



**h\_da**

HOCHSCHULE DARMSTADT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

**fb bu**

FACHBEREICH BAU- UND  
UMWELTINGENIEURWESEN

# Untersuchungen zur Verformungsprognose von Stahlbetonbauteilen



Mustafa Aslan









**h\_da**

HOCHSCHULE DARMSTADT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

**fb bu**

FACHBEREICH BAU- UND  
UMWELTINGENIEURWESEN

# Untersuchungen zur Verformungsprognose von Stahlbetonbauteilen

---

## Masterarbeit

Mustafa Aslan, B. Eng.

Matrikelnummer: 754762

### Betreuung:

#### Referent:

Prof. Dr.-Ing. Johannes Kuntsche

Hochschule Darmstadt, Fachbereich Bauingenieurwesen,  
Schwerpunkt Konstruktiver Ingenieurbau und Geotechnik

#### Korreferent:

Dr. Markus Schmidt

Hochschule Darmstadt, Fachbereich Bauingenieurwesen,  
Schwerpunkt Konstruktiver Ingenieurbau und Geotechnik

September 2024





**h\_da**

HOCHSCHULE DARMSTADT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

**fb bu**

FACHBEREICH BAU- UND  
UMWELTINGENIEURWESEN

**FACHBEREICH BAUINGENIEURWESEN**

**M A S T E R A R B E I T**

SCHWERPUNKT	KONSTRUKTIVER INGENIEURBAU
THEMA DER ARBEIT	UNTERSUCHUNGEN ZUR VERFORMUNGSPROGNOSE VON STAHLBETONBAUTEILEN
VERFASSER (IN)	MUSTAFA ASLAN
MATRIKELNUMMER	754762
REFERENT	PROF. DR.-ING. JOHANNES KUNTSCHE HOCHSCHULE DARMSTADT
KORREFFERENT	DR. MARKUS SCHMIDT HOCHSCHULE DARMSTADT
A U S G A B E D A T U M	23.10.2023
A B G A B E D A T U M	05.09.2024

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Quellenverzeichnis angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Quellen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Das gilt auch für Quellen, die ich selbst für andere Zwecke erstellt habe. Die Zeichnungen oder Abbildungen in der Arbeit sind von mir selbst erstellt worden oder mit einem entsprechenden Quellennachweis versehen. Diese Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Prüfung oder Prüfungsbehörde eingereicht worden. Mir ist bekannt, dass ein Täuschungsversuch, der zur Exmatrikulation führen kann, vorliegt, wenn sich die vorstehende Erklärung als unrichtig erweist.

Datum:

05.09.2024

Unterschrift des Verfassers:

Die Arbeit umfasst

204 Seiten



# MASTERARBEIT

für Herrn Mustafa Aslan, Matr.-Nr.: 754762

## THEMA: UNTERSUCHUNGEN ZUR VERFORMUNGSPROGNOSSE VON STAHLBETONBAUTEILEN

Für den Nachweis der Verformungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sind beim Stahlbetonbau unterschiedliche nichtlineare Einflüsse (Kriechen, Schwinden, Rissbildung) zu berücksichtigen. Hierfür existieren verschiedenste ingenieurmäßige Ansätze wie beispielsweise den Nachweis der Biegeschlankheit oder eine Faktorisierung der Lasten bzw. der Berechnungsergebnisse bei Ansatz eines linear-elastischen Materialverhaltens. Darüber hinaus existieren auch nichtlineare Berechnungsmethoden mit FE-Software, deren Nachvollziehbarkeit mit steigender Komplexität immer schwieriger wird.

Herr Aslan soll in seiner Masterarbeit die verschiedenen Ansätze sowohl für einachsigen als auch für zweiachsigen Lastabtrag untersuchen, erläutern bzw. herleiten und vergleichen. Hierfür sollen auch Vergleiche mit unterschiedlichen FE-Softwareprodukten durchgeführt und deren theoretische Hintergründe erläutert werden. Für einen einachsigen Lastabtrag sollen Bauteilversuche durchgeführt und mit den Berechnungsansätzen verglichen werden.

Ziel der Masterarbeit ist, klare Empfehlungen für die Baupraxis abzuleiten, welche Ansätze in welchen Anwendungsfällen geeignet sind und erforderlichenfalls eigene Ansätze zu entwickeln.

Die folgende Aufzählung dient der Orientierung. Sie kann erweitert und in der Reihenfolge angepasst werden.

- Umfassende Literaturrecherche zum Themengebiet
- Ausführliche Vorstellung der unterschiedlichen Ansätze mit Herleitung bzw. Erläuterung der theoretischen Hintergründe
- Umfassende vergleichende Untersuchung der Ansätze (analytisch, FEM)
- Entwicklung eines Versuchskonzepts für Bauteilversuche
- Herstellung von Probekörpern, Ermittlung von Materialkennwerten, Durchführung und Auswertung der Bauteilversuche
- Vergleichende Interpretation der Ergebnisse
- Ableitung von Empfehlungen für die baupraktische Anwendung
- Zusammenfassung und Ausblick

---

Die Darlegungen in der Arbeit sollen in gebotenumfang mit Hintergrundinformationen erläutert werden. Hierbei werden in gebotenumfang ingenieurmäßige und gegebenenfalls ingenieurwissenschaftliche Methoden erwartet. Eine kritische Auseinandersetzung mit neuen Themengebieten ist erforderlich. Die neuen Sachverhalte sollen mit eigenem bekanntem Wissen verglichen werden und auf dieser Grundlage analysiert und interpretiert werden. Dieser Prozess ist in hinreichendem Umfang textlich und grafisch zu dokumentieren.

Weiterhin sind die Kerninhalte und wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit in Form eines Posters darzustellen. Dafür wird eine entsprechende Formatvorlage zur Verfügung gestellt. Das Poster ist zum Kolloquium mitzubringen.

---

Tag der Ausgabe: 23.10.2023  
Tag der Abgabe: 23.04.2024  
Darmstadt, den 16.10.2023

  
Referent  
Prof. Dr.-Ing. J. Kuntsche

  
Korreferent  
Dr. Markus Schmidt

Die Arbeit ist dreifach einzureichen. Sämtliche textlichen Teile der Arbeit, Eingabedateien, Bilder, Zeichnungen usw. sind auf einem Datenträger in editierfähiger Form bei den Referenten einzureichen.  
Die/des Studierende erklärt sich bereit, die Abschlussarbeit, vollständig oder in Teilen, der Fachwelt zur Verfügung zu stellen und alle Rechte an die Hochschule Darmstadt bzw. an Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Kuntsche abzutreten.



## I Vorwort

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer, Prof. Dr.-Ing. Johannes Kuntsche, für seine kontinuierliche Unterstützung und die Zeit bedanken, die er sich stets genommen hat, um meine Fragen zu klären.

Mein besonderer Dank gilt auch meinem Korreferenten, Dr. Markus Schmidt, für seine wertvolle Hilfe im experimentellen Teil der Arbeit sowie Herrn Daniel Willer für seine tatkräftige Unterstützung bei den praktischen Arbeiten.

Ebenso danke ich Herrn Martin Weber und dem Team der Wasserbauhalle für ihre Unterstützung bei der Planung der Versuchsdurchführung und beim Rückbau des Versuchsaufbaus.

Mein Dank gilt auch dem Rohbauunternehmen Tüfek Bau GmbH für die Herstellung und den Transport der Stahlbetonbalken an die Hochschule.

Ich möchte außerdem darauf hinweisen, dass zur Unterstützung bei der sprachlichen Formulierung dieser Arbeit KI-basierte Tools verwendet wurden, um die Lesbarkeit und Klarheit zu verbessern.



## II Kurzfassung

Die Berechnung der Verformungen von Stahlbetonbauteilen ist aufgrund der vielfältigen Einflüsse, wie Kriechen, Schwinden und Rissbildung, eine komplexe Aufgabe. Zudem sind die Ergebnisse aufgrund streuender Materialkennwerte mit hohen Unsicherheiten verbunden. Diese Masterarbeit untersucht die Verformungsprognose von Stahlbetonbauteilen, indem verschiedene Berechnungsverfahren zur Begrenzung der Verformungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit verglichen und bewertet werden.

Die theoretischen Grundlagen befassen sich insbesondere mit dem Elastizitätsmodul, den zeitabhängigen Effekten wie Kriechen und Schwinden sowie der Rissbildung. Normative Unterschiede und deren Hintergründe werden detailliert erläutert, um die unterschiedlichen Normvorgaben und ihre Auswirkungen auf Verformungen besser zu verstehen.

Analysiert werden sowohl vereinfachte Nachweismethoden, wie der Nachweis über die Biegeschlankheit und die Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse, als auch direkte Verformungsberechnungen mittels numerischer Integration der Momenten-Krümmungs-Linie. Zusätzlich werden die in FE-Softwareprodukten wie mb AEC und Dlubal Software implementierten Ansätze untersucht und verglichen.

Im experimentellen Teil der Arbeit wurden Versuche mit Stahlbetonbalken durchgeführt, die unter praxisnahen Bedingungen hergestellt wurden. Zur Bestimmung der Materialkennwerte des Betons wurden zudem Probekörper hergestellt. Die Verformungen der Stahlbetonbalken, die sich im Laufe der Zeit einstellten, wurden messtechnisch erfasst und mit den Ergebnissen der verschiedenen Berechnungsverfahren verglichen. Ein Berechnungsansatz zeigte dabei eine besonders gute Übereinstimmung mit den gemessenen Verformungen.

Auf Grundlage dieser Vergleiche und Ergebnisse wird eine Empfehlung für die Anwendung in der Baupraxis abgeleitet.

## **Abstract**

Calculating the deformations of reinforced concrete components is a complex task due to various factors, such as creep, shrinkage, and cracking. Additionally, the results are subject to high uncertainties due to variability in material properties. This master's thesis investigates the prediction of deformations in reinforced concrete components by comparing and evaluating different calculation methods for limiting deformations in the serviceability limit state.

The theoretical framework focuses on the modulus of elasticity, time-dependent effects such as creep and shrinkage, as well as cracking. Normative differences and their underlying reasons are explained in detail to provide a better understanding of the different standard specifications and their impact on deformations.

Both simplified verification methods, such as verification using bending slenderness and factorization of linear-elastic calculation results, and direct deformation calculations using numerical integration of the moment-curvature relationship are analyzed. Additionally, the approaches implemented in FE software products, such as mb AEC and Dlubal Software, are examined and compared.

In the experimental part of the thesis, tests were conducted on reinforced concrete beams that were produced under realistic conditions. Test specimens were also prepared to determine the material properties of the concrete. The deformations of the reinforced concrete beams, which developed over time, were measured and compared with the results from different calculation methods. One calculation method showed particularly good agreement with the measured deformations.

Based on these comparisons and results, a recommendation for practical application in construction was derived.

