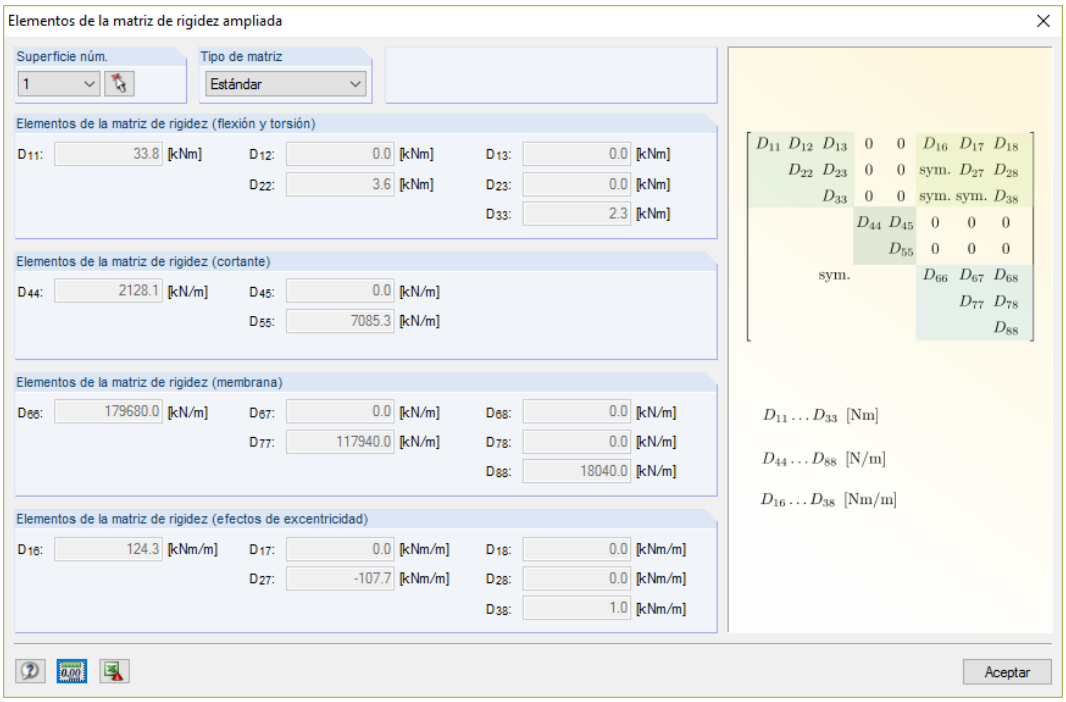


Figura 8.7: Cuadro de diálogo *Elementos de la matriz de rigidez ampliada* – con acoplamiento a cortante de capas

8.1.2 Sin acoplamiento a cortante de capas

Los ángulos β_i son múltiplos de 90 °. Por tanto, la matriz de rigidez global tiene la forma

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sim.} & & & D_{66} & D_{67} & 0 \\ & & & & & & D_{77} & 0 \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

Elementos de la matriz de rigidez – flexión y torsión

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{11,i} \qquad D_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{12,i}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{22,i}$$

$$D_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^3}{12} d_{33,i}$$

$$\boldsymbol{d_1} = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\boldsymbol{d_2} = \begin{bmatrix} 230{,}30 & 46{,}06 & 0 \\ 46{,}06 & 7\,009{,}21 & 0 \\ 0 & 0 & 440{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$\boldsymbol{d_3} = \begin{bmatrix} 8\,010{,}81 & 54{,}07 & 0 \\ 54{,}07 & 270{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 500{,}00 \end{bmatrix} \text{MN/m}^2$$

$$D_{11} = \frac{0{,}010^3}{12} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 + \frac{0{,}016^3}{12} 230{,}30 \cdot 10^3 + \frac{0{,}012^3}{12} 8\,010{,}81 \cdot 10^3 = 1{,}900 \text{ kNm}$$

$$D_{12} = \frac{0{,}010^3}{12} 54{,}07 \cdot 10^3 + \frac{0{,}016^3}{12} 46{,}06 \cdot 10^3 + \frac{0{,}012^3}{12} 54{,}07 \cdot 10^3 = 0{,}028 \text{ kNm}$$

$$D_{22} = \frac{0{,}010^3}{12} 270{,}36 \cdot 10^3 + \frac{0{,}016^3}{12} 7\,009{,}21 \cdot 10^3 + \frac{0{,}012^3}{12} 270{,}36 \cdot 10^3 = 2{,}454 \text{ kNm}$$

$$D_{33} = \frac{0{,}010^3}{12} 500 \cdot 10^3 + \frac{0{,}016^3}{12} 440{,}00 \cdot 10^3 + \frac{0{,}012^3}{12} 500 \cdot 10^3 = 0{,}264 \text{ kNm}$$

Elementos de la matriz de rigidez – membrana

$$D_{66} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{11,i} \qquad D_{67} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{12,i}$$

$$D_{77} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{22,i}$$

$$D_{88} = \sum_{i=1}^{n} t_i d_{33,i}$$

$$D_{66} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,010{,}81 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 230{,}30 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,010{,}81 \cdot 10^3 = 179\,923 \text{ N/m}$$

$$D_{67} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 54{,}07 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 46{,}06 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 54{,}07 \cdot 10^3 = 1\,927 \text{ N/m}$$

$$D_{77} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 270{,}36 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 7\,009{,}21 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 270{,}36 \cdot 10^3 = 118\,095 \text{ N/m}$$

$$D_{77} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^{-3} \cdot 440 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 10^3 = 18\,040 \text{ N/m}$$

Elementos de la matriz de rigidez – cortante

1) El ángulo $\varphi = 0\,°$ define el sistema de coordenadas x″, y″ con la rigidez máxima.

2) Las rigideces a cortante $G''_{xz,i}$ y $G''_{yz,i}$ de cada capa en el sistema de coordenadas x″, y″ se definen como sigue.

$$
\begin{aligned}
G''_{xz,i} &= \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \text{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \\
G''_{yz,i} &= \text{sen}^2(\varphi - \beta_i)\, G_{xz,i} + \cos^2(\varphi - \beta_i)\, G_{yz,i} \qquad i = 1,\ldots,n \\
G''_{xz,1} &= G''_{xz,3} = \cos^2(0\,°)\,500 + \text{sen}^2(0\,°)\,50 = 500\ \text{MN/m}^2 \\
G''_{yz,1} &= G''_{yz,3} = \text{sen}^2(0\,°)\,500 + \cos^2(0\,°)\,50 = 50\ \text{MN/m}^2 \\
G''_{xz,2} &= \cos^2(-90\,°)\,440 + \text{sen}^2(-90\,°)\,44 = 44\ \text{MN/m}^2 \\
G''_{yz,2} &= \text{sen}^2(-90\,°)\,440 + \cos^2(-90\,°)\,44 = 440\ \text{MN/m}^2
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

3) En el sistema de coordenadas x″, y″, los valores D''_{44} y D''_{55} se calculan según las siguientes fórmulas, considerando $D''_{45} = 0$.

$$D''_{44} = \frac{5}{6}\sum_{i=1}^{n} G''_{xz,i}\, t_i \tag{8.17}$$

$$D''_{55} = \frac{5}{6}\sum_{i=1}^{n} G''_{yz,i}\, t_i \tag{8.18}$$

$$
\begin{aligned}
D''_{44} &= \frac{5}{6}500 \cdot 10^3 \cdot 0{,}010 + \frac{5}{6} \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot 0{,}016 + \frac{5}{6}500 \cdot 10^3 \cdot 0{,}012 = 9\,753\ \text{kN/m} \\
D''_{55} &= \frac{5}{6}50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}010 + \frac{5}{6} \cdot 440 \cdot 10^3 \cdot 0{,}016 + \frac{5}{6}50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}012 = 6\,783\ \text{kN/m}
\end{aligned}
$$

4) Las rigideces D_{44}, D_{55} y D_{45} se obtienen transformando los valores D''_{44} y D''_{55} a partir del sistema de coordenadas x″, y″ al anterior sistema de coordenadas x, y (sistema local de coordenadas de la superficie).

$$
\begin{aligned}
D_{44} &= \cos^2(\varphi)\, D''_{44} + \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{55} \\
D_{55} &= \text{sen}^2(\varphi)\, D''_{44} + \cos^2(\varphi)\, D''_{55} \\
D_{45} &= \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\left(D''_{44} - D''_{55}\right) \\
D_{44} &= \cos^2(0\,°) \cdot 9\,753 + \text{sen}^2(0\,°) \cdot 6\,783 = 9\,753\ \text{kNm} \\
D_{55} &= \text{sen}^2(0\,°) \cdot 9\,753 + \cos^2(0\,°) \cdot 6\,783 = 6\,783\ \text{kNm} \\
D_{45} &= \text{sen}(0\,°) \cdot \cos(0\,°) \cdot (9\,753 - 6\,783) = 0{,}00\ \text{kNm}
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Matriz de rigidez global

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix}
1{,}900 & 0{,}028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2{,}454 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0{,}264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 9\,753 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 6\,783 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{sim.} & & & 179\,923 & 1\,927 & 0 \\
 & & & & & & 118\,095 & 0 \\
 & & & & & & & 18\,040
\end{bmatrix}
$$

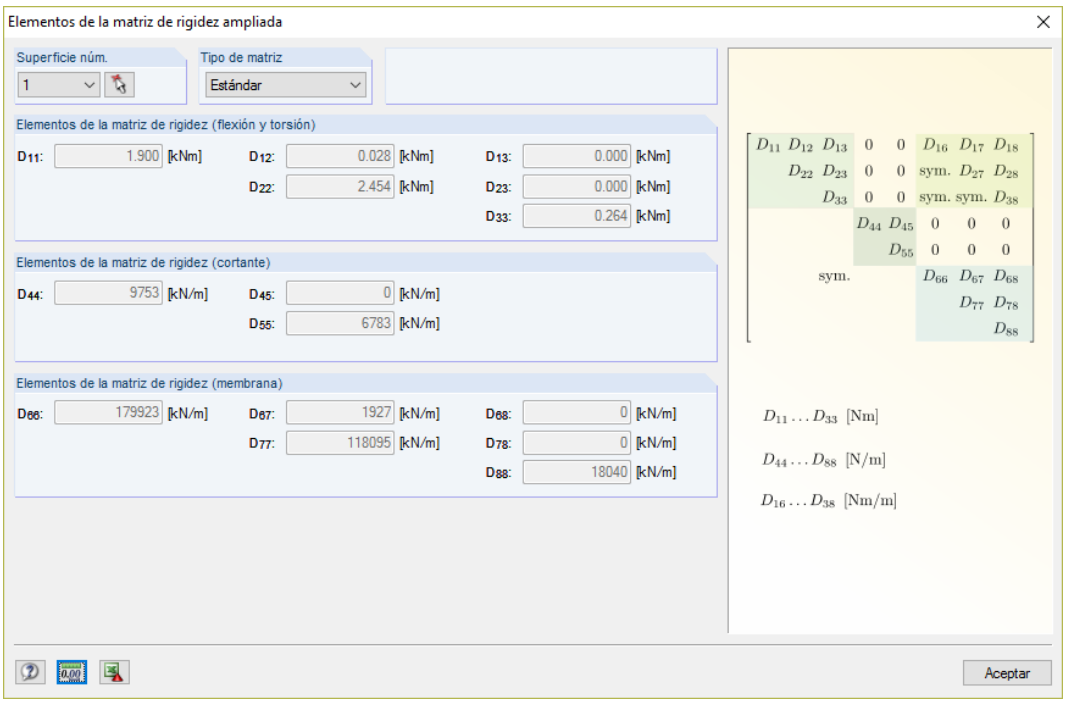


Figura 8.8: Cuadro de diálogo *Elementos de la matriz de rigidez ampliada* – sin acoplamiento a cortante de capas

8.2 Cálculo de tensiones

Se van a determinar las tensiones para la placa de tres capas del ejemplo anterior.

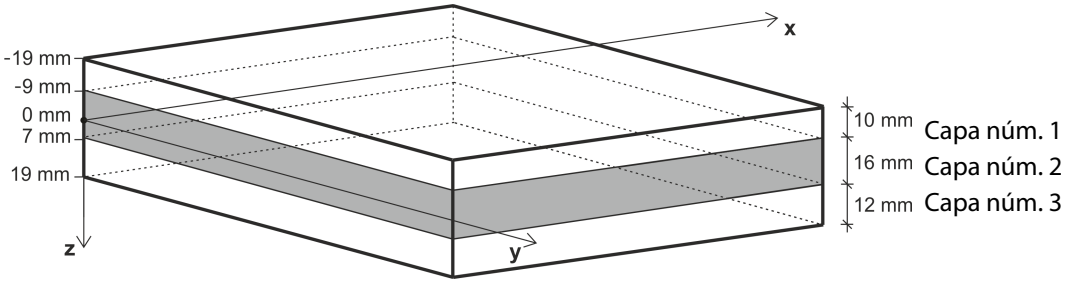


Figura 8.9: Esquema de capas

Las características del material se visualizan en la Figura 8.10.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B Categoría del factor	C Espesor t [mm]	D Dirección ortótropa β [°]	E Módulo de elasticidad [N/mm²] E_x	F E_y	G Módulo de cortante [N/mm²] G_{xz}	H G_{yz}	I G_{xy}	J Coef. de Poisson [-] ν_{xy}	K ν_{yx}	L Peso específico γ [N/m³]
1	Madera de chopo y coníferas	Madera maciza	10.0	0.00	8000.0	270.0	500.0	50.0	500.0	0.000	0.000	3700.0
2	Madera de coníferas C14	Madera maciza	16.0	90.00	7000.0	230.0	440.0	44.0	440.0	0.000	0.000	5000.0
3	Madera de chopo y coníferas	Madera maciza	12.0	0.00	8000.0	270.0	500.0	50.0	500.0	0.000	0.000	3700.0

Figura 8.10: Características del material

En el ejemplo anterior del Capítulo 8.1, se calcularon los elementos de la matriz de rigidez considerando y sin considerar los efectos de acoplamiento a cortante. Las tensiones de la placa difieren en consecuencia.

La placa tiene las dimensiones 1,0 × 1,5 m. Está simplemente apoyada y cargada con una carga superficial de 5 kN/m^2.

8.2.1 Cálculo de componentes de tensiones

El método de elementos finitos de RFEM somete las tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz}. La Figura 8.11 y la Figura 8.12 muestran los valores de tensiones en el punto de coordenadas $[0{,}8, 0{,}8, 0]$ de la capa *Intermedia*. En la primera imagen, se considera el acoplamiento a cortante de capas, en la segunda no.

2.4 Tensiones en todos los puntos

Punto núm.	Superf. núm.	Comp. núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Capa Núm.	z [mm]	Lado	Tensiones [N/mm²] Símbolo	Existente	Límite	Razón [-]	Gráfico en informe
							2	10.0	Superior	σ_x	-27.54			
										σ_y	-145.25			
										τ_{xy}	3.80	2000.00	0.00	
								18.0	Intermedio	σ_x	-4.70			
										σ_y	-6.08			
										τ_{xy}	0.38	2000.00	0.00	
								26.0	Inferior	σ_x	18.15			
										σ_y	133.09			
										τ_{xy}	-3.05	2000.00	0.00	
							3	26.0	Superior	σ_x	602.52			
										σ_y	9.06			
										τ_{xy}	-3.46	3200.00	0.00	
								32.0	Intermedio	σ_x	1176.15			
										σ_y	16.83			
										τ_{xy}	-6.38	3200.00	0.00	
								38.0	Inferior	σ_x	1749.79			
										σ_y	24.59			

Composición núm.: Todo | Superficie núm.: Todo | Punto núm.: 1985 | Carga: Todo | Razón máx.: 0.13 ≤ 1

Figura 8.11: Ventana *2.4 Tensiones en todos los puntos* – con acoplamiento a cortante de capas

2.4 Tensiones en todos los puntos

Punto núm.	Superf. núm.	Comp. núm.	Coordenadas del punto [m] X	Y	Z	Carga	Capa Núm.	z [mm]	Lado	Tensiones [N/mm²] Símbolo	Existente	Límite	Razón [-]	Gráfico en informe
							2	10.0	Superior	σ_x	-344.92			
										σ_y	-3587.61			
										τ_{xy}	95.89	2000.00	0.05	
								18.0	Intermedio	σ_x	0.00			
										σ_y	0.00			
										τ_{xy}	0.00	2000.00	0.00	
								26.0	Inferior	σ_x	344.92			
										σ_y	3587.61			
										τ_{xy}	-95.89	2000.00	0.05	
							3	26.0	Superior	σ_x	-8414.69			
										σ_y	-158.59			
										τ_{xy}	81.73	3200.00	0.03	
								32.0	Intermedio	σ_x	0.00			
										σ_y	0.00			
										τ_{xy}	0.00	3200.00	0.00	
								38.0	Inferior	σ_x	8414.69			
										σ_y	158.59			

Composición núm.: Todo | Superficie núm.: Todo | Punto núm.: 1985 | Carga: Todo | Razón máx.: 0.76 ≤ 1

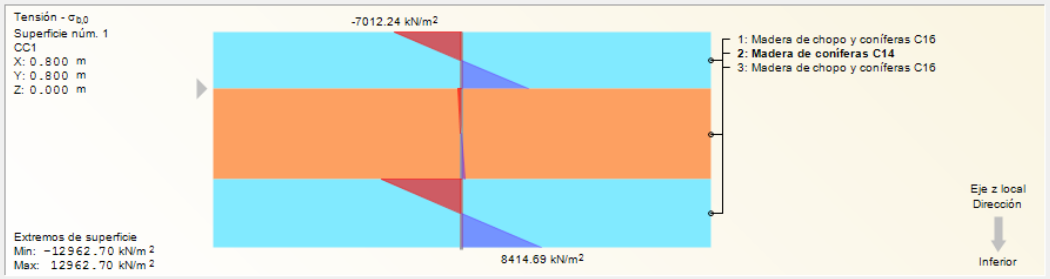


Figura 8.12: Ventana *2.4 Tensiones en todos los puntos* – sin acoplamiento a cortante de capas

El cálculo de los componentes de tensiones individuales es similar en ambos casos. Por tanto, sólo se presenta el caso con acoplamiento a cortante de capas con los siguientes valores.

Punto	Lado	σ_x [kPa]	σ_y [kPa]	τ_{xy} [kPa]
x = 0,8 m, y = 0,8 m, Capa núm. 2	Superior	−27,54	−145,25	3,80
	Intermedio	−4,70	−6,08	0,38
	Inferior	18,15	133,09	−3,05

Tabla 8.1: Tensiones en la capa núm. 2 – con acoplamiento a cortante

La capa intermedia gira un ángulo de $\beta = 90\,°$.

$$\sigma_{b+t/c,0} = \sigma_x \cos^2\beta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\beta + \sigma_y\,\text{sen}^2\beta$$

$$\sigma_{b+t/c,0(\text{superior})} = -27{,}54\cos^2 90\,° + 3{,}80\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) - 145{,}25\,\text{sen}^2\,90\,° = -145{,}25\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,0(\text{intermedia})} = -4{,}70\cos^2 90\,° + 0{,}38\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) - 6{,}08\,\text{sen}^2\,90\,° = -6{,}08\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,0(\text{inferior})} = 18{,}15\cos^2 90\,° - 3{,}05\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) + 133{,}09\,\text{sen}^2\,90\,° = 133{,}09\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90} = \sigma_x\,\text{sen}^2\beta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\beta + \sigma_y\cos^2\beta$$

$$\sigma_{b+t/c,90(\text{superior})} = -27{,}54\,\text{sen}^2\,90\,° - 3{,}88\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) - 145{,}25\cos^2 90\,° = -27{,}54\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90(\text{intermedia})} = -4{,}70\,\text{sen}^2\,90\,° - 0{,}38\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) - 6{,}08\cos^2 90\,° = -4{,}70\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b+t/c,90(\text{inferior})} = 18{,}15\,\text{sen}^2\,90\,° - (-3{,}05)\cdot\text{sen}\,(2\cdot 90\,°) + 133{,}09\cos^2 90\,° = 18{,}15\text{ kPa}$$

$$\sigma_{t/c,0} = \frac{\sigma_{b+t/c,0(\text{superior})} + \sigma_{b+t/c,0(\text{intermedia})} + \sigma_{b+t/c,0(\text{inferior})}}{3}$$

$$\sigma_{t/c,0} = \frac{-145{,}25 - 6{,}08 + 133{,}09}{3} = -6{,}08\text{ kPa}$$

$$\sigma_{t/c,90} = \frac{\sigma_{b+t/c,90(\text{superior})} + \sigma_{b+t/c,90(\text{intermedia})} + \sigma_{b+t/c,90(\text{inferior})}}{3}$$

$$\sigma_{t/c,90} = \frac{-27{,}54 - 4{,}70 + 18{,}15}{3} = -4{,}70\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0} = \sigma_{b+t/c,0} - \sigma_{t/c,0}$$

$$\sigma_{b,0(\text{superior})} = -145{,}25 - (-6{,}08) = -139{,}17\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0(\text{intermedia})} = -6{,}08 - (-6{,}08) = 0\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,0(\text{inferior})} = 133{,}09 - (-6{,}08) = 139{,}17\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90} = \sigma_{b+t/c,90} - \sigma_{t/c,90}$$

$$\sigma_{b,90(\text{superior})} = -27{,}54 - (-4{,}70) = -22{,}84\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90(\text{intermedia})} = -4{,}70 - (-4{,}70) = 0\text{ kPa}$$

$$\sigma_{b,90(\text{inferior})} = 18{,}15 - (-4{,}70) = 22{,}84\text{ kPa}$$

8.2.2 Análisis en el módulo RF-LAMINATE

Primero cree un *Nuevo modelo* en RFEM.

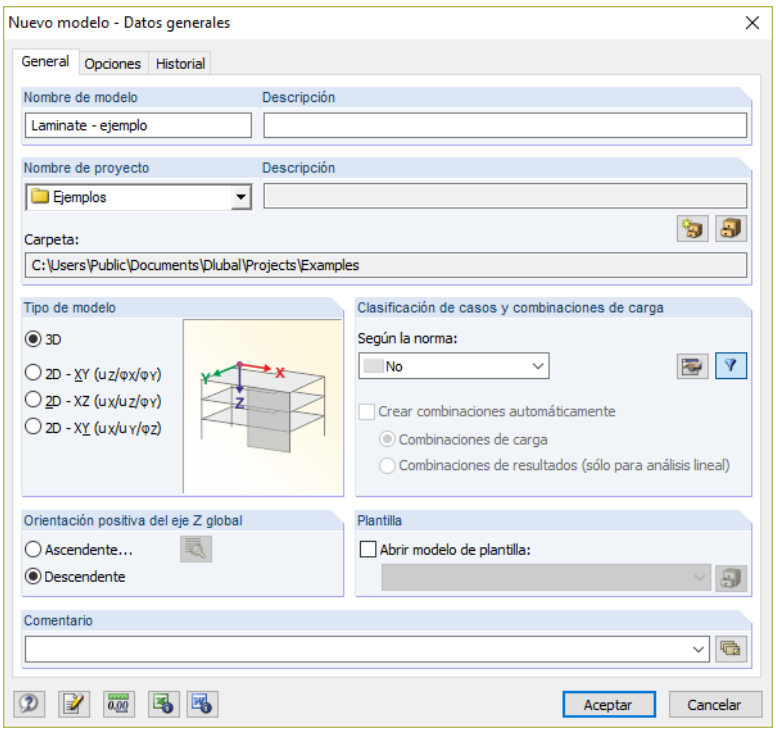


Figura 8.13: Creación de un nuevo modelo

Una vez introducido lo básico, cree una *Nueva superficie rectangular*. Seleccione el tipo de rigidez *Laminada*. Luego defina una placa con las dimensiones 1,0 × 1,5 m.