### III Inhaltsverzeichnis

I	Vorwort .....	i
II	Kurzfassung .....	iii
III	Inhaltsverzeichnis.....	v
1	Einleitung.....	1
2	Grundlagen: Einflüsse auf das Verformungsverhalten .....	5
2.1	Bauteilgeometrie .....	5
2.2	Beton .....	7
2.2.1	Zusammensetzung .....	7
2.2.2	Druckfestigkeit .....	9
2.2.3	Zugfestigkeit .....	14
2.2.4	Spannungs-Dehnungs-Beziehung .....	18
2.2.5	Zeitabhängige Verformungen .....	28
2.3	Betonstahl .....	51
2.4	Stahlbeton .....	55
2.4.1	Tragverhalten unter Zugbeanspruchung .....	55
2.4.2	Tragverhalten unter Biegebeanspruchung .....	71
3	Bewertung unterschiedlicher Nachweismethoden für die Verformungen .....	75
3.1	Vereinfachter Nachweis über die Biegeschlankheit .....	75
3.1.1	Allgemeines .....	75
3.1.2	Regelungen nach DIN 1045-1.....	76
3.1.3	Regelungen nach DIN EN 1992-1-1 .....	78
3.2	Rechnerischer Nachweis .....	84
3.2.1	Allgemeines .....	84
3.2.2	Grundlagen .....	86
3.2.3	Numerische Verformungsberechnung durch Integration der Momenten-Krümmungs-Beziehung .....	92
3.2.4	Vereinfachte Durchbiegungsberechnung durch Ansatz von abschnittsweise konstanten Biegesteifigkeiten .....	101
3.2.5	Vereinfachte Durchbiegungsberechnung mit	

	konstanter Biegesteifigkeit.....	103
3.2.6	Vergleich.....	104
3.3	Nachweis in FE-Softwareprodukten .....	115
3.3.1	mb AEC Software.....	115
3.3.2	Dlubal Software .....	121
3.3.3	Vergleich.....	123
3.4	Vereinfachter Nachweis über Faktorisierung der linear- elastischen Berechnungsergebnisse .....	126
<b>4</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen .....</b>	<b>131</b>
4.1	Beschreibung und Aufbau des Versuches .....	131
4.1.1	Herstellung der Balken und Probekörper .....	135
4.1.2	Vorbereitung des Versuchsaufbaus .....	141
4.1.3	Transport, Positionierung und Belastung der Balken .....	143
4.2	Ermittlung der Kennwerte im Labor .....	146
4.2.1	Druckfestigkeit-Probekörper.....	147
4.2.2	Druckfestigkeit-Bohrkerne.....	162
4.2.3	Elastizitätsmodul .....	168
4.3	Auswertung .....	175
4.4	Vergleich der gemessenen Verformung mit den verschiedenen Berechnungsansätzen .....	186
<b>5</b>	<b>Ableitung einer Empfehlung für die Baupraxis .....</b>	<b>195</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>197</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>199</b>

## 1 Einleitung

Um die Gebrauchstauglichkeit von Bauwerken sicherzustellen, ist die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Berechnungsverfahren zur Vorhersage von Verformungen entscheidend. Diese Arbeit untersucht verschiedene Ansätze zur Begrenzung von Verformungen – von vereinfachten Methoden bis hin zu direkten Berechnungsansätzen. Ziel ist es, die Genauigkeit dieser Verfahren anhand eines Versuches zu bewerten und daraus eine Empfehlung für die Baupraxis abzuleiten.

### Mögliche Folgen durch übermäßige Verformungen

Gemäß DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 dürfen die Verformungen eines Bauteils oder Tragwerks weder die ordnungsgemäße Funktion noch das äußere Erscheinungsbild des Bauteils beeinträchtigen oder Schäden an benachbarten Bauteilen verursachen [1], [2].

Die Gebrauchstauglichkeit einer Decke wäre beispielsweise nicht mehr gegeben, wenn das Erscheinungsbild durch eine große Durchbiegung beeinträchtigt wird und dadurch das Wohlbefinden der Nutzer nicht gewährleistet ist. Übermäßige Verformungen können zudem zu größeren Deckenverdrehungen führen, was wiederum Schäden an Fassadenelementen oder Fenstern – insbesondere am Endauflager – verursachen könnte. Mögliche Folgen sind Abplatzungen des Innenputzes, Schäden an Fliesen oder Rissbildung im Außenputz [1].

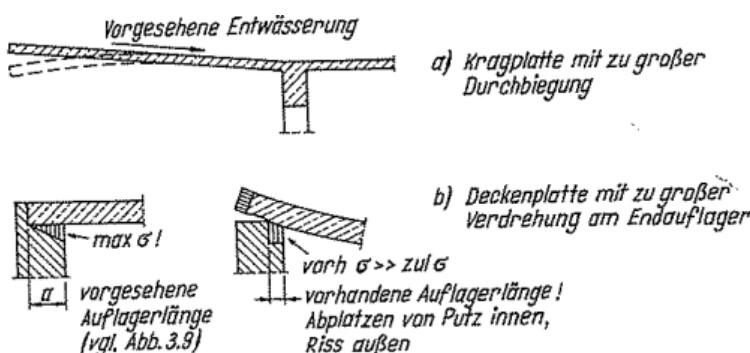


Abbildung 1.1: Schäden infolge großer Verformungen [1]

Verformungen können gleichermaßen Schäden an angrenzenden und verformungsempfindlichen Bauteilen wie leichten Trennwänden oder Verglasungen verursachen. Eine große Durchbiegung kann das geplante Gefälle für die Entwässerung beeinträchtigen, was zu Wasseransammlungen und zu Folgeschäden führen kann [1].

## Begrenzung der Verformungen

Um die Gebrauchstauglichkeit eines Bauteils zu gewährleisten, müssen die Verformungen begrenzt werden. Einheitliche Grenzwerte bezüglich unbedenklichen Durchbiegungen können jedoch nicht angegeben werden. In der Literatur schwanken die Grenzwerte hinsichtlich der zulässigen Verformungen von 1/100 bis 1/1000 der Stützweite [2].

Bei der Verformung eines Bauteils wird zwischen Durchhang und Durchbiegung unterschieden. Der Durchhang beschreibt die vertikale Bauteilverformung gemessen von der geradlinigen Verbindung der Unterstützungs punkte und ist in der Regel auf 1/250 der Stützlänge zu begrenzen [1].

Die Durchbiegung bezeichnet die vertikale Verformung, die vom Ursprungszustand des Bauteils gemessen wird. Um den Durchhang zu kompensieren, ist es möglich, eine Schalungsüberhöhung vorzusehen, die jedoch ebenfalls auf 1/250 der Stützlänge zu begrenzen ist [1].

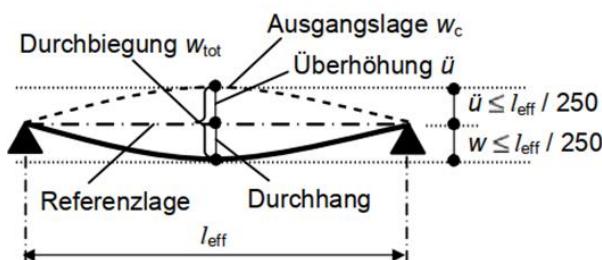


Abbildung 1.2: Definition der Durchbiegungen [3]

Werden jedoch verformungsempfindliche Bauteile, wie z. B. leichte Trennwände, eingebaut, ist die Durchbiegung nach dem Einbau dieser Bauteile auf 1/500 der Stützweite zu begrenzen. Ein Ausgleich durch eine Schalungsüberhöhung ist in diesem Fall nicht möglich, da die Durchbiegung auf die überhöhte Systemlinie des Bauteils bezogen wird. Theoretisch wäre es möglich, den Verformungsanteil, der sich vor dem Einbau dieser Bauteile einstellt, von der gesamten Durchbiegung abzuziehen. Davon ist jedoch abzuraten, da der Beginn der Ausbauarbeiten dem Tragwerksplaner in seltenen Fällen bekannt ist [1].

Gemäß DIN 1045-1 und EC2 gelten somit für den rechnerischen Verformungsnachweis im üblichen Hochbau folgende Bestimmungen [3], [4]:

- Bauteildurchhang  $\leq 1/250$  der Stützweite,
- Durchbiegung  $\leq 1/500$  der Stützweite nach dem Einbau der angrenzenden, verformungsempfindlichen Bauteile,
- Schalungsüberhöhungen, die einen Teil oder den gesamten Durchhang ausgleichen, sind zulässig, jedoch auf  $1/250$  der Stützweite zu begrenzen,
- Für Kragträger ist für die Stützweite die 2,5-fache Bauteillänge einzusetzen, jedoch sollte der Durchhang an der Kragspitze nicht den des benachbarten Feldes überschreiten.

Die Verformungen sind unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination zu berechnen [1], [2], [4].



## 2 Grundlagen: Einflüsse auf das Verformungsverhalten

Die Berechnung der Verformungen im Stahlbetonbau ist im Vergleich zu einem homogenen, isotropen Material – wie beispielsweise Stahl – wesentlich aufwändiger, da neben geometrischen Parametern weitere Effekte, wie Kriechen, Schwinden und Rissbildung, die Durchbiegung erheblich beeinflussen [5].

Im Folgenden werden diese Einflussfaktoren genauer erläutert, da sie die Verformung beträchtlich vergrößern können.

### 2.1 Bauteilgeometrie

Ein Stahlbetonbauteil verhält sich zunächst wie ein homogenes Material, so lange die aus den Lasten resultierenden Zugspannungen die Betonzugfestigkeit nicht überschreiten. Befindet sich ein Stahlbetonbalken im ungerissenen Zustand (Zustand I), gilt die Balkenbiegetheorie. Bei reiner einachsiger Biegung liegt die Nulllinie der Spannung bzw. Dehnung in Höhe der Schwerachse – der Querschnitt bleibt eben. Die Dehnungen und Spannungen weisen über die Querschnittshöhe einen linearen Verlauf auf [6].