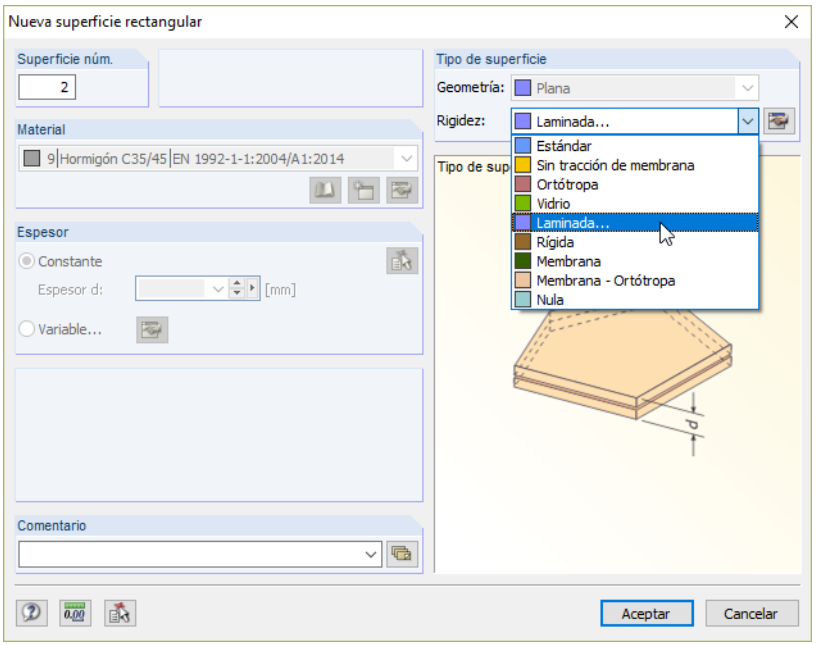


Figura 8.14: Selección de la rigidez *Laminada* en el cuadro de diálogo *Nueva superficie rectangular*

Defina los apoyos según la Figura 8.15.

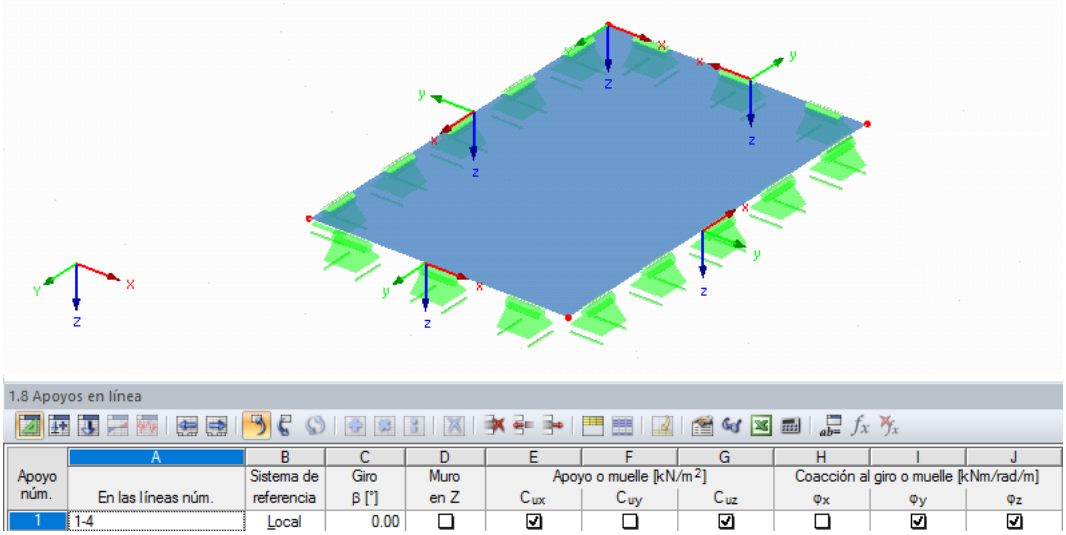


Figura 8.15: Tabla *1.8 Apoyos en línea*

Luego cree un *Nuevo caso de carga*.

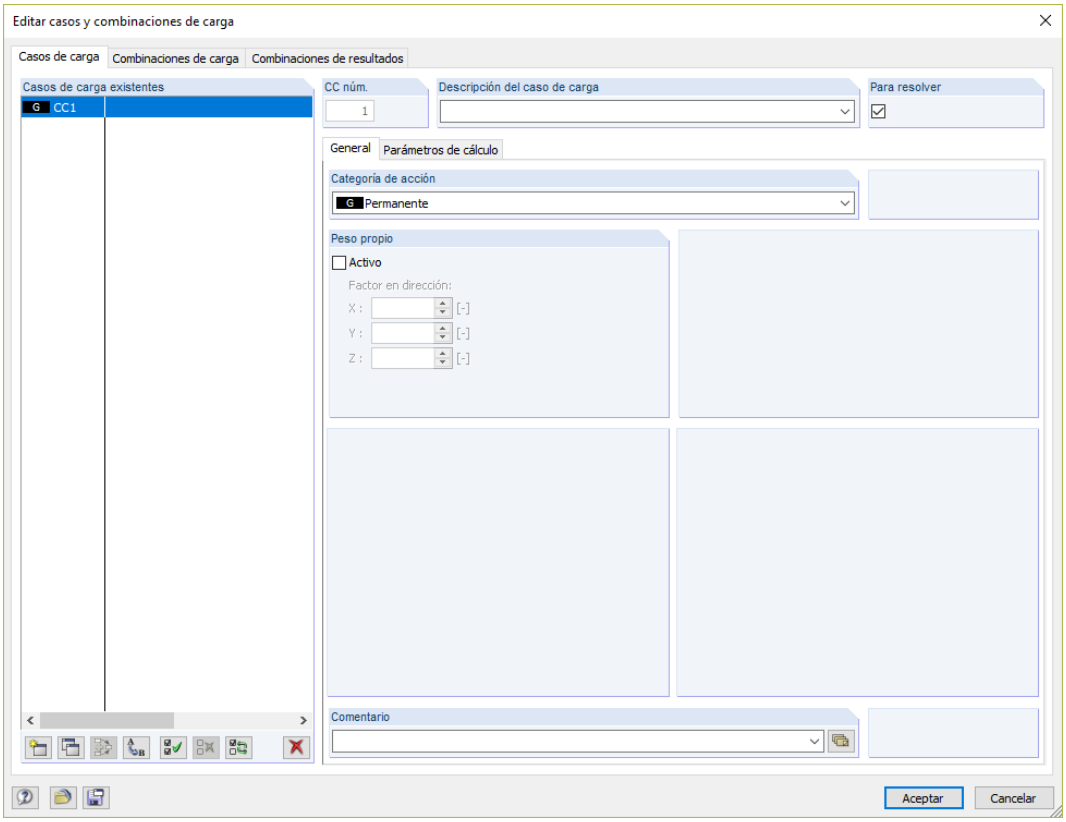


Figura 8.16: Cuadro de diálogo *Editar casos y combinaciones de carga*, pestaña *Casos de carga*

Establezca el peso propio automático como **no** *Activo*.

Después, abra el cuadro de diálogo *Nueva carga superficial* e introduzca la carga de 5 kN/m^2.

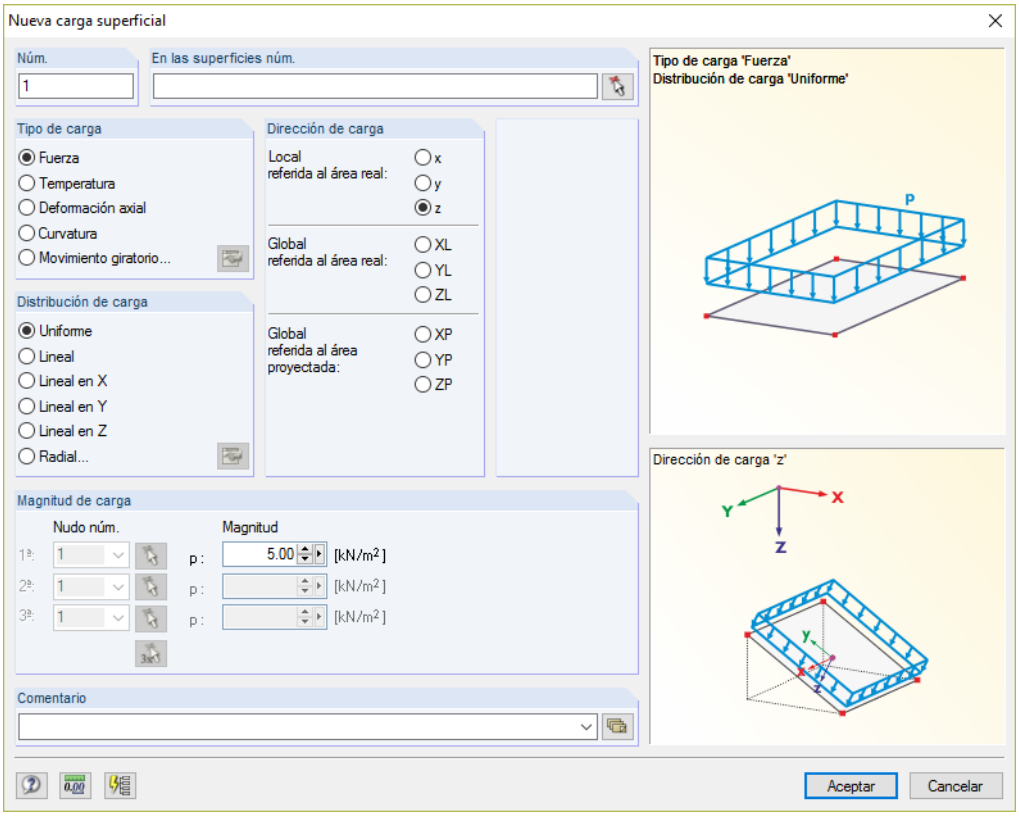


Figura 8.17: Cuadro de diálogo *Nueva carga superficial*

En el cuadro de diálogo *Configuración de malla de EF*, establezca la longitud de elementos finitos en 25 mm.

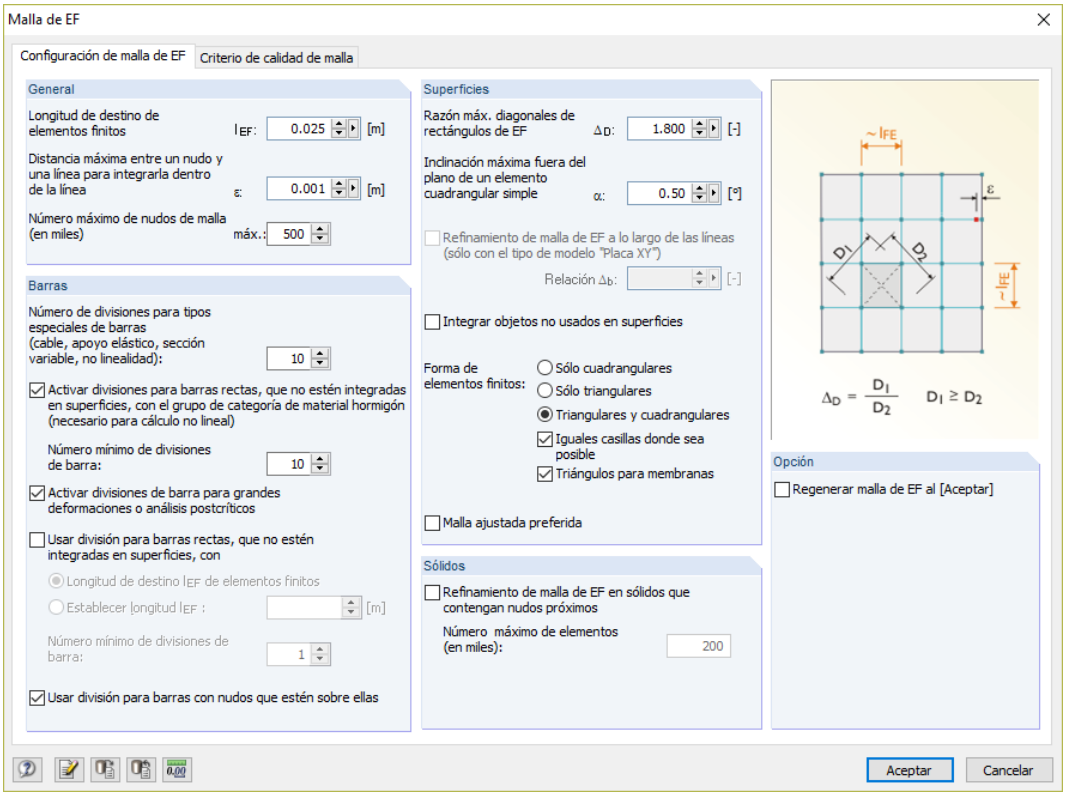


Figura 8.18: Cuadro de diálogo *Configuración de malla de EF*

Ahora abra el módulo RF-LAMINATE (véase el Capítulo 1.3, página 3).

En la ventana *1.1 Datos generales*, se preestablece la superficie núm. 1. Si está especificada alguna norma, cámbiela a *Ninguna*.

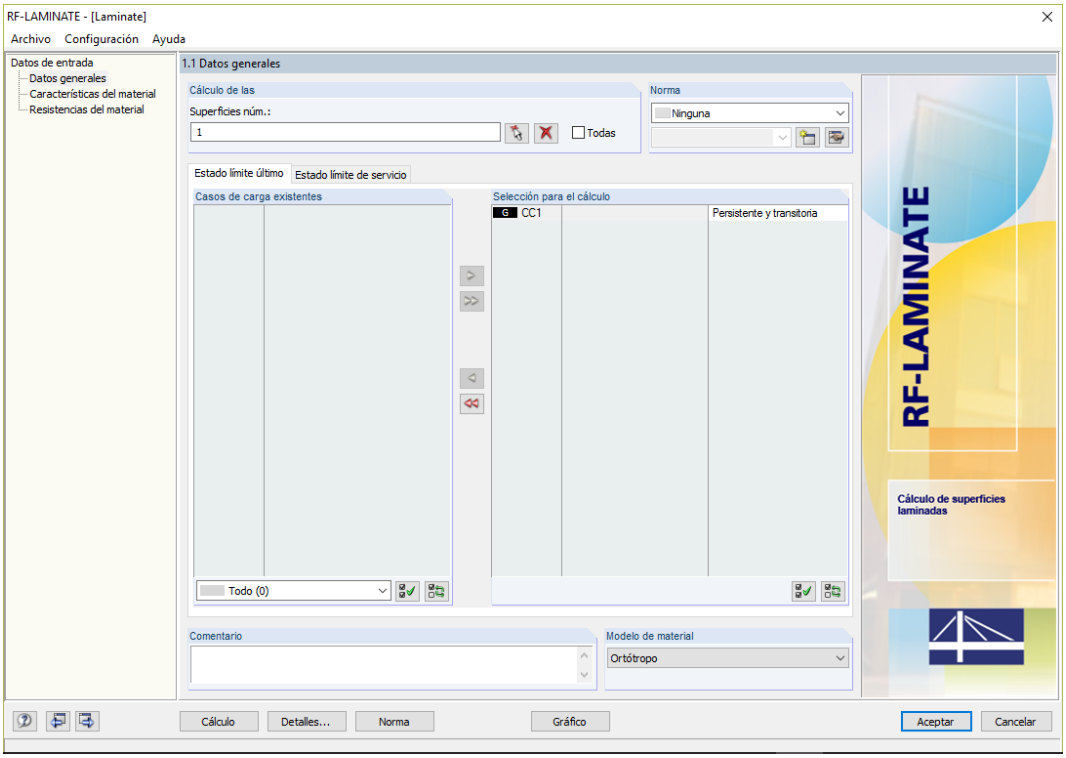


Figura 8.19: Ventana *1.1 Datos generales*

Seleccione el CC1 para el cálculo y establezca el modelo de material *Ortótropo*.

En la ventana *1.2 Características del material*, seleccione las capas individuales de la [Biblioteca] de materiales. Luego asigne esta composición a la superficie núm. 1

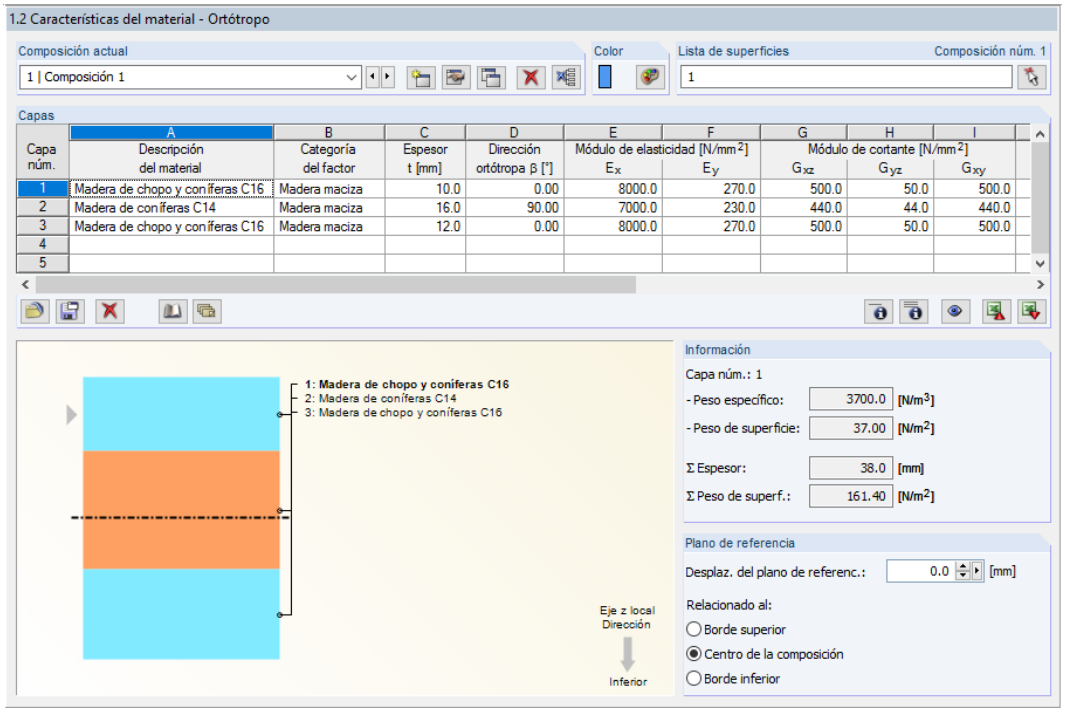
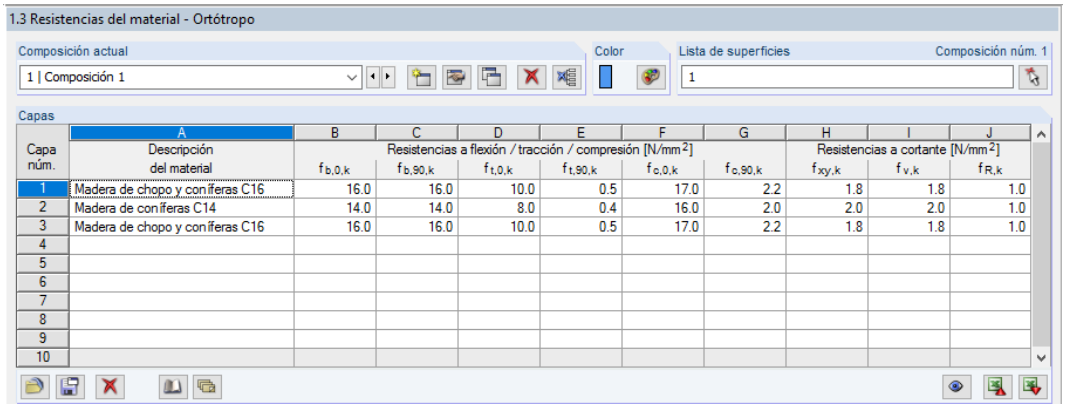


Figura 8.20: Ventana *1.2 Características del material*

Las resistencias características de los materiales se visualizan en la ventana *1.3 Resistencias del material*.



Capa núm.	A Descripción del material	B $f_{b,0,k}$	C $f_{b,90,k}$	D $f_{t,0,k}$	E $f_{t,90,k}$	F $f_{c,0,k}$	G $f_{c,90,k}$	H $f_{xy,k}$	I $f_{v,k}$	J $f_{R,k}$
		Resistencias a flexión / tracción / compresión [N/mm²]						Resistencias a cortante [N/mm²]		
1	Madera de chopo y coníferas C16	16.0	16.0	10.0	0.5	17.0	2.2	1.8	1.8	1.0
2	Madera de coníferas C14	14.0	14.0	8.0	0.4	16.0	2.0	2.0	2.0	1.0
3	Madera de chopo y coníferas C16	16.0	16.0	10.0	0.5	17.0	2.2	1.8	1.8	1.0
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Figura 8.21: Ventana *1.3 Resistencias del material*

Finalmente, compruebe la configuración en el cuadro de diálogo *Detalles*.

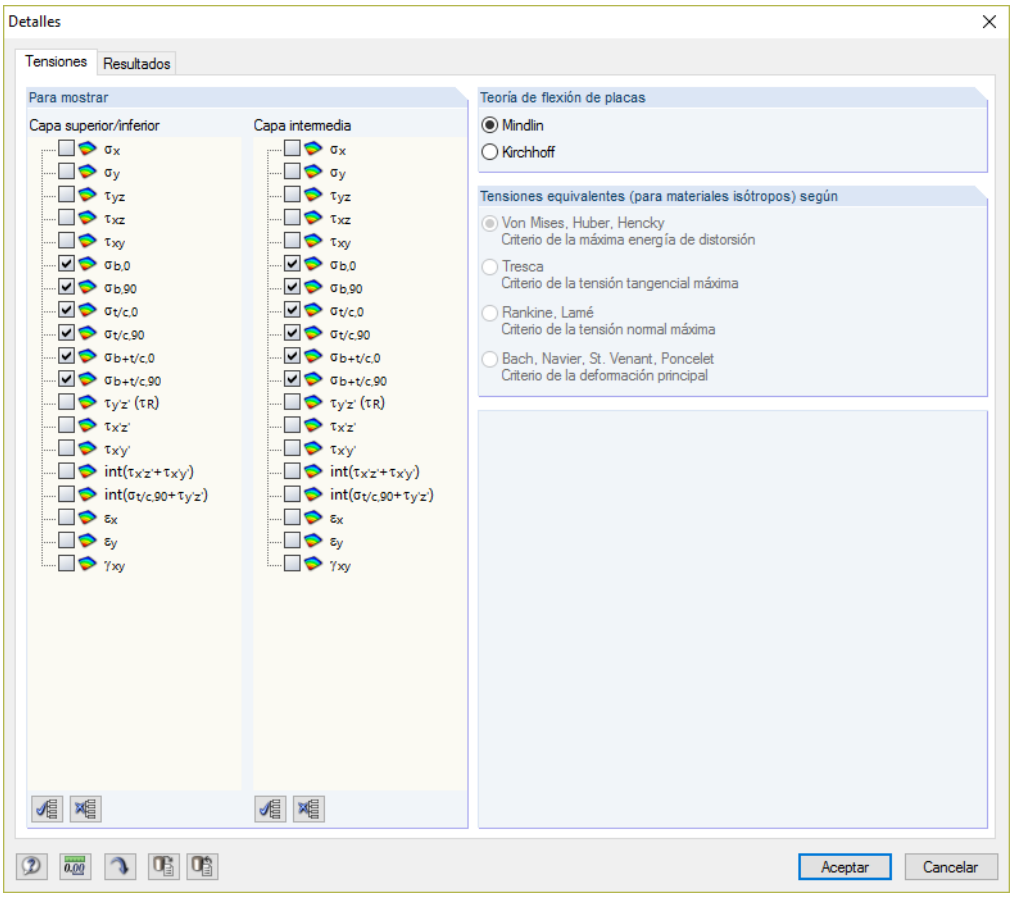


Figura 8.22: Cuadro de diálogo *Detalles*, pestaña *Tensiones*

Cálculo

Entonces inicie el cálculo.

Ahora puede comprobar los valores de tensiones en las ventanas de resultados y compararlas con aquellas que se calcularon manualmente en el Capítulo 8.2.1 en la página 77.