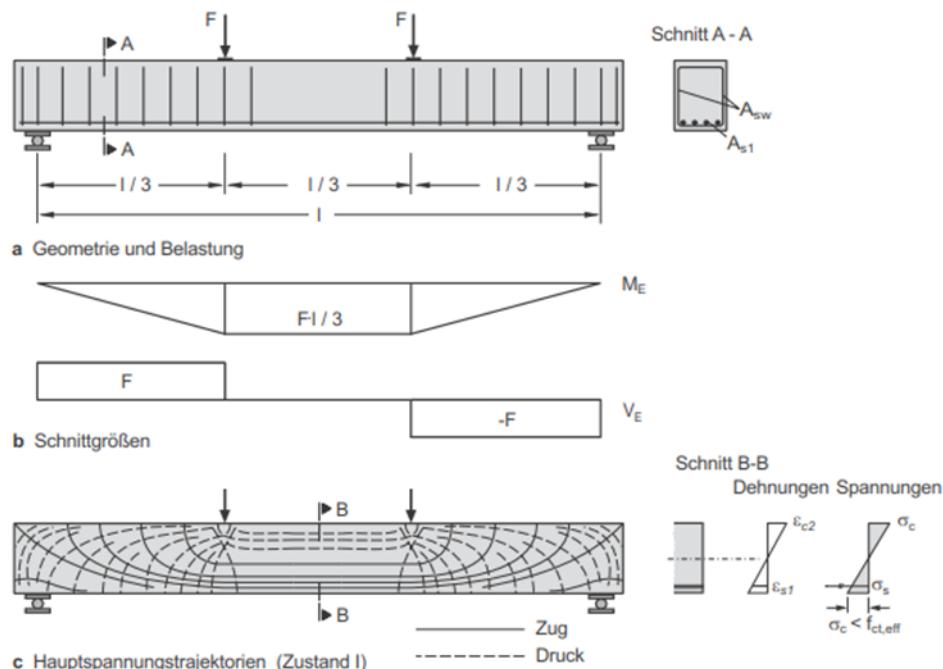


Abbildung 2.1: Spannungen und Dehnungen im Zustand I [6]

Aus der Statik ist die Differentialgleichung der Biegelinie für einen schubstarren Balken bekannt [7]:

Die Spannung in einem Querschnitt berechnet sich an der Stelle  $x$  mit:

$$\sigma_x(x) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} \cdot z_i \quad (2.1)$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz lässt sich die Dehnung berechnen:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{M_y(x) \cdot z_i}{EI_y(x)} \quad (2.2)$$

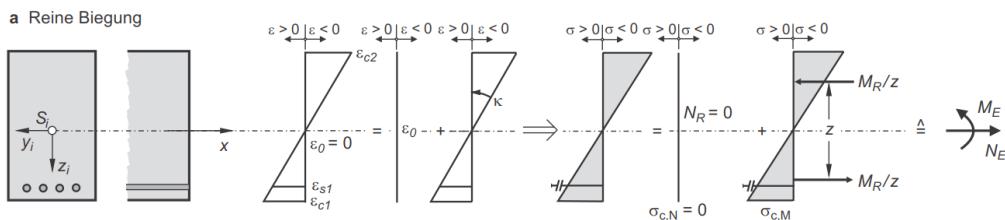


Abbildung 2.2: Spannung und Dehnung im ungerissenen Balken durch reine Biegung [6]

Daraus folgt die Krümmung:

$$\kappa(x) = \frac{\varepsilon(x)}{z_i} = \frac{M_y(x) \cdot z_i}{EI_y(x) \cdot z_i} = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \quad (2.3)$$

Die zweite Ableitung der Biegelinie entspricht der Krümmung:

$$w''(x) = -\kappa(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \quad (2.4)$$

Die erste Ableitung der Biegelinie entspricht deren Neigung:

$$w'(x) = - \int \kappa(x) \cdot dx = - \int \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \cdot dx \quad (2.5)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$w(x) = - \iint \kappa(x) \cdot dx = - \iint \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \cdot dx \quad (2.6)$$

Somit lässt sich die Durchbiegung eines schubstarren Balken durch zweifache Integration der Krümmung über seine Länge berechnen [7].

Wie zu erkennen ist, hängt die Größe der Verformung im Zustand I – ohne Berücksichtigung der Langzeiteffekte – von folgenden Faktoren ab:

- Belastung bzw. Momentenverlauf
- Elastizitätsmodul
- Querschnittsabmessung
- Länge des Balkens

## 2.2 Beton

### 2.2.1 Zusammensetzung

Der Baustoff Beton wird aus einer Mischung von Zement, Zuschlagstoff (Gesteinskörnung), Wasser und gegebenenfalls Betonzusätzen hergestellt. Zu den Betonzusätzen gehören beispielsweise Fließmittel oder Flugasche, welche die Verarbeitbarkeit und Eigenschaften des Betons verbessern können. Der Zementleim, der durch das Mischen von Zement und Wasser entsteht, erhärtet und bildet den sogenannten Zementstein. Dieser Zementstein wirkt im gehärteten Beton als Bindemittel und verleiht dem Baustoff ein dichtes, geschlossenes Gefüge [8].

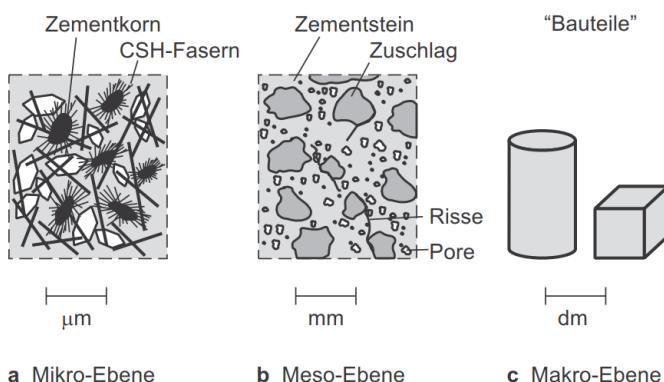


Abbildung 2.3: Verschiedene Betrachtungsebenen der Struktur des Betons [6]

#### Zementstein

Der Zementstein weist aufgrund verschiedener Ursachen sehr feine Poren auf, z. B. durch das Überschusswasser, welches bei der Hydratation des Zements chemisch nicht gebunden wird. Für die mechanischen Eigenschaften sowie die Dichtheit und Dauerhaftigkeit des Betons spielt der Zementstein, genauer gesagt das Poresystem des Zementsteins, eine entscheidende Rolle. Dieses Poresystem hängt hauptsächlich vom Wasserzementwert und dem Hydrationsgrad ab [8].

Der Wasserzementwert beschreibt das Gewichtsverhältnis von Wasser zu Zement im Frischbeton. Da der Zement etwa 25 % seines Gewichtes an Wasser chemisch und etwa 10 bis 15 % physikalisch als Gelwasser binden kann, benötigt er für eine vollständige Hydratation einen Wasserzementwert von ca. 0,35 – 0,40. Ein höherer Wasserzementwert führt zu einer Vergrößerung der Kapillarporen, da mehr Wasser verdunsten kann. Andererseits wirkt sich ein zu niedriger Wasserzementwert ebenfalls nachteilig auf die mechanischen Eigenschaften, die Dichtheit und die Dauerhaftigkeit aus. Der Zement könnte in diesem Fall nicht vollständig hydratisieren und somit die Festigkeit nachteilig beeinflussen [5].

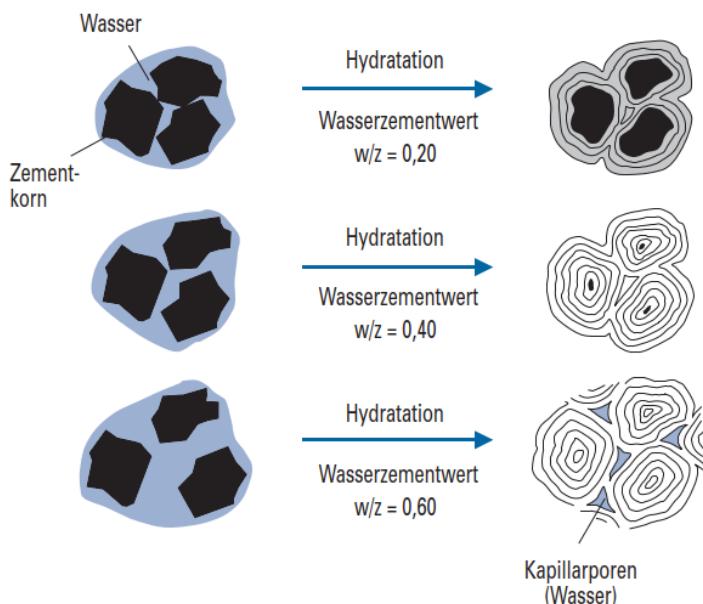


Abbildung 2.4: Einfluss des Wasserzementwertes [9]

Der Hydrationsgrad bezeichnet das Verhältnis des Zementvolumenanteils, der zu einem bestimmten Zeitpunkt mit Wasser reagiert hat, zum gesamten Volumen des Zements. Die Art und die Festigkeitsklasse des Zements sowie die gegebenenfalls beigemischten Betonzusätze beeinflussen die zeitliche Zunahme des Hydrationsgrades. Darüber hinaus haben klimatische Bedingungen und die Nachbehandlung des Betons einen Einfluss auf den Hydrationsgrad [8].

## Betonzuschlag

Die Gesteinskörnung, die den Hauptbestandteil des Betons mit etwa 70 % des Betonvolumens bildet, ist in der Regel dichter, fester und steifer als der Zementstein. Daher beeinflusst der Betonzuschlag eher den Elastizitätsmodul und die Rohdichte, während seine Auswirkung auf die Festigkeit des Normalbetons vergleichsweise gering ist [8].

Die Kornzusammensetzung ist entscheidend für den Wasseranspruch und die Verarbeitbarkeit des Frischbetons. Zur Vereinfachung der praktischen Anwendung wurden die sogenannten Regelsieblinien aufgestellt [8].

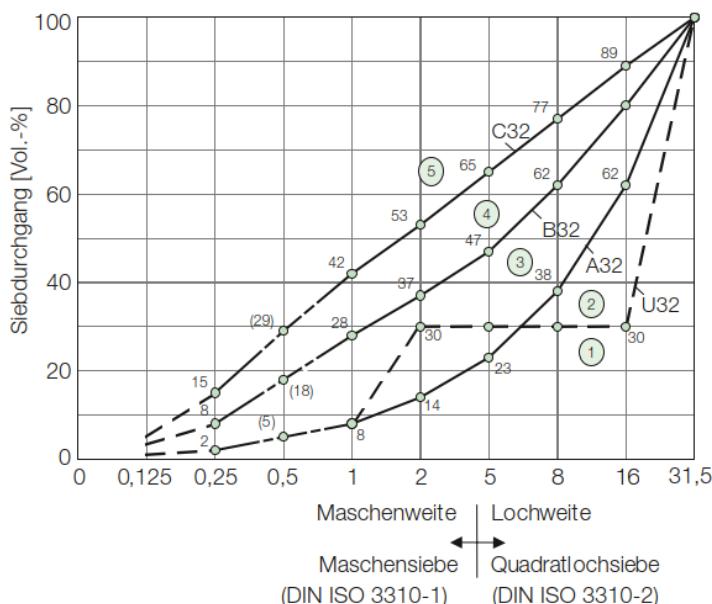


Abbildung 2.5: Sieblinien mit einem Größtkorn von 32 mm [10]

### 2.2.2 Druckfestigkeit

Die Druckfestigkeit stellt die wichtigste bautechnische Eigenschaft des Betons dar. Genormt sind Druckfestigkeiten bis  $115 \text{ N/mm}^2$ , erreichbar sind sogar Druckfestigkeiten bis  $250 \text{ N/mm}^2$  [11].

## Tragverhalten

Die Eigenschaften des Festbetons werden im Wesentlichen von der Gesteinskörnung und dem Zementstein sowie ihrem Zusammenwirken beeinflusst. Beim Normalbeton ist die Festigkeit und Steifigkeit der Gesteinskörnung höher als die des Zementsteins. Eine gleichmäßig aufgebrachte Druckspannung auf den Beton führt daher zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung. Aufgrund der unterschiedlichen Steifigkeiten wird die aufgebrachte Spannung größtenteils über die Gesteinskörnung abgetragen. Bei einer vertikalen Druckbelastung verlaufen die Spannungen im Inneren des Betons schräg, was zu Querzugsspannungen führt, die zunächst Mikrorisse verursachen. Bei steigender Druckbelastung – bereits ab etwa 40 % der Druckfestigkeit – vermehren sich die Mikrorisse und vereinigen sich bei weiterer Laststeigerung zu sichtbaren Rissen, die um die Zuschlagkörner verlaufen. Die fortschreitende Rissbildung durch Laststeigerung führt zu einem zunehmenden Steifigkeitsverlust, zur Auflockerung des Gefüges und letztendlich zum Bruch [6].