2.4 Tensiones en todos los puntos

Punto núm.	A Superf. núm.	B Comp. núm.	C Coordenadas del punto [m] X	D Y	E Z	F Carga	G Núm.	H Capa z [mm]	I Lado	J Símbolo	K Tensiones [N/mm²] Existente	L Límite	M Razón [-]	N Gráfico en informe
							2	10.0	Superior	$\sigma_{b,0}$	-139.17	14000.00	0.01	☐
										$\sigma_{b,90}$	-22.84	14000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,0}$	-6.08	16000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,90}$	-4.70	2000.00	0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,0}$	-145.25		0.01	☐
										$\sigma_{b+t/c,90}$	-27.54		0.00	☐
								18.0	Intermedio	$\sigma_{b,0}$	0.00	14000.00	0.00	☐
										$\sigma_{b,90}$	0.00	14000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,0}$	-6.08	16000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,90}$	-4.70	2000.00	0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,0}$	-6.08		0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,90}$	-4.70		0.00	☐
								26.0	Inferior	$\sigma_{b,0}$	139.17	14000.00	0.01	☐
										$\sigma_{b,90}$	22.84	14000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,0}$	-6.08	16000.00	0.00	☐
										$\sigma_{t/c,90}$	-4.70	2000.00	0.00	☐
										$\sigma_{b+t/c,0}$	133.09		0.01	☐

Composición núm.: Todo | Superficie núm.: Todo | Punto núm.: 1985 | Carga: Todo | Razón máx.: 0.24 ≤ 1

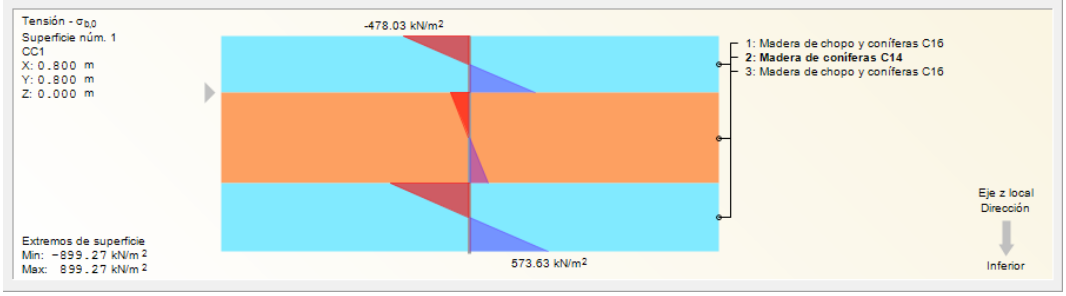


Figura 8.23: Ventana *2.4 Tensiones en todos los puntos*

8.3 Cálculo de la placa continua según EC 5

El siguiente ejemplo se toma del capítulo 10.2 en [5].

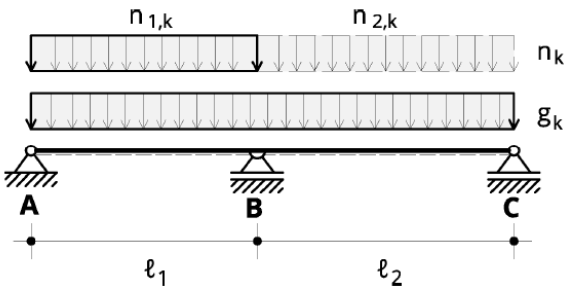


Figura 8.24: Modelo de placa de dos vanos

Sistema:	Categoría A del techo
	$\ell_1 = \ell_2 = 5{,}20$ m
	b = 3,50 m
	Clase de servicio 1
	$\gamma_M = 1{,}25$
Cargas:	CC1 - Carga permanente: $g_{2,k} = 2{,}0\ \mathrm{kN/m^2} + 1{,}21\ \mathrm{kN/m^2}$ (peso propio)
	CC2 - Sobrecarga de uso: $n_k = 2{,}5\ \mathrm{kN/m^2}$, categoría A, clase de duración de carga: a medio plazo
	LC3 - Sobrecarga de uso: $n_k = 2{,}5\ \mathrm{kN/m^2}$, sólo en el lado derecho de la placa, categoría A, clase de duración de carga: a medio plazo
	CO1 = 1.35CC1 + 1.5CC2 – para el cálculo del ELU
	CO2 = CC1 + CC3 – para el cálculo del ELS (característica)
Configuración:	BSP 220 L7S2

El modelo se analiza según el análisis geométricamente lineal. La longitud de malla de EF es 0,5 m.

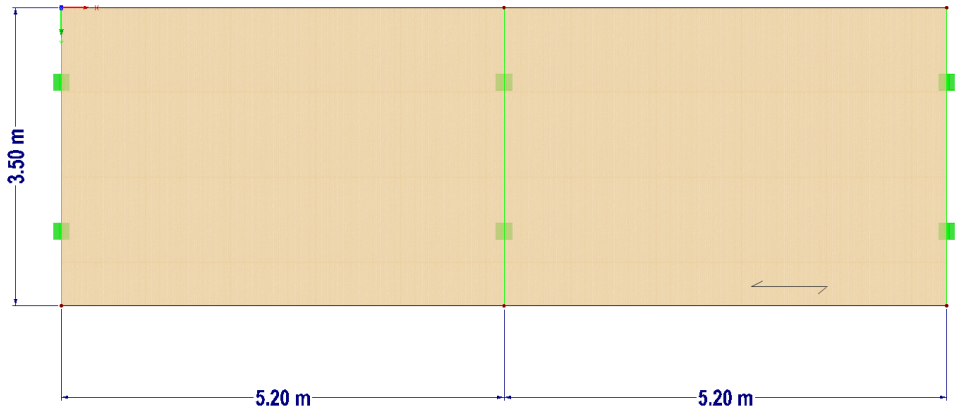


Figura 8.25: Modelo de RFEM

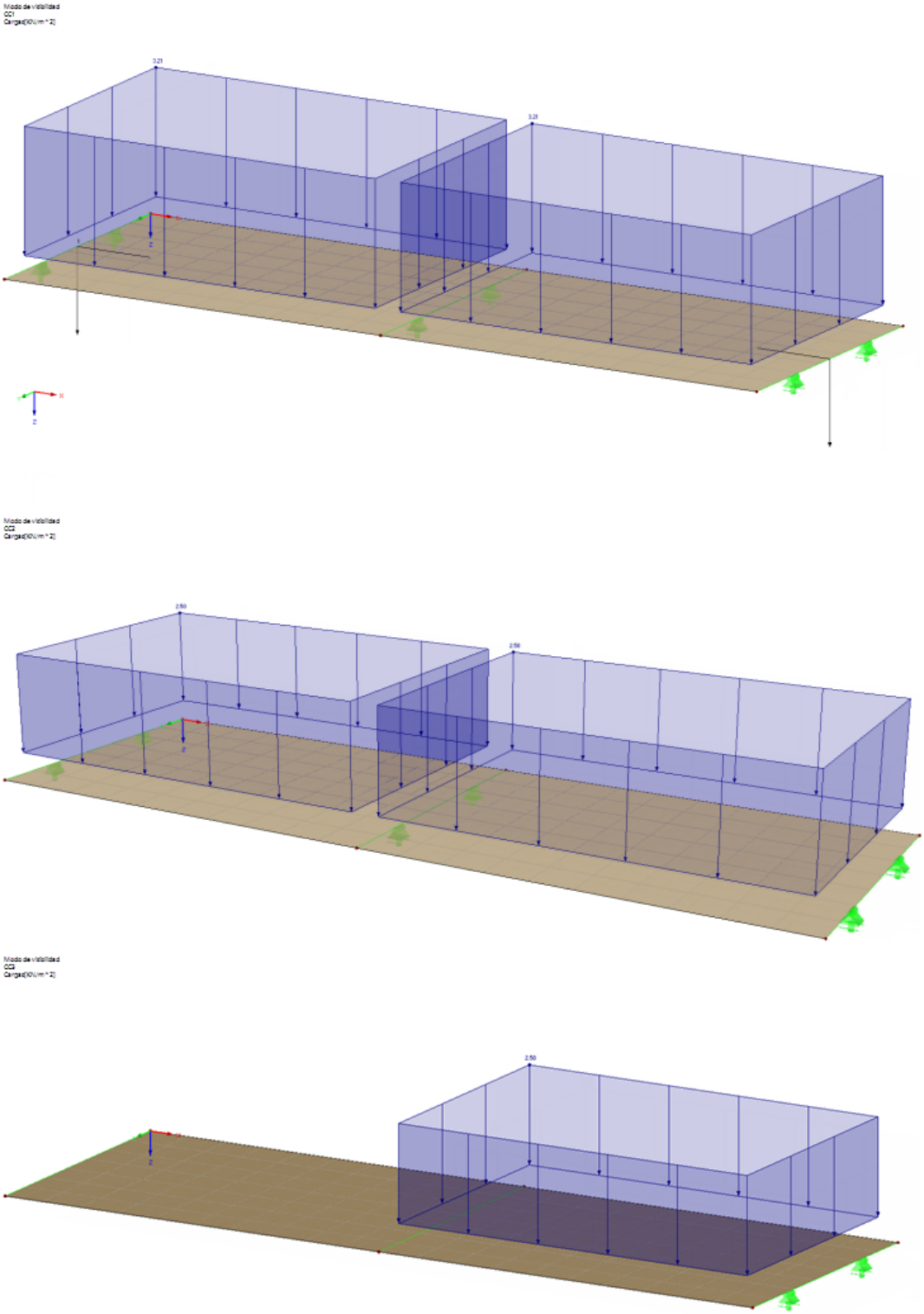


Figura 8.26: Casos de carga

Una vez se haya creado el modelo en RFEM, será posible iniciar el módulo RF-LAMINATE.

El cálculo se realiza según EN 1995-1-1 con el Anejo *DIN* de Alemania. Seleccione la combinación de carga CO1 para el cálculo y asigne la situación de proyecto *Persistente y transitoria*. El modelo de material es *Ortótropo*.

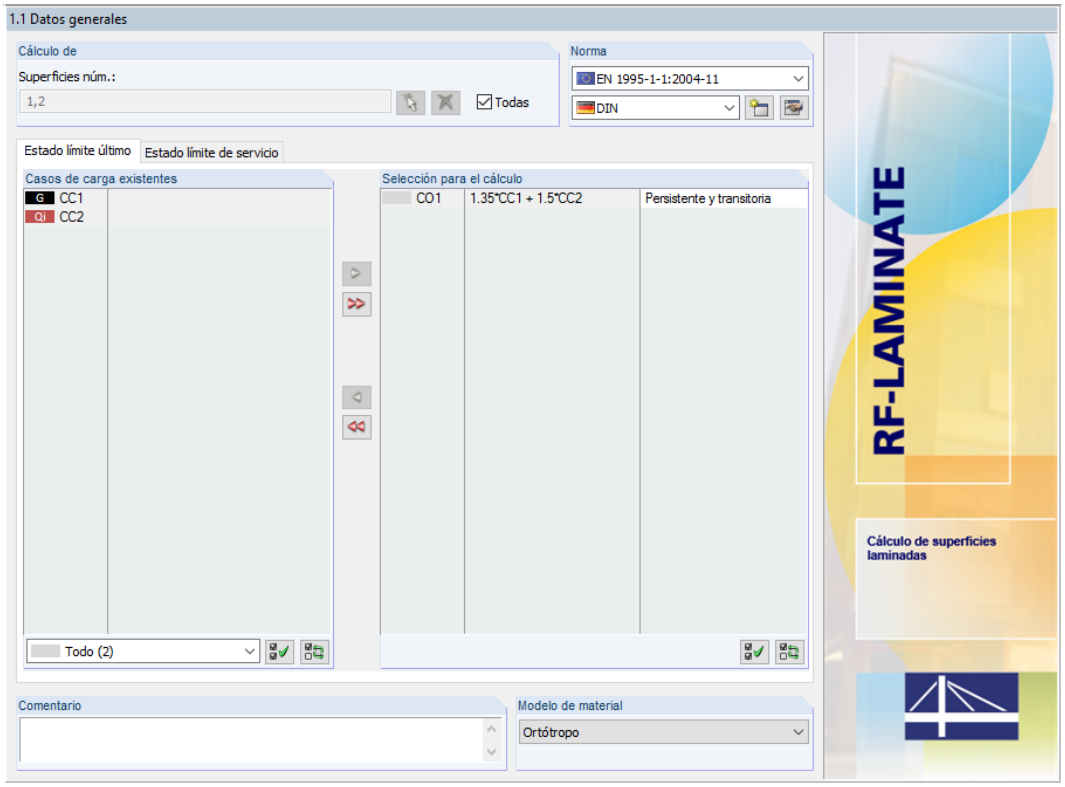


Figura 8.27: Ventana *1.1 Datos generales*

Para el análisis de las flechas, seleccione CO2 en la pestaña *Estado límite de servicio*.