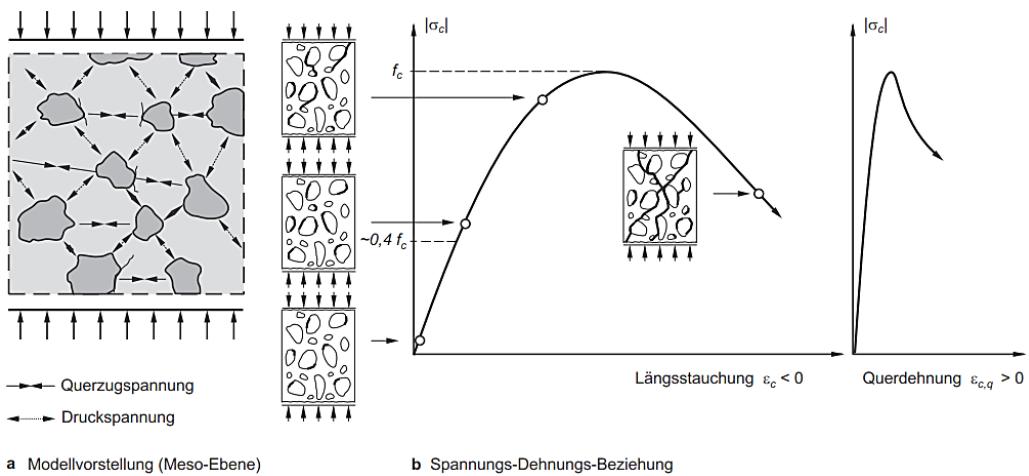


Abbildung 2.6: Tragverhalten von Normalbeton [6]

Das Verhalten von druckbeanspruchtem Beton wird durch zentrischer Druckversuche beschrieben. Der Höchstwert der gemessenen Druckspannung entspricht der einaxialen Druckfestigkeit des Betons (vgl. Abbildung 2.6). Diese ermittelte Druckfestigkeit wird als Kurzzeitdruckfestigkeit bezeichnet, da die Belastung in der Regel gleichmäßig innerhalb von 1 bis 2 Minuten bis zum Bruch erhöht wird. Mit zunehmendem Betonalter schreitet die Hydratation des Zements fort, was zu einem Anstieg der Kurzzeitdruckfestigkeit führt. Die Entwicklung der Druckfestigkeit hängt dabei von der Art des Zementes sowie von den Lagerungsverhältnissen wie Temperatur und umgebende Luftfeuchte ab [6].

Um eine Vergleichbarkeit von Ergebnissen verschiedener Versuche zu gewährleisten, sind die experimentell untersuchten Probekörper sowie deren Randbedingungen – wie Betonalter, Lagerungsbedingungen und Klimaverhältnisse – und die Versuchsdurchführung normativ geregelt [6].

Bei der Bestimmung der Druckfestigkeit wird durch den Kontakt mit starren Druckplatten die Querdehnung des Probekörpers behindert, wodurch zusätzliche Druckspannungen hervorgerufen werden. Diese überlagern sich den Querzugspannungen und verzögern die Makrorissbildung, was zu einer lokalen Erhöhung der Druckfestigkeit führt. Durch den Austausch starrer Druckplatten gegen Stahldrahtbürsten kann eine unbehinderte Querdehnung erreicht werden [6].

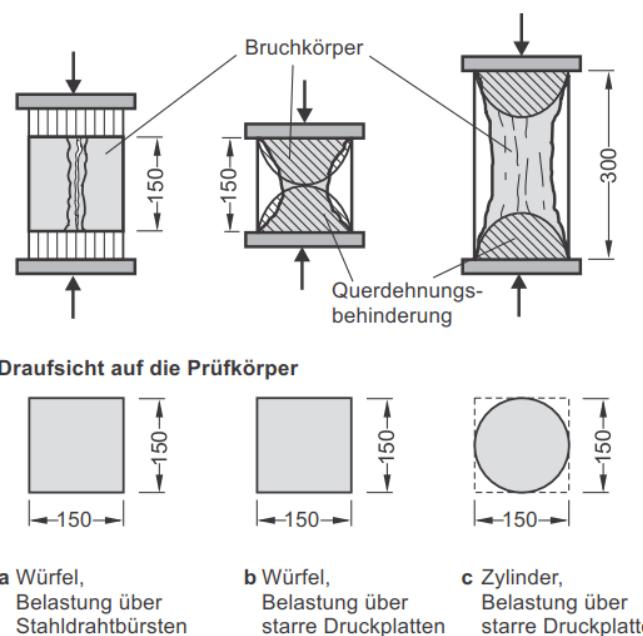


Abbildung 2.7: Prüfung der Druckfestigkeit mit Standardversuchskörpern [6]

Die Schlankheit des Probekörpers hat einen erheblichen Einfluss auf die Druckfestigkeit. Mit zunehmendem Verhältnis von Höhe zu Kantenlänge bzw. zum Durchmesser des Probekörpers verringert sich der Effekt der Querdehnungsbehinderung, was zu einer Abnahme der Druckfestigkeit führt. Da bei realen Bauteilen eine Querdehnungsbehinderung nicht pauschal unterstellt werden kann, entspricht die am Zylinder ermittelte Druckfestigkeit eher dem tatsächlichen Verhalten des Bauteils. Daher dient die Zylinderdruckfestigkeit  $f_{c,zyl}$  (kurz:  $f_c$ ) als Basisgröße für die Bemessung nach DIN EN 1992-1-1. Die Zylinderdruckfestigkeit  $f_{ck}$ , die als 5 %-Quantil aller Einzelwerte definiert ist, beschreibt die Festigkeitsklasse des Normalbetons (Kennzeichnung als „C“) bzw. des Leichtbetons (Kennzeichnung als „LC“). Die ermittelte charakteristische Würfeldruckfestigkeit  $f_{ck,cube}$  ergänzt die Bezeichnung (vgl. Tabelle 2.1) [6].

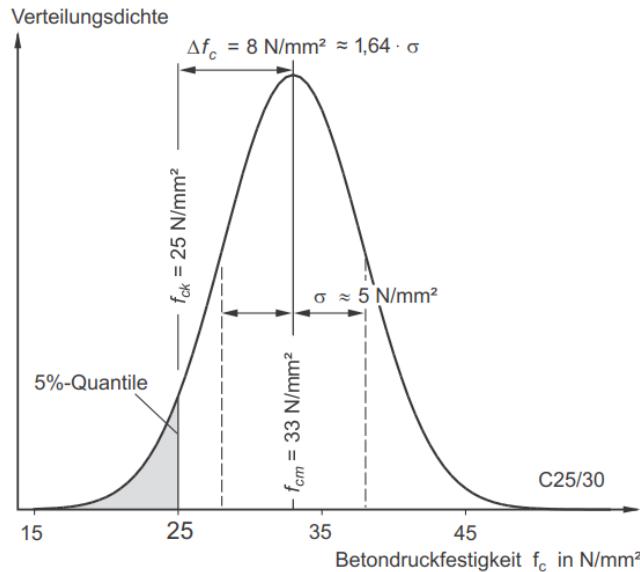


Abbildung 2.8: Normalverteilung der Druckfestigkeit des Betons C25/30 [6]

Die Betondruckfestigkeit wird aufgrund ihres streuenden Charakters nicht auf eine mittlere Druckfestigkeit  $f_{cm}$ , sondern auf die charakteristische Druckfestigkeit  $f_{ck}$  nach 28 Tagen bezogen. Zwischen dem Mittelwert und dem charakteristischen Wert der Druckfestigkeit gilt folgender Zusammenhang [8]:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,64 \cdot \sigma \quad (2.7)$$

Dabei ist:

- $f_{ck}$  die charakteristische Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen,
- $f_{cm}$  die mittlere Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen,
- $\sigma$  die Standardabweichung zwischen charakteristischem Wert und Mittelwert, beträgt unabhängig von der Festigkeitsklasse ca. 5 N/mm<sup>2</sup>.

Somit gilt:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,64 \cdot 5 \text{ N/mm}^2 = f_{cm} - 8 \text{ N/mm}^2 \quad (2.8)$$

Tabelle 2.1: Druckfestigkeitsklassen für Beton [10]

Druckfestigkeitsklasse	$f_{ck,cyl}$ <sup>1)</sup> [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ck,cube}$ <sup>2)</sup> [N/mm <sup>2</sup> ]
C8/10	8	10
C12/15	12	15
C16/20	16	20
C20/25	20	25
C25/30	25	30
C30/37	30	37
C35/45	35	45
C40/50	40	50
C45/55	45	55
C50/60	50	60
C55/67 <sup>3)</sup>	55	67
C60/75	60	75
C70/85	70	85
C80/95	80	95
C90/105 <sup>4)</sup>	90	105
C100/115 <sup>4)</sup>	100	115

<sup>1)</sup>  $f_{ck,cyl}$  = charakteristische Mindestdruckfestigkeit von Zylindern (Durchmesser 150 mm, Länge 300 mm, Alter 28 Tage, Wasserlagerung).

<sup>2)</sup>  $f_{ck,cube}$  = charakteristische Mindestdruckfestigkeit von Würfeln (Kantenlänge 150 mm, Alter 28 Tage, Wasserlagerung).

<sup>3)</sup> Ab Druckfestigkeitsklasse C55/67: Hochfester Beton.

<sup>4)</sup> Druckfestigkeitsklassen C90/105 und C100/115: allgemeine bauaufsichtliche Zulassung oder Zustimmung im Einzelfall erforderlich.

Die in Tabelle 2.1 dargestellten Betondruckfestigkeiten gelten für ein Alter von 28 Tagen. Die Betondruckfestigkeit für ein bestimmtes Alter kann wie folgt berechnet werden [3]:

$$f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8 \text{ N/mm}^2 \quad \text{für } 3 < t < 28 \text{ Tage} \quad (2.9)$$

$$f_{ck}(t) = f_{ck} \quad \text{für } t > 28 \text{ Tage} \quad (2.10)$$

Die Entwicklung der Betondruckfestigkeit wird maßgeblich vom Zementtyp, den Lagerungsbedingungen und der Temperatur beeinflusst. Die mittlere Betondruckfestigkeit zu einem bestimmten Alter darf bei einer mittleren Temperatur von 20 °C und unter Einhaltung der Lagerungsbedingungen gemäß DIN EN 12390 wie folgt berechnet werden [3]:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \quad (2.11)$$

mit

$$\beta_{cc}(t) = e^{s \cdot (1 - \sqrt{28/t})} \quad (2.12)$$

Hierbei ist:

$\beta_{cc}(t)$  ein Faktor, welcher vom Alter des Betons  $t$  abhängig ist

$s$  ein Faktor, welcher vom Zementtyp abhängig ist:

- für Zementfestigkeitsklassen CEM 42,5 R, CEM 52,5 N und CEM 52,5 R (Klasse R) gilt:  $s = 0,20$
- für Zementfestigkeitsklassen CEM 32,5 R und CEM 42,5 N (Klasse N) gilt:  $s = 0,25$
- für die Zementfestigkeitsklassen CEM 32,5 N (Klasse S) gilt:  $s = 0,38$
- für hochfeste Betone, unabhängig von der Zementfestigkeitsklasse, gilt:  $s = 0,20$

$t$  Betonalter in Tagen

### 2.2.3 Zugfestigkeit

Der Beton kann im Vergleich zu Druckkräften nur deutlich kleinere Zugkräfte aufnehmen. Die Zugfestigkeit des Betons liegt bei etwa 5 – 10 % der Druckfestigkeit und ist ebenfalls eine streuende Größe. Diese Streuung ist jedoch wesentlich stärker als bei der Druckfestigkeit. Daher ist die Zugfestigkeit keine verlässliche Größe – sie hängt stark von den Zuschlägen, der Beanspruchungsart und der Festigkeitsklasse des Betons ab. Für die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit wird die Zugfestigkeit des Betons nicht angesetzt. Für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sind jedoch Anhaltswerte erforderlich [11].

## Tragverhalten

Die Zugfestigkeit des Betons kann durch unterschiedliche Versucharten bestimmt werden [8]. Nach DIN 1045-1 und EN 1992-1-1 bauen die Bemessungsregeln in der Regel auf der zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ct}$  auf, wobei deren versuchstechnische Bestimmung im Vergleich zur Druckfestigkeitsbestimmung deutlich aufwändiger ist [6].

Das Problem liegt an der Einleitung der Zugkraft, die zentrisch in den Beton übertragen werden soll. Die Vermeidung von exzentrischer Zugkrafteinleitung ist selbst über Stahlplatten, die auf den Probekörper geklebt werden, schwierig zu realisieren und mit Fehleranfälligkeit verknüpft. Daher wird die Zugfestigkeit des Betons statt mit zentrischen Zugversuchen grundsätzlich mit Biegezug- und Spaltzugversuchen bestimmt [6].

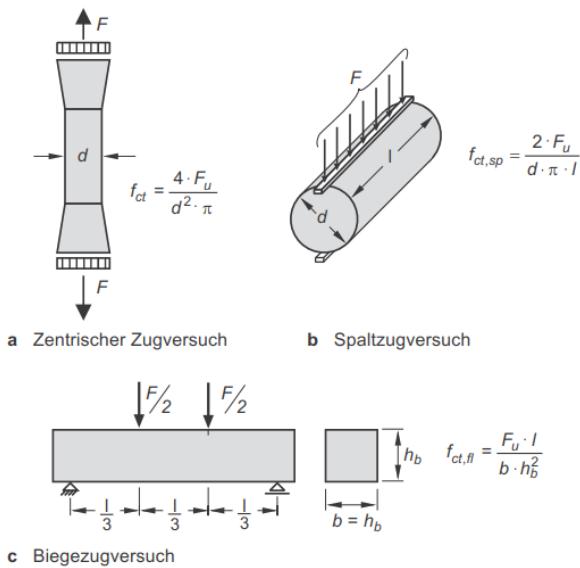


Abbildung 2.9: Verschiedene Versucharten zur Bestimmung der Zugfestigkeit des Betons [6]

Um die Spaltzugfestigkeit an Zylindern, Würfeln oder Prismen zu bestimmen, werden zur Lasteinleitung normativ geregelte Zwischenstreifen aus Hartfaserplatten verwendet. Dadurch entstehen im Einleitungsbereich Druckspannungen in Richtung der Linienbelastung und im inneren Bereich senkrecht dazu stehende Zugspannungen. Dies führt zu einem zweiachsigem Spannungszustand [12].

Die Spaltzugfestigkeit lässt sich mit folgender Gleichung berechnen [10]:

$$f_{ct,sp} = \frac{2 \cdot F}{d \cdot \pi \cdot l} \quad (2.13)$$

Dabei ist:

$f_{ct,sp}$  die Spaltzugfestigkeit,

$F$  die Maximallast,

$L$  die Länge der Linienlast auf den Probekörper,

$d$  der Durchmesser, bzw. die Breite bei Würfeln.

Die Biegezugfestigkeit des Betons ist unter der Annahme linear-elastischen Verhaltens als die maximal aufnehmbare Zugspannung definiert. Nach DIN EN 12390-5 ist es möglich, einen Balken auf zwei verschiedene Arten zu beladen. Entweder mit einer Einzellast in Feldmitte oder mit Einzellasten in den Drittelpunkten. Die erstgenannte Variante liefert etwa 10 – 30 % höhere Zugspannungen im Vergleich zur Belastung in den Drittelpunkten. Dies ist auf den unterschiedlichen Momentenverlauf zurückzuführen. Da das maximale Moment zwischen zwei Einzellasten einen konstanten Verlauf aufweist, versagt der Balken örtlich an der schwächsten Stelle [12].

Die Biegezugfestigkeit bei Belastung in den Drittelpunkten berechnet sich mit [10]:

$$f_{ct,fl} = \frac{F \cdot l}{b \cdot h^2} \quad (2.14)$$

Hierbei ist:

$f_{ct,fl}$  die Biegezugfestigkeit,

$F$  die Maximallast,

$L$  die Länge des Balkens,

$b$  die Breite des Querschnitts,

$h$  die Höhe des Querschnitts.

Falls die Zugfestigkeit mittels des Spaltzugversuchs bestimmt wurde, darf nach DIN 1045-1 bzw. DIN EN 1992-1-1 die einachsige Zugfestigkeit wie folgt berechnet werden [6]:

$$f_{ct} = f_{ct,sp} \cdot 0,9 \quad (2.15)$$

Der Mittelwert und die Quantilwerte der zentrischen Zugfestigkeit sind nach DIN EN 1992-1-1 folgendermaßen definiert [6]:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{für } f_{ck} \leq 50 \text{ MN/m}^2 \quad (2.16)$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln\left(1,8 + \frac{f_{ck}}{10}\right) \quad \text{für } f_{ck} > 50 \text{ MN/m}^2 \quad (2.17)$$

$$f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (2.18)$$

$$f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (2.19)$$

Dabei ist:

$f_{ctm}$  die mittlere zentrische Zugfestigkeit,

$f_{ck}$  die charakteristische Betondruckfestigkeit,

$f_{ctk;0,05}$  der 5 % - Quantilwert der zentrischen Betonzugfestigkeit,

$f_{ctk;0,95}$  der 95 % - Quantilwert der zentrischen Betonzugfestigkeit.

Der Mittelwert der Zugfestigkeit für ein bestimmtes Alter darf, wenn keine genaueren Werte vorliegen, wie folgt ermittelt werden [3]:

$$f_{ctm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{ctm} \quad \text{für } t < 28 \text{ Tage} \quad (2.20)$$

$$f_{ctm}(t) = [\beta_{cc}(t)]^{2/3} \cdot f_{ctm} \quad \text{für } t \geq 28 \text{ Tage} \quad (2.21)$$

mit

$\beta_{cc}(t)$  aus Gleichung (2.12)

## 2.2.4 Spannungs-Dehnungs-Beziehung

Die Kenntnis über das Werkstoffverhalten eines Baustoffs ist erforderlich, um zum einen bei statisch unbestimmten Systemen die Schnittgrößen und zum anderen die Verformungen eines Bauteils oder Tragwerks zu ermitteln. Für die Querschnittsbemessung stellt diese Kenntnis ebenfalls eine Voraussetzung dar. Das Verhalten eines Baustoffs wird durch die Spannungs-Dehnungs-Linie beschrieben, die im Kurzzeitversuch gemessen wird [11].

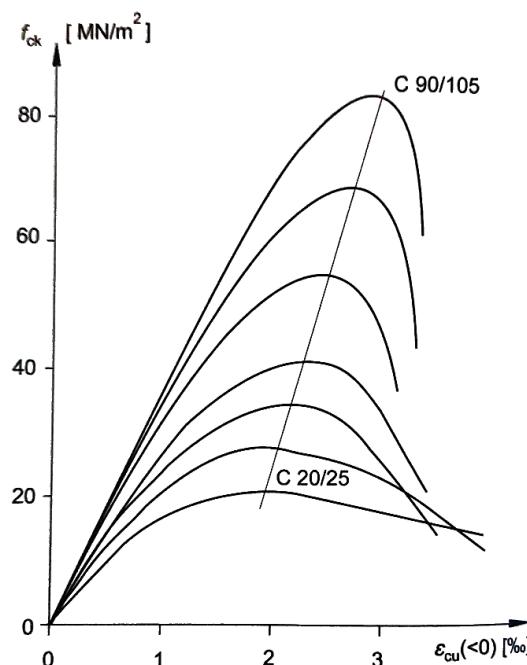


Abbildung 2.10: Reale Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Betonen unterschiedlicher Festigkeitsklassen [11]

Die Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons ergibt sich aus dem verformungssteuerten Druckfestigkeitsversuch. In Abbildung 2.10 sind die Spannungs-Dehnungs-Linien für unterschiedliche Betonfestigkeiten dargestellt. Zu erkennen ist, dass zunächst ein annähernd lineares Verhalten zwischen Spannung und Dehnung vorherrscht. Wird der Beton weiter belastet, steigen die Dehnungen überproportional zur Spannung an. Ab diesem Niveau ist kein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung vorhanden. Bis zur Höchstspannung liegt demnach ein nichtlinearer Anstieg der Dehnungen vor. Danach ist die Spannungs-Dehnungs-Linie mit einem nichtlinearen Abfall gekennzeichnet [11].

Bei normalfesten Betonen verhält sich der Beton bis etwa 40 % der Druckfestigkeit nahezu linear. Danach beginnen die Risse zu wachsen, die hauptsächlich durch die Kraftumlenkung im inneren des Betons infolge unterschiedlicher Steifigkeitsverteilung zwischen Gesteinskörnung und Zementstein entstehen. Ab diesem Spannungsniveau ist die Nichtlinearität zwischen Spannung und Dehnung deutlich zu beobachten. Bei hochfesten Betonen (ab C55/67) ist hingegen das Verhältnis der Steifigkeit zwischen Gesteinskörnung und Zementstein kleiner als bei Normalbetonen. Dadurch nimmt die Spannungskonzentration an den Zuschlägen ab – die inneren Spannungen im Zementstein und in der Gesteinskörnung sind gleichmäßiger. Damit einhergehend wachsen die Mikrorisse erst bei einem höheren Spannungsniveau an. Außerdem wird bei hochfesten Betonen durch den Einsatz von Silicastaub das Verbundverhalten zwischen Zementstein und Zuschlag verbessert, wodurch die Bruchfläche deutlich glatter ist als die des normalfesten Betons [8].

Ebenfalls ist aus Abbildung 2.10 zu erkennen, dass nach Erreichen der Höchstspannung der abfallende Ast der Spannungs-Dehnungs-Linie mit zunehmender Betonfestigkeitsklasse steiler wird. Je höher die Festigkeit des Betons, desto geringer sind auch die Bruchdehnungen. Der Beton verhält sich demnach mit zunehmender Festigkeit spröder [11].

### Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung und Verformungsberechnung

In der Literatur liegt eine Vielzahl von Ansätzen vor, um den Zusammenhang zwischen Druckspannung und Dehnung des Betons mathematisch zu beschreiben [6].