La sección del panel es una STORA ENSO CLT 220 L7s2 de la aprobación [[error 1]]. Es posible definirla manualmente en la ventana *1.2 Características del material - Ortótropo* o – más rápido – seleccionarla de la [Biblioteca]. La biblioteca, sin embargo, siempre usa la configuración más reciente definida en las aprobaciones de cada fabricante. Con el fin de ser capaz de reproducir los resultados de este ejemplo, se recomienda definir las capas manualmente.

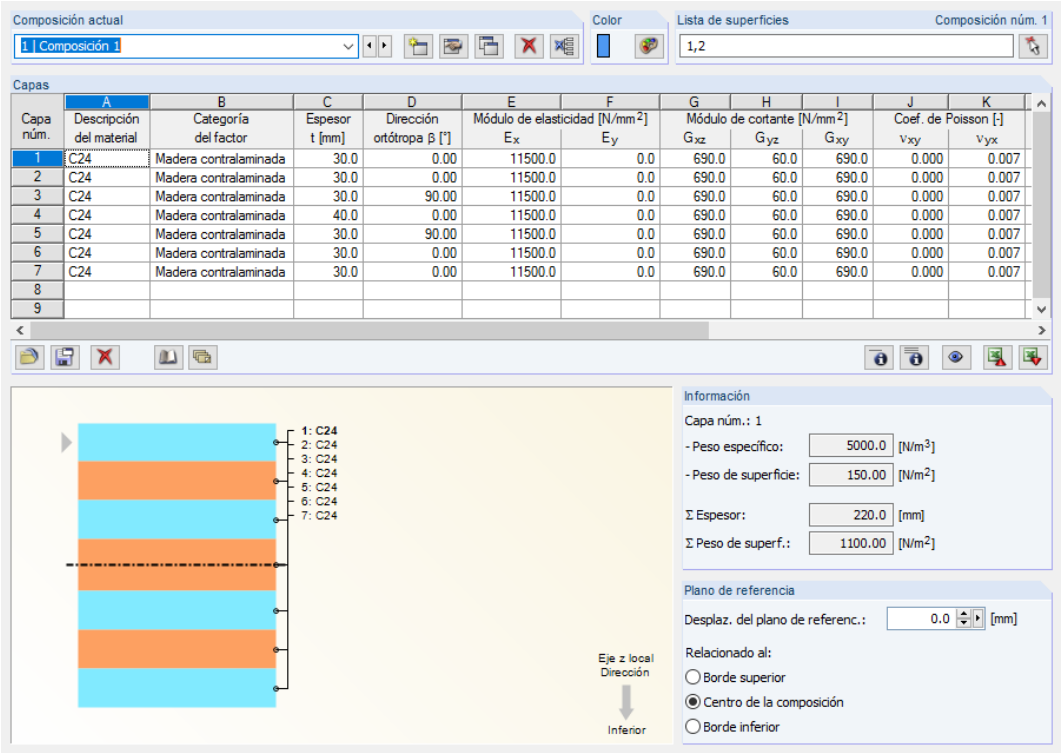


Figura 8.28: Ventana *1.2 Características del material - Ortótropo*

Asigne la categoría del factor *Madera contralaminada* a todas las capas.

Norma

En el cuadro de diálogo *Norma*, el coeficiente de seguridad se establece en 1,3 para la madera contralaminada. Según las recomendaciones del EC 5, también su uso sería posible para 1,25.

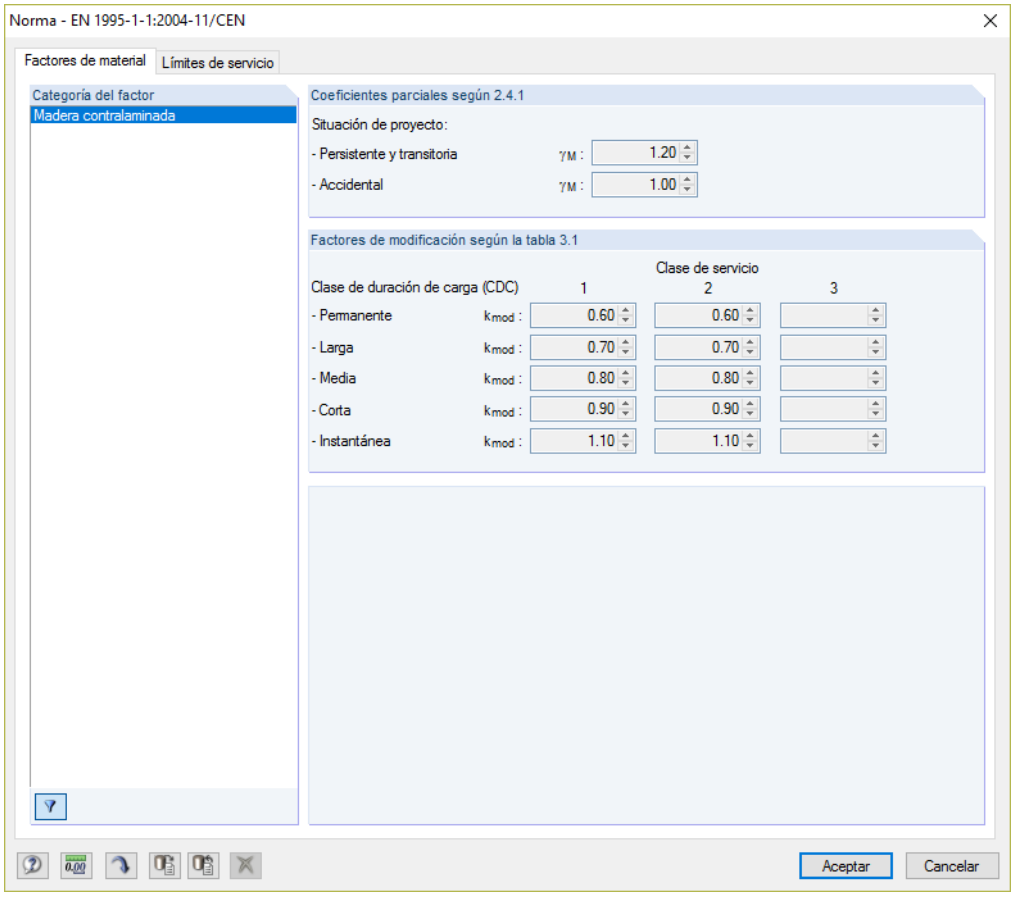


Figura 8.29: Cuadro de diálogo *Norma - EN 1995-1-1:2004-11/DIN*

En la ventana *1.3 Resistencias del material - Ortótropo*, se definen las resistencias del material.

Capas

Capa núm.	A Descripción del material	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Resistencias a flexión / tracción / compresión [N/mm²]						Resistencias a cortante [N/mm²]		
		$f_{b,0,k}$	$f_{b,90,k}$	$f_{t,0,k}$	$f_{t,90,k}$	$f_{c,0,k}$	$f_{c,90,k}$	$f_{xy,k}$	$f_{v,k}$	$f_{R,k}$
1	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
2	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
3	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
4	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
5	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
6	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
7	C24	24.0	0.0	14.0	0.4	21.0	2.5	4.0	4.0	1.5
8										
9										
10										

Figura 8.30: Resistencias del material

Resultados – ELU

La verificación del estado límite último se efectúa según la NA.9.3 de Alemania.

Los esfuerzos internos son similares al ejemplo de [5]:

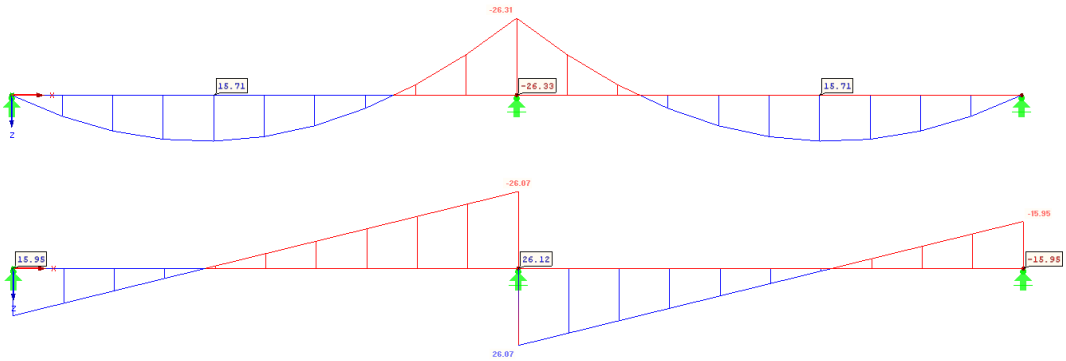


Figura 8.31: Momentos flectores y esfuerzos cortantes

$M = -26{,}31$ kNm

$V_x = 26{,}1$ kN

Tensión de flexión:

$\sigma_{b+t/c,0} = 3{,}58\ \mathrm{N/mm^2}$

Resistencia:

$$f_{m,d} = f_{b,0,d} = \frac{k_{mod}}{\gamma_M} f_{b,0,k} = 15{,}36\ \mathrm{N/mm^2}$$

RF-LAMINATE distingue entre las tensiones de presión y de flexión como se describe en el Capítulo 5.1. Sin embargo, esto no se ha hecho aquí con el fin de comparar los resultados con [5]. La tensión de flexión total se compara con la resistencia límite.

$3{,}58/15{,}36 = 0{,}25 < 1$

en [5], la razón es 0,22.

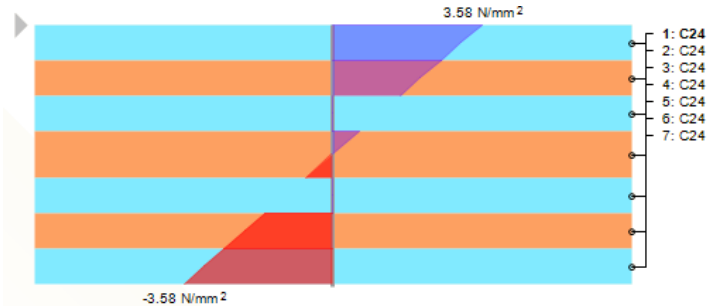


Figura 8.32: Tensión de flexión en RF-LAMINATE

Resultados – ELS

Para el estado límite de servicio, la deformación máxima obtenida para CO2 es 4,1 mm. Ocurre a una distancia de 3,1 m desde el apoyo intermedio.

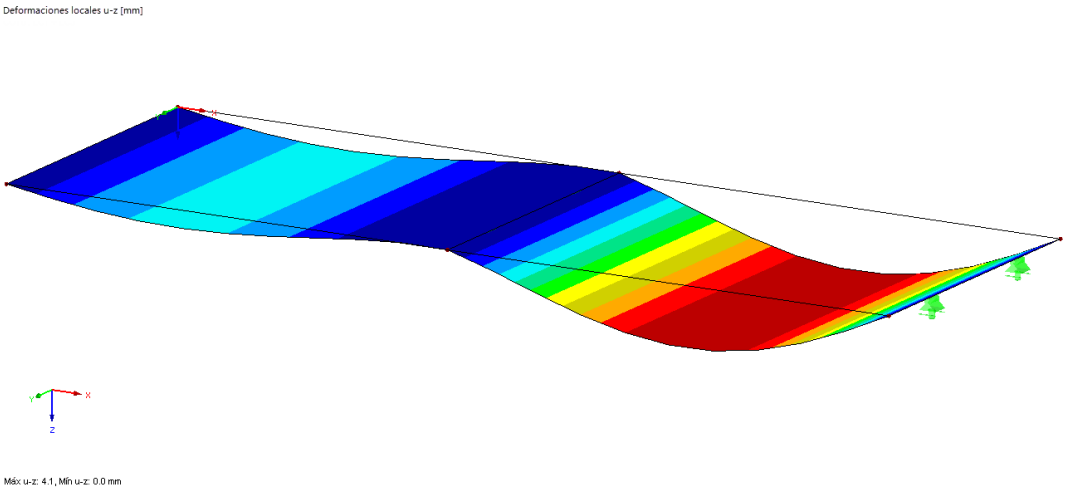


Figura 8.33: Deformaciones

Verificación:

$w_{inst} = 4{,}1 \text{ mm} < l/300 = 5\,200/300 = 17{,}3 \text{ mm}$

La determinación calculada de $w_{inst} = 4{,}1$ mm es similar a aquella en [5] de 4,5 mm.

Como [5] representa un cálculo (1D) de viga con el momento de inercia eficaz, la diferencia de 0,4 mm es comprensible.