Gemäß DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 wird die kurzzeitig wirkende Druckspannung in Abhängigkeit der Dehnung für die Schnittgrößen- und Verformungsberechnung mit folgender nichtlinearen Gleichung beschrieben, die für  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu1}$  gilt [6], [3]:

$$\sigma_c = -\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \cdot f_{cm} \quad (2.22)$$

Nach *Zilch* [6] stammt diese Funktion aus den Ansätzen von *Grasser* [13] und *Sargin* [14].

Mit den Bezeichnungen nach DIN EN 1992-1-1 gilt [6], [3]:

$$k = -\frac{E_c \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad (2.23)$$

$$E_c = 1,05 \cdot E_{cm} \quad (2.24)$$

$$E_{cm} = 22000 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{c1} = -0,7 \cdot (f_{cm})^{0,31} \geq -2,8 \% \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{cu1} = -27 \cdot \left(\frac{98 - f_{cm}}{100}\right)^4 - 2,8 \geq -3,5 \% \quad (2.27)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.28)$$

Hierbei ist:

- $\sigma_c$  die einwirkende Druckspannung,
- $f_{cm}$  die mittlere Betondruckfestigkeit,
- $E_{cm}$  der Sekantenmodul, welcher die Spannungs-Dehnungs-Linie bei 40 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit schneidet und durch den Ursprung verläuft,
- $E_c$  der Tangentenmodul (Steigung der Spannungs-Dehnungs-Linie im Ursprung),
- $\varepsilon_{c1}$  die Dehnung bei Erreichen der Höchstspannung,
- $\varepsilon_c$  die Dehnung infolge der einwirkenden Spannung,
- $\varepsilon_{cu1}$  die Bruchdehnung,
- $k$  das Verhältnis zwischen der Spannung, die sich mit dem Tangentenmodul gemäß eines linearen Dehnungsansatzes bei Erreichen der größten Spannung ergeben würde und der mittleren Betondruckfestigkeit (wird als Plastizitätszahl genannt),
- $\eta$  das Dehnungsverhältnis zwischen der Dehnung infolge einwirkender Spannung und der Dehnung bei Erreichen der mittleren Betondruckfestigkeit.

In DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1 sind die benötigten Parameter  $f_{cm}$ ,  $E_{cm}$ ,  $\varepsilon_{c1}$  und  $\varepsilon_{cu1}$  bzw.  $\varepsilon_{c1u}$  angegeben, um daraus die Funktion für die Spannungs-Dehnungs-Linie aufzustellen [6]:

Tabelle 2.2: Festigkeits- und Formänderungskennwerte für Beton nach DIN EN 1992-1-1 [6]

Symbol	Einheit	Betonfestigkeitsklassen (EN 1992-1)														
		C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60	C55/57	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105	C100/115
$f_{ck}$	N/mm <sup>2</sup>	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
$f_{ck,cube}$	N/mm <sup>2</sup>	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
$f_{cm}$	N/mm <sup>2</sup>	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
$f_{ctm}$	N/mm <sup>2</sup>	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
$f_{ctk;0,05}$	N/mm <sup>2</sup>	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7
$f_{ctk;0,95}$	N/mm <sup>2</sup>	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8
$E_{cm}$	kN/mm <sup>2</sup>	27,1	28,6	30,0	31,5	32,8	34,1	35,2	36,3	37,3	38,2	39,1	40,7	42,2	43,6	44,9
$\varepsilon_{c1}$	%e (< 0)	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8
$\varepsilon_{cu1}$	%e (< 0)						3,5				3,2	3,0	2,8	2,8	2,8	2,8
$n$	-					2,0					1,75	1,6	1,45	1,4	1,4	1,4
$\varepsilon_{c2}$	%e (< 0)						2,0				2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6
$\varepsilon_{cu2}$	%e (< 0)						3,5				3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6
$\varepsilon_{c3}$	%e (< 0)						1,75				1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4
$\varepsilon_{cu3}$	%e (< 0)						3,5				3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6

Tabelle 2.3: Festigkeits- und Formänderungskennwerte für Beton nach DIN 1045-1 [6]

Symbol	Einheit	Betonfestigkeitsklassen (DIN 1045-1)														
		C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60	C55/57	C60/75	C70/85	C80/95	C90/105	C100/115
$f_{ck}$	N/mm <sup>2</sup>	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
$f_{ck,cube}$	N/mm <sup>2</sup>	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
$f_{cm}$	N/mm <sup>2</sup>	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
$f_{ctm}$	N/mm <sup>2</sup>	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2
$f_{ctk;0,05}$	N/mm <sup>2</sup>	1,1	1,3	1,5	1,8	2	2,2	2,5	2,7	2,9	3	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7
$f_{ctk;0,95}$	N/mm <sup>2</sup>	2	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6	6,3	6,6	6,8
$E_{cm}$	kN/mm <sup>2</sup>	25,8	27,4	28,8	30,5	31,9	33,3	34,5	35,7	36,8	37,8	38,8	40,6	42,3	43,8	45,2
$E_{cm}$	kN/mm <sup>2</sup>	21,8	23,4	24,9	26,7	28,3	29,9	31,4	32,8	34,3	35,7	37,0	39,7	42,3	43,8	45,2
$\alpha_t$	-	0,85	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,98	1,00	1,00	1,00
$\varepsilon_{c1}$	%e (< 0)	1,8	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,55	2,6	2,65	2,7	2,8	2,9	2,95	3,0
$\varepsilon_{c1u}$	%e (< 0)						3,5				3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0
$n$	-					2					2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,55
$\varepsilon_{c2}$	%e (< 0)						2,0				2,03	2,06	2,1	2,14	2,17	2,2
$\varepsilon_{c2u}$	%e (< 0)						3,5				3,1	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2
$\varepsilon_{c3}$	%e (< 0)						1,35				1,35	1,4	1,5	1,6	1,65	1,7
$\varepsilon_{c3u}$	%e (< 0)						3,5				3,1	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2

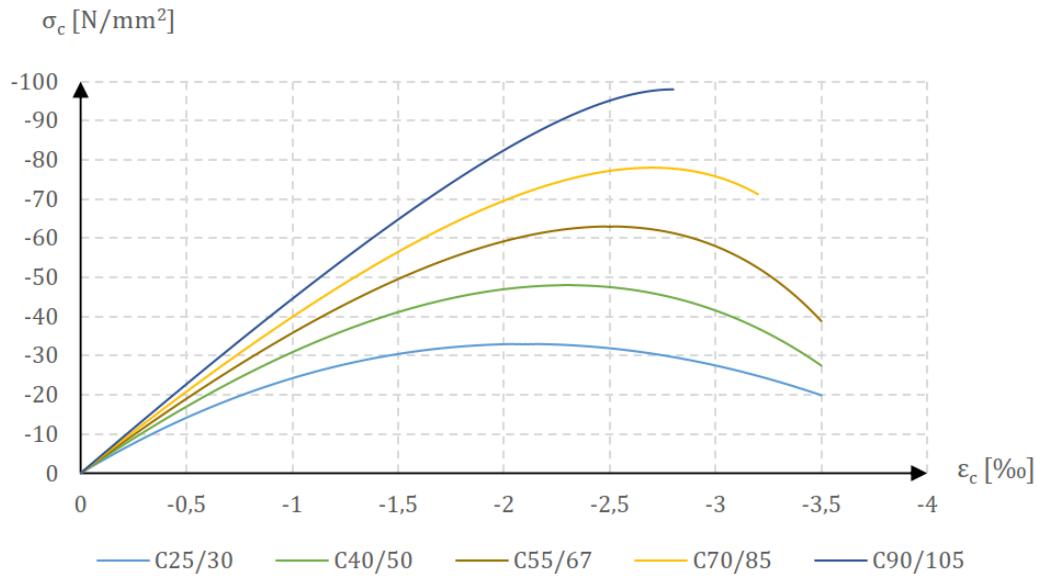


Abbildung 2.11: Spannungs-Dehnungs-Linien nach DIN EN 1992-1-1 für unterschiedliche Betonfestigkeitsklassen nach [6]

## Elastizitätsmodul

Für linear elastische Baustoffe ist der Elastizitätsmodul für alle Spannungen konstant. Der Beton weist jedoch kein lineares Verhalten auf, wodurch der Elastizitätsmodul von der Spannung abhängig ist. Demzufolge verringert sich der E-Modul mit zunehmender Spannung. Da eine nichtlineare Berechnung sehr aufwändig ist und die Betondruckspannung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit oftmals unter 40 % der mittleren Betondruckfestigkeit liegt, ist die Verwendung des Sekantenmoduls  $E_{cm}$  für die Schnittgrößen- und Verformungsberechnung hinreichend genau [11], [6].

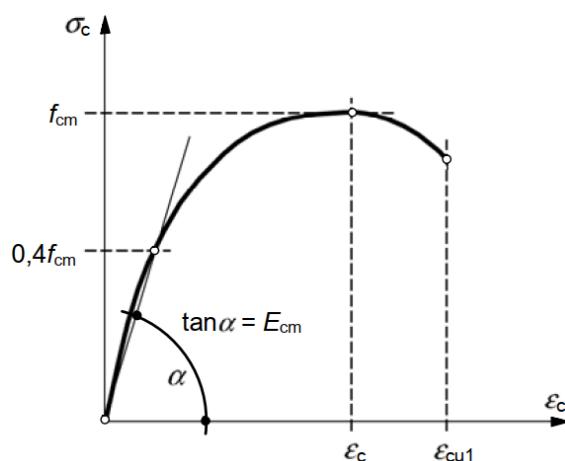


Abbildung 2.12: Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons für die Schnittgrößenermittlung mit nichtlinearem Verfahren und für Verformungsberechnungen [3]

Für den nahezu elastischen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Linie – ohne Beachtung der Langzeitauswirkungen – gilt somit das Hooke'sche Gesetz [11]:

$$\sigma_c = \varepsilon_c \cdot E_{cm} \quad (2.29)$$

Es ist wichtig zu erwähnen, dass der tatsächliche E-Modul des Betons stark von der Zusammensetzung, insbesondere von der verwendeten Gesteinskörnung abhängt und im Vergleich zu den normativen Rechenwerten deutlichen Streuungen unterliegt [6].

Nach DIN EN 1992-1-1 gelten die Richtwerte für den mittleren Elastizitätsmodul  $E_{cm}$  für Betonarten mit quarzhaltigen Zuschlägen. Bei abweichender Gesteinskörnung sollten die Richtwerte in Tabelle 2.2 mit folgender Gleichung modifiziert werden [3]:

$$E_{cm,mod} = E_{cm} \cdot \alpha_E \quad (2.30)$$

**Tabelle 2.4: Beiwerte für die Anpassung des Elastizitätsmoduls  $E_{cm}$  nach DIN EN 1992-1-1 [3]**

Gesteinskörnung	$\alpha_E$
Quarz, Quarzit	1,0
Kalkstein	0,9
Sandstein	0,7
Basalt, dichter Kalkstein	1,2

Mit zunehmender Betonerhärtung steigt der Elastizitätsmodul an und kann nach DIN EN 1992-1-1 für ein bestimmtes Alter mit folgender Gleichung berechnet werden [3]:

$$E_{cm}(t) = \left( \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}} \right)^{0,3} \cdot E_{cm} \quad (2.31)$$

Nach DIN 1045-1 berechnet sich der Tangentenmodul wie folgt [1], [4]:

$$E_{\text{com}} = 9500 \cdot (f_{\text{cm}})^{1/3} \quad (2.32)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Tangenten- und Sekantenmodul wird mit folgender Gleichung beschrieben [1], [4]:

$$E_{\text{cm}} = \alpha_i \cdot E_{\text{c0m}} \quad (2.33)$$

mit

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{\text{cm}}}{88} \leq 1,0 \quad (2.34)$$

Hierbei ist:

$E_{\text{com}}$  der Tangentenmodul (Steigung der Spannungs-Dehnungs-Linie im Ursprung),

$E_{\text{cm}}$  der Sekantenmodul, welcher die Spannungs-Dehnungs-Linie bei 40 % der Zylinderdruckfestigkeit schneidet und durch den Ursprung verläuft,

$\alpha_i$  Beiwert, welcher den Zusammenhang zwischen dem Tangentenmodul und Sekantenmodul beschreibt.

Abbildung 2.13 zeigt, dass der Tangentenmodul nach DIN EN 1992-1-1 unabhängig von der Festigkeitsklasse des Betons stets im gleichen Verhältnis größer ist als der Sekantenmodul. Dies wird bereits in Gleichung (2.24) deutlich – der Tangentenmodul ist pauschal um 5 % größer als der Sekantenmodul.

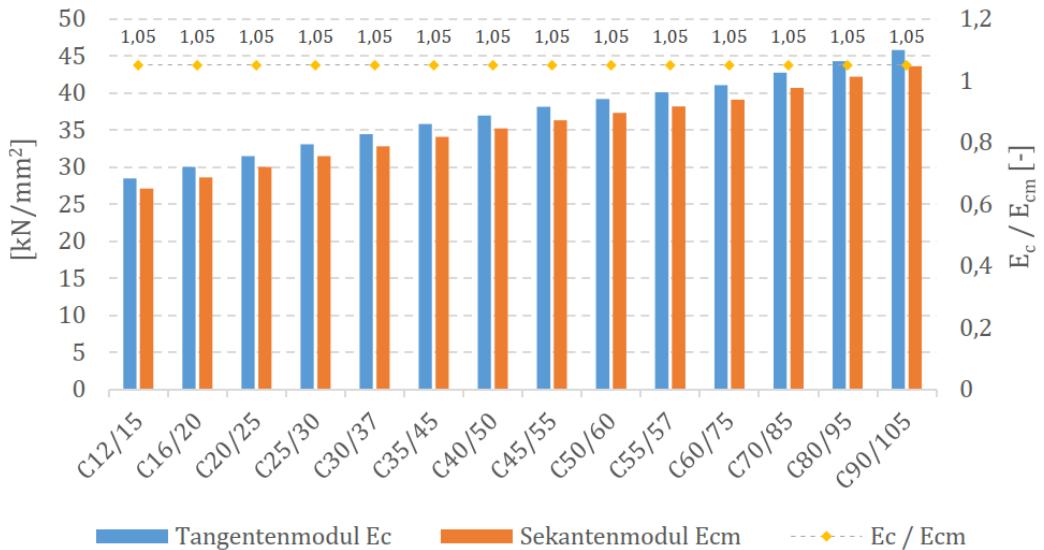


Abbildung 2.13: Tangenten- und Sekantenmodul nach DIN EN 1992-1-1

Nach DIN 1045-1 ist der Tangentenmodul nicht im gleichen Verhältnis größer als der Sekantenmodul. Der Beiwert  $\alpha_i$  aus Gleichung (2.33) ist nicht konstant – er ist abhängig von der mittleren Betondruckfestigkeit und ist auf 1,0 begrenzt. Aus Abbildung 2.14 wird ersichtlich, dass der Unterschied zwischen dem Sekanten- und dem Tangentenmodul mit zunehmender Festigkeitsklasse kleiner wird. Dies erscheint plausibel, da sich der Beton mit steigender Festigkeit spröder verhält und die Linearität zwischen Spannung und Dehnung ausgeprägter ist. Daher nähert sich die Sekantensteigung mit zunehmender Betondruckfestigkeit der Tangentensteigung an.

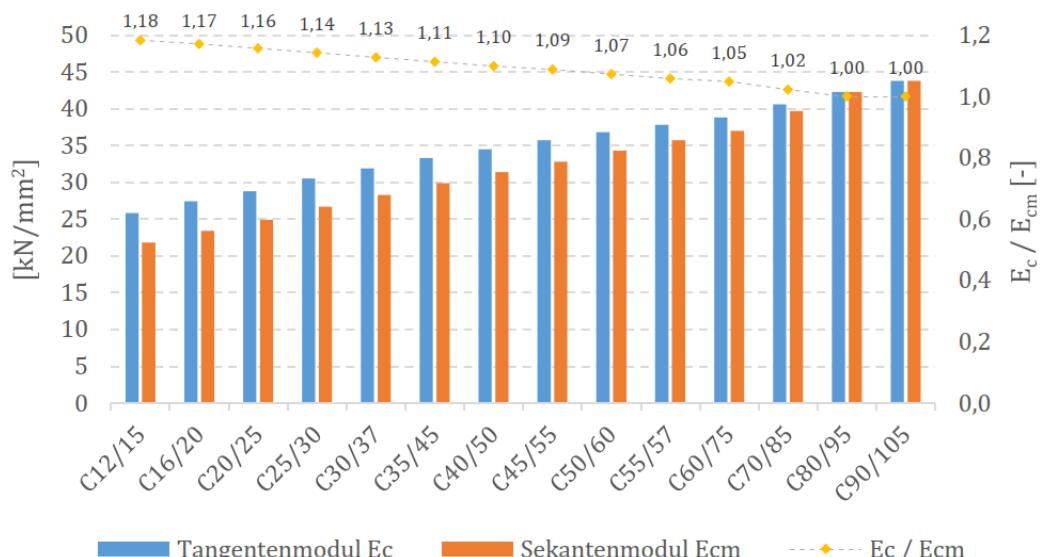


Abbildung 2.14: Tangenten- und Sekantenmodul nach DIN 1045-1

Ein Vergleich der Elastizitätsmoduln nach DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1 zeigt insbesondere bei normalfesten Betonen deutliche Unterschiede (Abbildung 2.15). Mit steigender Festigkeitsklasse werden die Unterschiede kleiner. Diese Diskrepanz ergibt sich aus den unterschiedlichen Ansätzen zur Bestimmung des Tangenten- bzw. Sekantenmoduls.

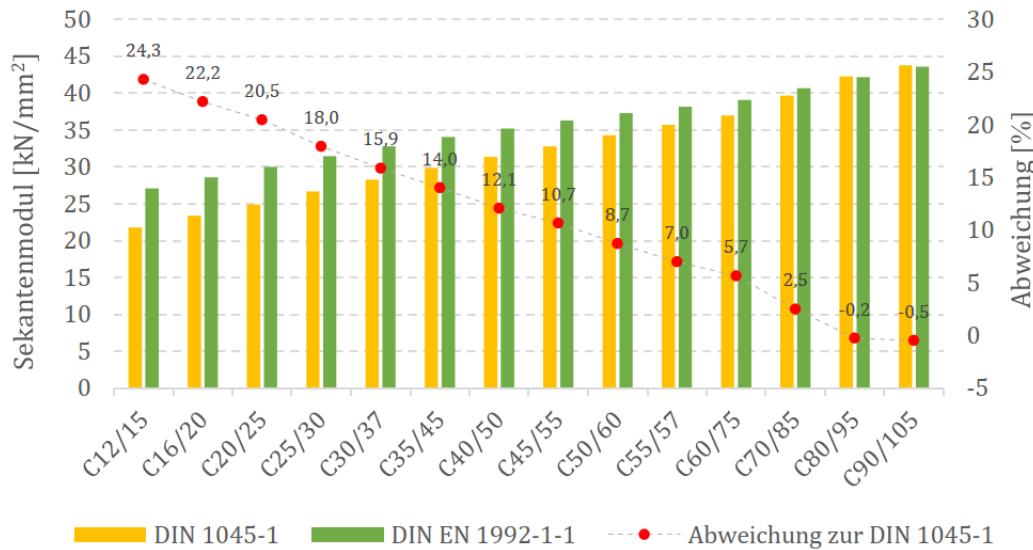


Abbildung 2.15: Vergleich der Sekantenmodulen zwischen DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1

Die Erkenntnis, dass zwischen den Normen große Unterschiede bezüglich des Elastizitätsmoduls existieren, verdeutlicht nochmals die Unverlässlichkeit dieser Werte.

In DIN 1045-1 bzw. DIN EN 1992-1-1 wird die Streuung der Elastizitätsmoduln und die damit verbundene Unsicherheit ausdrücklich erwähnt. Aus diesem Grund sind die Richtwerte bei Tragwerken, die empfindlich auf Abweichungen des E-Moduls reagieren, gesondert zu ermitteln, indem tatsächliche Prüfwerte verwendet werden. Eine Abweichung bis zu 10 % gegenüber dem tatsächlichen, im Bauwerk wirksamen E-Modul, kann allerdings trotzdem nicht ausgeschlossen werden [4], [3], [10].

Gemäß DIN EN 1992-1-1 schneidet der Sekantenmodul die Spannungs-Dehnungs-Linie bei 40 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit. Daher kann dieser auch mit Gleichung (2.22) berechnet werden, indem die zugehörige Dehnung zur Spannung – bei 40 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit – ermittelt und anschließend das Verhältnis gebildet wird.

Vergleicht man jedoch die berechneten Werte mit den in DIN EN 1992-1-1 angegebenen Sekantenmodulen, zeigt sich in Abbildung 2.16 eine deutliche Abweichung, die mit steigender Betondruckfestigkeitsklasse geringer wird. Die nach Gleichung (2.25) berechneten Sekantenmodulen nach DIN EN 1992-1-1, die ebenfalls die Spannungs-Dehnungs-Linie bei 40 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit schneiden sollen, stimmen nicht mit den berechneten Werten nach Gleichung (2.22) überein.