8.4 Cálculo del elemento de la matriz de rigidez a cortante

Para la superficie del ejemplo anterior, se van a determinar los elementos de la matriz de rigidez a cortante. Las características del material de las capas son como sigue.

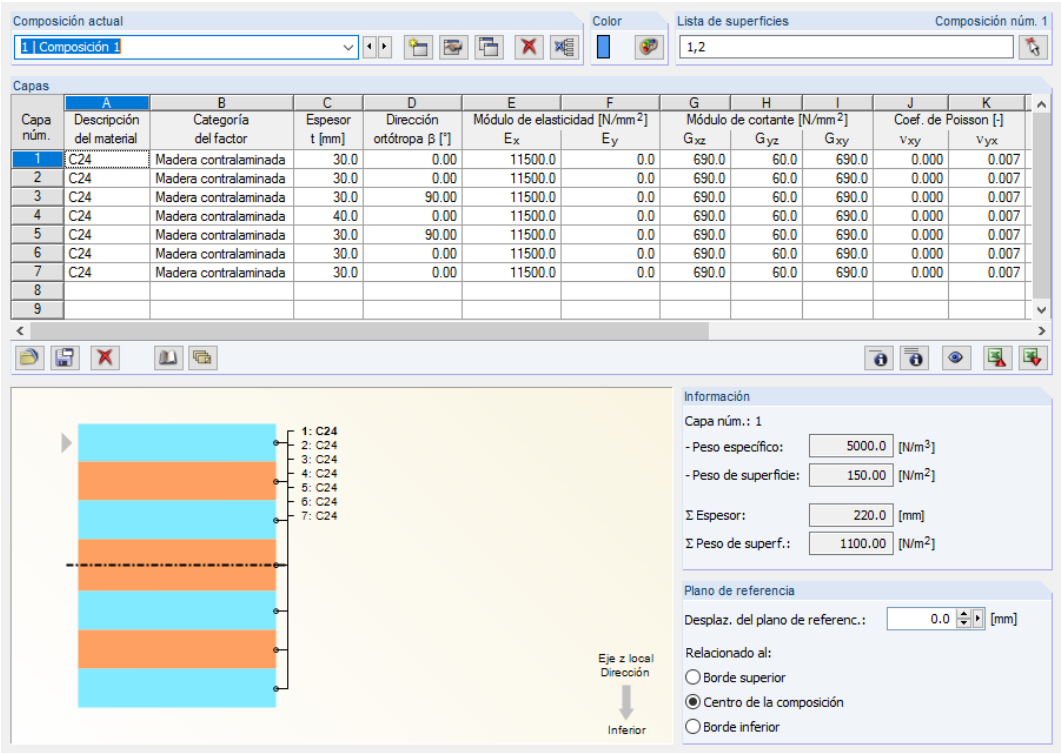


Figura 8.34: Ventana *1.2 Características del material - Ortótropo*

Con esta composición de capas, se demuestran los efectos de limitación de rigidez a cortante.

Los elementos de la matriz de rigidez ampliada se pueden comprobar mediante el botón [Información] como se ve a la izquierda.

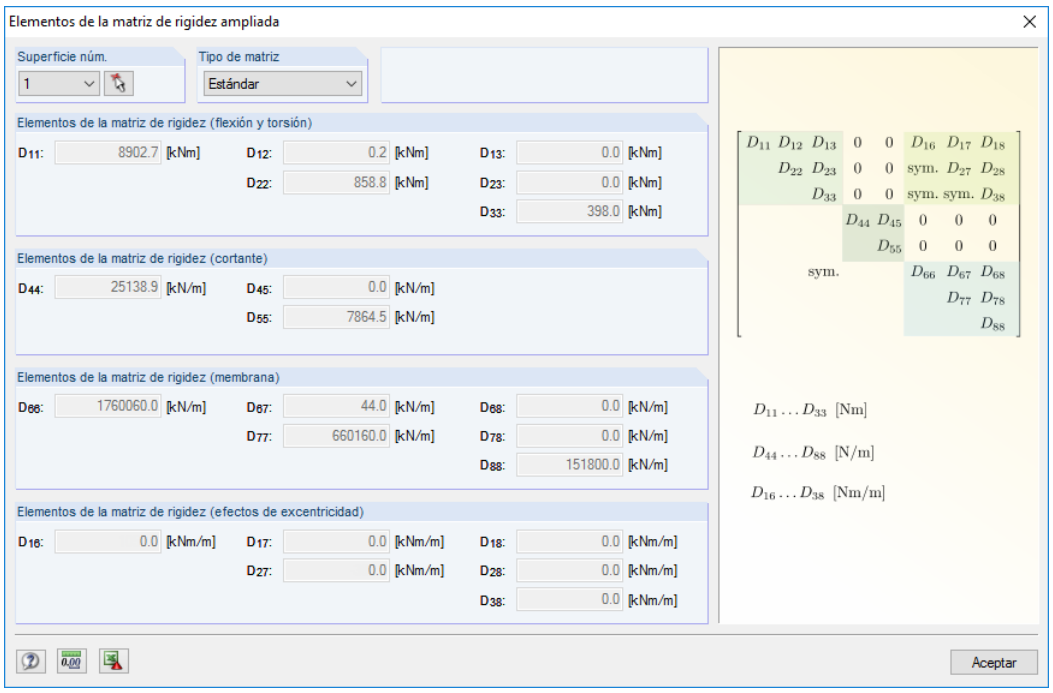


Figura 8.35: Elementos de la matriz de rigidez ampliada

El valor de la rigidez D''_{44} se da con la siguiente fórmula:

$$D''_{44} = \text{máx}\left(D''_{44,\text{cálc}}, D''_{\text{mín}}\right) \text{máx}\left(D''_{44,\text{cálc}}, \frac{48}{5\,\ell^2}\frac{1}{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\dfrac{t_i^3}{12}} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} E''_{x,i}\dfrac{z^3_{\text{máx},i} - z^3_{\text{mín},i}}{3}}}\right) \quad (8.20)$$

$$D''_{44} = \text{máx}\left(25\,138{,}9, \frac{48}{5 \cdot 3{,}5^2}\frac{1}{0{,}00\,623}\right) = \text{máx}\left(25\,138{,}9, 125{,}8\right)$$

Con el ancho definido de 3,5 m, la limitación $D''_{\text{mín}}$ no está activa.

La limitación $D''_{\text{mín}}$ está hecha para evitar los problemas de transformación por cortante en zonas muy pequeñas y una configuración de placa muy blanda. Para la composición de capas del ejemplo, el ancho límite de la superficie sería 240 mm. Entonces el módulo sería como sigue:

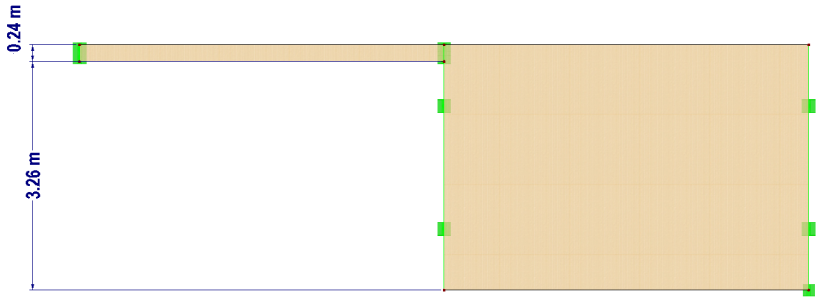


Figura 8.36: Geometría de las superficies con el ancho límite aplicado

Las rigideces a cortante para la orientación de x de esta placa son:

	D44
Una capa ($D44_1$)	$5/6t_1G'_x = 17\,250$ kN/m
$D''_{44,\text{cálc}}$	25 139 kN/m
$D''_{\text{mín}} = D''_{44}$	26 752 kN/m

Tabla 8.2: Rigideces a cortante para la orientación x de la placa

El valor para el $D''_{\text{mín}}$ aumentará, sin embargo, cuando la superficie se vuelva más pequeña. El valor para $D''_{44,\text{cálc}}$ considera que la rigidez a cortante de toda la placa incrementa debido a la conexión donde un tablero de una superficie se cruza con otro.

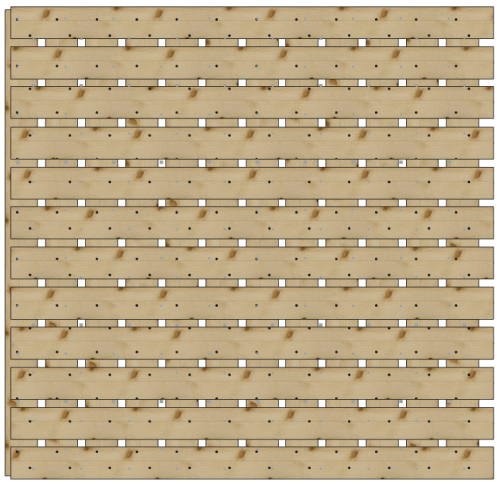


Figura 8.37: Dibujo exagerado del panel de madera contralaminada (CLT)

Si la superficie es muy pequeña sólo en algunas partes como se muestra en la Figura 8.39, la limitación es $D''_{mín} = 125{,}8$ kN/m. Esto significa que el valor D''_{44} es igual a $D''_{44,cálc}$.

El coeficiente de reducción k_{44} se puede aplicar con el fin de restringir el elemento de la matriz de rigidez a cortante D_{44} para grandes esfuerzos cortantes que se transforman a través del lado pequeño de la superficie.

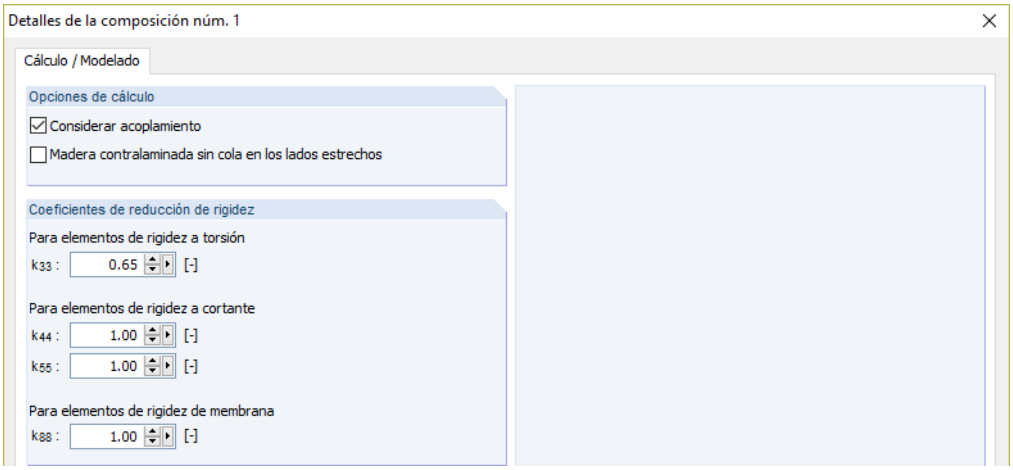


Figura 8.38: *Coeficientes de reducción de rigidez* en el cuadro de diálogo *Detalles de la composición*

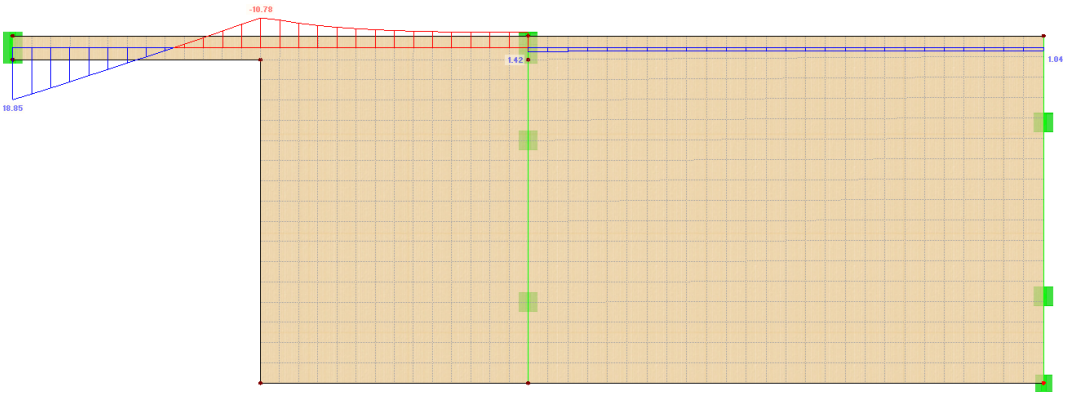


Figura 8.39: Esfuerzo cortante elevado en el apoyo de la superficie estrecha

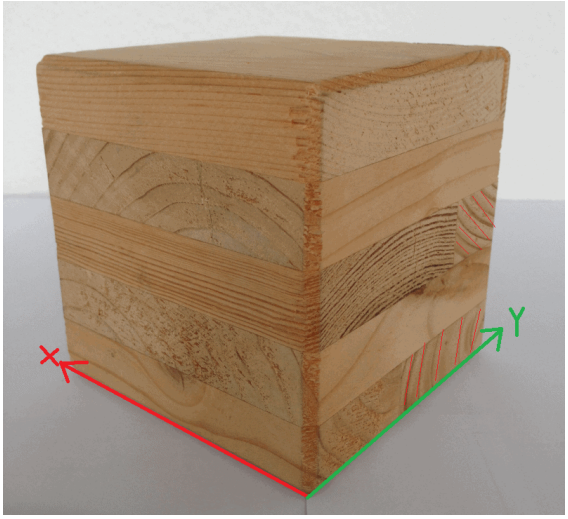


Figura 8.40: Rotura por cortante en las fibras, dirección G_{xz}

Como se muestra en la Figura 8.40, las fibras opuestas (lado blando) a una capa tienden a romperse debido a los efectos de cortante de rodadura. Este problema se puede justificar modificando los elementos de rigidez a cortante como se mencionó anteriormente.

9 Anejos

9.1 Relaciones de transformación

Este capítulo describe las relaciones que se requieren para transformar las tensiones, deformaciones y matrices de rigidez con el giro del sistema de coordenadas x, y, z al sistema de coordenadas x', y', z' respecto al ángulo β. Este ángulo β se define como sigue:

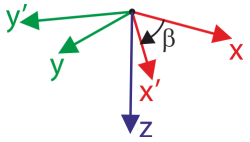


Figura 9.1: Definición del ángulo β

Las cantidades relacionadas con el sistema x, y, z – tales como las tensiones, deformaciones y elementos de matrices de rigideces – se acentúan sin acento agudo $(')$. Las cantidades en el sistema x', y', z' se acentúan con un acento agudo.

Las relaciones de transformación para tensiones y deformaciones planas son

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{3\times3}^{-T}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{b+t/c,0} \\ \sigma_{b+t/c,90} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{3\times3}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

La matriz de rigidez se transforma según la relación

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{T}_{3\times3}^{T} \boldsymbol{d}' \boldsymbol{T}_{3\times3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d}' = \boldsymbol{T}_{3\times3}^{-T} \boldsymbol{d} \boldsymbol{T}_{3\times3}^{-1} \tag{9.3}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{sim.} & & d_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}' = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & 0 \\ & d'_{22} & 0 \\ \text{sim.} & & d'_{33} \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

Las relaciones de transformación para tensiones y deformaciones tangenciales son

$$\begin{bmatrix} \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{2\times2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tau'_{xz} \\ \tau'_{yz} \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{2\times2}} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

La matriz de rigidez se transforma según la relación

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}_{2\times2}^{T} \boldsymbol{G}' \boldsymbol{T}_{2\times2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{G}' = \boldsymbol{T}_{2\times2} \boldsymbol{G} \boldsymbol{T}_{2\times2}^{T} \tag{9.7}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \text{sim.} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}' = \begin{bmatrix} G'_{11} & 0 \\ 0 & G_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

9.2 Comprobación de la definitud positiva de la matriz de rigidez

La definitud positiva de la matriz de rigidez global es indispensable para el cálculo.

Generalmente, la matriz de rigidez global tiene la forma

$$\boldsymbol{D}_{8\times 8} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{\text{flexión}}_{3\times 3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D}^{\text{excéntrico}}_{3\times 3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}^{\text{cortante}}_{2\times 2} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{D}^{\text{excéntrico}}_{3\times 3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D}^{\text{membrana}}_{3\times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & D_{16} & D_{17} & D_{18} \\ & D_{22} & D_{23} & & & \text{sim.} & D_{27} & D_{28} \\ & & D_{33} & & & \text{sim.} & \text{sim.} & D_{38} \\ & & & D_{44} & D_{45} & & & \\ & & & & D_{55} & & & \\ & & & & & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ & \text{sim.} & & & & & D_{77} & D_{78} \\ & & & & & & & D_{88} \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

Se revisan las siguientes condiciones:

1. La matriz $\boldsymbol{D}$ debe definirse positiva, p.ej. todos sus menores principales predominantes son positivos.
2. Todas las submatrices $\boldsymbol{D}^{\text{flexión}}_{3\times 3}$, $\boldsymbol{D}^{\text{cortante}}_{3\times 3}$, $\boldsymbol{D}^{\text{membrana}}_{3\times 3}$ se deben definir positivas en la acepción más restrictiva, p.ej. todos sus menores principales predominantes deben cumplir

$$\det \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{ii} \end{bmatrix} \geq \sqrt{0{,}001}\,|D_{11}D_{22}\ldots D_{ii}|, \quad \text{donde } i = 1,\ldots,n \text{ y } n = 2,3 \tag{9.10}$$

9.3 Dos dimensiones equivalentes de coef. de Poisson

Al definir un material ortótropo, hay en teoría dos maneras de cómo definir los coeficientes de Poisson ν. RFEM usa la aproximación según la Ecuación 2.1 en la página 8. Se caracteriza por la relación

$$\nu_{xy} > \nu_{yx} \tag{9.11}$$

si la fibra discurre en dirección x', que es $E_x > E_y$.

En bibliografías, en ocasiones puede encontrar una definición equivalente de los coeficientes de Poisson. Permítanos denotar aquellos coeficientes de Poisson con unas líneas. Para ellos, se mantiene la ecuación $\overline{\nu}_{yx}/E_x = \overline{\nu}_{xy}/E_y$, conduciendo hacia la desigualdad $\overline{\nu}_{xy} < \overline{\nu}_{yx}$. Si toma las propiedades ortótropas de un documento específico, puede fácilmente encontrar la definición de ortotropía aplicada a partir de la desigualdad entre ambos coeficientes de Poisson. La matriz de rigidez $\boldsymbol{D}$ se define en ambos casos como sigue:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & & & \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & & & \\ & & \frac{1}{G_{yz}} & & \\ & & & \frac{1}{G_{xz}} & \\ & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\overline{\nu}_{xy}}{E_x} & & & \\ -\frac{\overline{\nu}_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & & & \\ & & \frac{1}{G_{yz}} & & \\ & & & \frac{1}{G_{xz}} & \\ & & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \tag{9.12}$$

que da la fórmula simple

$$\nu_{xy} = \overline{\nu}_{yx}$$

$$\nu_{yx} = \overline{\nu}_{xy} \tag{9.13}$$

Es posible usar fórmulas análogas en los casos 3D ortótropos generales:

$$\nu_{yz} = \overline{\nu}_{zy} \qquad \nu_{xz} = \overline{\nu}_{zx}$$

$$\nu_{zy} = \overline{\nu}_{yz} \qquad \nu_{zx} = \overline{\nu}_{xz} \tag{9.14}$$

Un ejemplo muestra cómo reconocer la distinta definición de los coeficientes de Poisson y cómo computar esos valores aceptados por RFEM. Las propiedades del material son como sigue:

$$E_x = 12\,000 \text{ MPa}$$

$$E_y = 400 \text{ MPa}$$

$$\overline{\nu}_{xy} = 0{,}01 \tag{9.15}$$

$$\overline{\nu}_{yx} = \overline{\nu}_{xy} \cdot \frac{E_x}{E_y} = 0{,}01 \cdot \frac{12\,000}{400} = 0{,}3$$

Entendiendo que $\overline{\nu}_{xy} < \overline{\nu}_{yx}$, vemos que la definición es diferente que la aceptada por RFEM. Por tanto, aplicamos la Ecuación 9.13:

$$\nu_{xy} = \overline{\nu}_{yx} = 0{,}3$$

$$\nu_{yx} = \overline{\nu}_{xy} = 0{,}01 \tag{9.16}$$

Bibliografía

M.T., H. (1923). *The theory of crosswise reinforced ferroconcrete slabs and its application to various constructional problems involving rectangular slabs*. Der Bauingenieur.

(2004). *Eurocode 5: Design of timber structures - Part 1-1: General - Common rules and rules for buildings*. Brussels: CEN.

(2015). *National Design Specification for Wood Construction*. Leesburg, VA: American Wood Council.

(2008). *DIN 1052:2008-12: Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holztragwerken Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. Berlin: Beuth Verlag GmbH.

Wallner-Novak, M., Koppelhuber, J. and Pock, K. (2013). *Brettsperrholz Bemessung, Grundlagen für Statik und Konstruktion nach Eurocode*..

Altenbach, H., Altenbach, J. and Naumenko, K. (2008). *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer.

(2007). *Navrhování, výpočet a posuzování dřevěných stavebních konstrukcí : Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: Český normalizační institut.

© Dlubal Software 2017

Índice

A
Accidental 22
Acoplamiento a cortante 12, 17, 29, 68
Anejo Nacional 21

B
Bach 41, 44
Biblioteca de capas 26
Biblioteca de materiales 25

C
Capa 25, 58
Característica 23
Características del material 24
Carga 32
Caso de carga 20, 22, 23, 32
Categoría del factor 47
Cerrar RF-LAMINATE 50
Clase de duración de carga 32, 48
Clase de servicio 32, 33, 48
Coeficiente de Poisson 94
Coeficiente parcial 23, 48
Cola 29
Combinación de acciones 48
Comentario 21
Composición 24, 55
Coordenadas 52
Cortante por rodadura 43
Cuasipermanente 23
Cálculo 20, 37, 49

D
Datos de servicio 35
Datos generales 20
Decimales 63
Definida positiva 37, 94
Deformación 36, 57
Deformación por cortante 43
Desplazamiento 57
Detalles 37
Detalles de la composición 28

E
ELS 23
ELU 22
En condición de servicio 34
Espesor 58
Estado límite último 22
Excel 64
Exportación de tablas 27
Exportar 63

F
Factor de modificación 32, 48
Factores de material 47
Fibra 42
Filtro 50, 56
Flecha 23, 36, 48, 57
Frecuente 23

G
Gráfico 54
Gráficos 27

H
Humedad 34

I
Importación de tablas 27
Informe 60, 64
Informe gráfico 61
Iniciar RF-LAMINATE 3
Instalación 3

K
Kirchhoff 43

L
Lista de piezas 58
Longitud de referencia 35
Límites de servicio 48
Línea de contorno 35

M
Madera contralaminada 29
Matriz de rigidez 65, 93, 94
Mindlin 43
Mises 41, 44
Modelo de material 8, 21
Modelo de material definido por el usuario 11
Modelo de material híbrido 11
Modelo de material isótropo 11, 40, 53
Modelo de material ortótropo 8, 42, 53

N
Navegador 20, 50
Norma 21

© Dlubal Software 2017

O
OpenOffice 64

P
Panel 5
Persistente y transitoria 22
Peso 59
Plano de referencia 27, 36
Plano de referencia deformado 36
Portapapeles 63
Punto de malla de EF 45, 51, 56
Punto de rejilla 45, 51, 56
Puntos 56

R
Rankine 41, 44
Razón 52, 57
Razón de tensiones 51, 55
Reducción de la rigidez 30
Resistencia característica 31
Resistencia del material 31
Resultados 45, 50
Revestimiento 59

S
Secciones 61
Servicio 23
Sistema de coordenadas 93
Sistema no deformado 36
Situación de proyecto 22, 23, 48, 57
Superficie 25, 35, 51, 55, 58
Superficie paralela 36
Símbolo 6, 52

T
Tablero de partículas 47
Temperatura 34
Tensiones 38, 56, 60
Tensión 75
Tensión de cálculo 46
Tensión equivalente 41, 44
Tensión límite 52
Tensión normal 43
Teoría de flexión de placas 43
Tipo de carga 32
Tipo de combinación 57
Transformación 93
Tresca 41, 44

U
Unidades 63

V
Valores límite 23
Ventanas de resultados 45
Voladizo 36, 48
Volumen 59

© Dlubal Software 2017