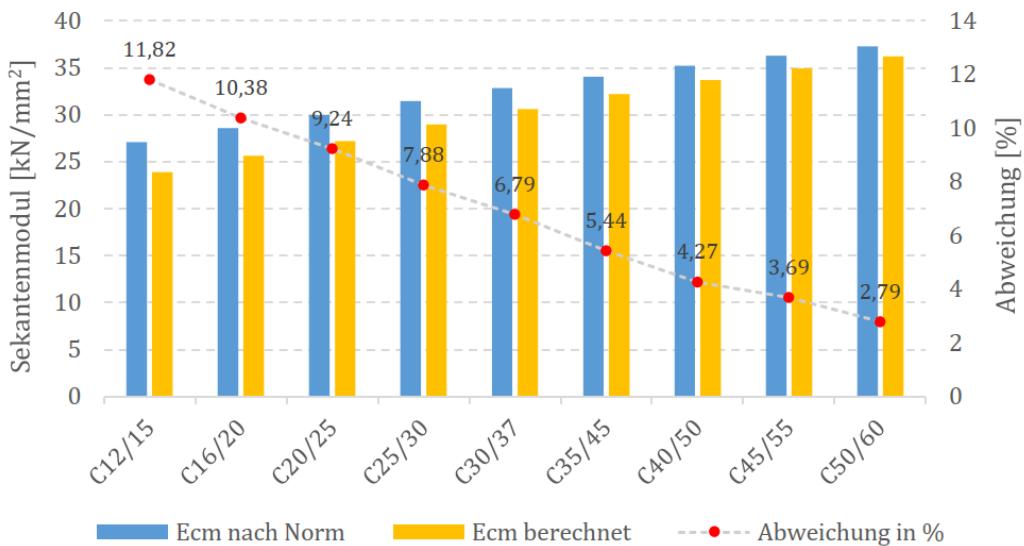


Abbildung 2.16: Vergleich der Sekantenmodulen nach DIN EN 1992-1-1 mit den berechneten Sekantenmodulen

Der Sekantenmodul gemäß DIN 1045-1 schneidet die Spannungs-Dehnungs-Linie bei etwa 40 % der mittleren Zylinderdruckfestigkeit. Abbildung 2.17 zeigt den Vergleich zwischen den mit Gleichung (2.22) berechneten Sekantenmodulen und denen, die in DIN 1045-1 nach Gleichung (2.32) angegeben sind. Es ist deutlich zu erkennen, dass beide Werte gut miteinander übereinstimmen.

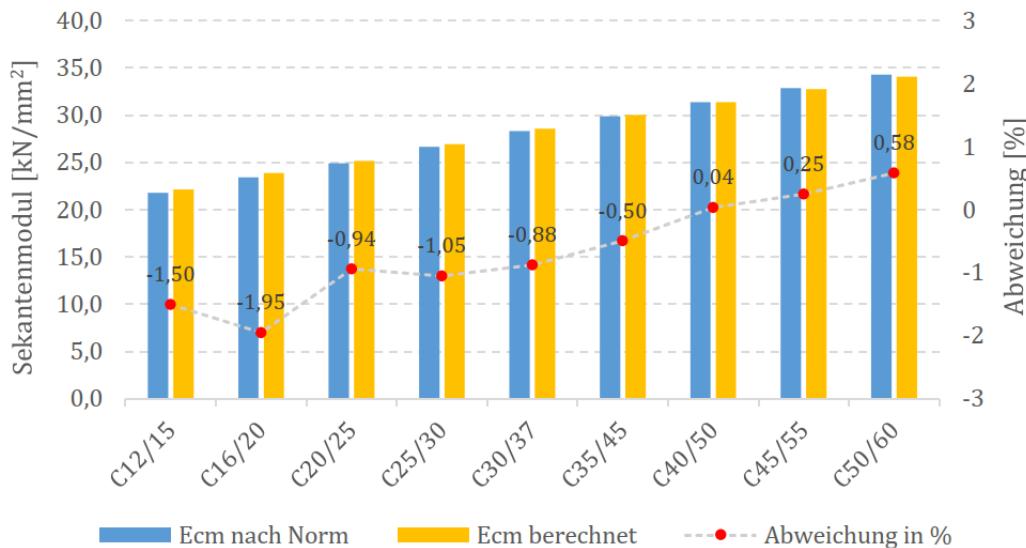


Abbildung 2.17: Vergleich der Sekantenmodulen nach DIN 1045-1 mit den berechneten Sekantenmodulen

Abschließend lässt sich sagen, dass die in DIN 1045-1 angegebenen Sekantenmodulen – aus mathematischer Sicht – sinnvoller erscheinen als die in DIN EN 1992-1-1.

## 2.2.5 Zeitabhängige Verformungen

Der Beton erfährt neben Verformungen, die durch eine kurzzeitig einwirkende Spannung hervorgerufen werden, zusätzlich auch solche, die sich im Laufe der Zeit einstellen. Diese nehmen mit steigender Dauer zu und werden als zeitabhängige Verformungen bezeichnet. Hierbei wird zwischen lastunabhängigen und lastabhängigen Verformungen unterschieden [15].

## Schwinden

Die lastunabhängige Volumenverminderung des Betons – genauer gesagt des Zementsteins im Beton – wird als Schwinden bezeichnet. Um die Ursachen und die Zusammenhänge des Schwindens besser zu verstehen, werden die Schwindarten erläutert [10]:

- **Kapillarschwinden (Frühschwinden oder plastisches Schwinden):**

Das Kapillarschwinden bezeichnet die Volumenabnahme des Betons vor dem Erhärtungsbeginn infolge von Austrocknung durch Wind oder hohe Temperaturen beim Vorherrschen von niedriger relativer Luftfeuchte. Das plastische Schwinden und die damit verbundene Rissbildung ist auf Kapillarkräfte zurückzuführen, welche beim Entzug des Wassers entstehen. Dabei steigen die Frühschwindrisse mit dem Wasserzementwert, Mehlkorngehalt und Betonzusatzmittel an. Das Frühschwinden im jungen Beton kann jedoch durch geeignete Nachbehandlungsmaßnahmen, wie beispielsweise das Belassen in der Schalung oder das Abdecken der Oberfläche mit einer Folie, verhindert bzw. gering gehalten werden [10], [15], [16].

- **Schrumpfen/Grundschatzschwinden:**

Die Summe aus dem chemischen und autogenen Schwinden wird als Schrumpfen bzw. Grundschatzschwinden bezeichnet [10].

Bei der Hydratation reagiert das Wasser mit dem Zement, indem das Wasser chemisch gebunden wird [10]. Dieser Prozess ist mit einer Volumenabnahme verbunden und wird als chemisches Schwinden bezeichnet. Das Zementgel, das bei der Hydratation des Zements entsteht und hauptsächlich aus Calciumsilicathydraten besteht, weist im Vergleich zum Volumen der Anteile von Wasser und Zement, aus denen dieses entstanden ist, ein geringeres Volumen auf [15].

Das autogene Schwinden ist unabhängig von den Umweltbedingungen und tritt insbesondere bei Betonen auf, die einen niedrigen Wasserzementwert (kleiner als etwa 0,40) besitzen. Der Zement kann durch die vorhandene, geringe Wassermenge nicht vollständig hydratisieren (vgl. Abbildung 2.4). Die Folge ist eine Volumenabnahme durch die innere Austrocknung. Dieses Phänomen ist für hochfeste Betone relevant, da der Anteil des autogenen Schwindens den des Trocknungsschwindens übertreffen kann (vgl. Abbildung 2.18) [15].

Das Grundschatzschwinden hat für normalfeste Betone keine praxisrelevante Bedeutung [10].

- **Trocknungsschwinden:**

Die Abgabe des Überschusswassers an die trockene Umgebung, das chemisch und physikalisch im Zement nicht gebunden werden kann, führt zu einer Reduzierung des Betonvolumens und wird als Trocknungsschwinden bezeichnet. Das Trocknungsschwinden erfolgt im erhärtenden Beton und ist insbesondere von der Umgebungstemperatur und relativer Luftfeuchtigkeit abhängig [10].

Für den normalfesten Beton ist das Trocknungsschwinden der größte und wichtigste Teil des Schwindens. Während die oberflächennahen Bereiche eines Betonquerschnitts innerhalb einer kurzen Zeit austrocknen und im Feuchtegleichgewicht mit der umgebenden Luft stehen, dauert dieser Prozess mit steigender Entfernung von der Oberfläche deutlich länger. Bei Querschnitten mit großen Abmessungen kann es selbst nach mehreren Jahren oder Jahrzehnten vorkommen, dass der Beton über seinen gesamten Querschnitt hinweg nicht die Ausgleichsfeuchte erreicht und somit nicht vollständig austrocknet. Dies führt im Bauteilquerschnitt zu ungleichmäßigen Eigen- bzw. Schwindspannungen. Durch den geringer schwindenden Kern des Bauteils bauen sich in der Randzone Zugspannungen und im Kernbereich Druckspannungen auf. Sofern die Zugspannungen die Zugfestigkeit des Betons überschreiten, führt dies zu Schwindrissen an der Oberfläche. Da der Zementstein beim Trocknungsschwinden – aber auch beim Grundschatzschwinden – wesentlich mehr als die steifere Gesteinskörnung schwindet, wird das Schwinden des Zementsteins behindert und führt zu Gefügespannungen. In der Gesteinskörnung entstehen Druckspannungen und im Zementstein Zugspannung. Dies führt im unbelasteten Beton zur Rissbildung in der Kontaktzone zwischen Zementmatrix und Zuschlagskorn (vgl. Abbildung 2.3). Wird die mittlere Schwindverformung eines Bauteils beispielsweise durch eine statisch unbestimmte Lagerung behindert, kann sie sich nicht frei einstellen. Dies führt zu Zwangsspannungen, die Schnittgrößen erzeugen und durchgehende Trennrisse im Bauteil verursachen können [6], [15], [16].

- **Carbonatisierungsschwinden:**

Die Reaktion des Calciumhydroxids im Zementstein mit dem Kohlendioxid aus der Luft führt ebenfalls zu einer Volumenabnahme des Betons und wird als Carbonatisierungsschwinden bezeichnet [10], [16].

Doch dieser Anteil ist im Vergleich zum Gesamtschwinden vernachlässigbar klein. Allerdings führt auch dieser Schwindanteil zu feinen Netzrissen an der Oberfläche. Diese können durch den Zutritt von Kohlendioxid und Wasser den Korrosionsschutz der Bewehrung aufheben [16].

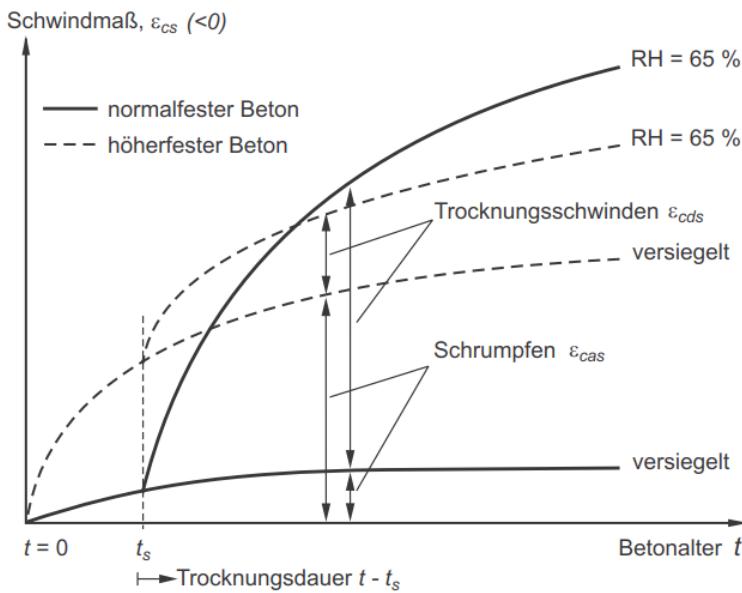


Abbildung 2.18: Wesentliche Schwindkomponenten bei Normalbeton und hochfestem Beton [6]

Im Grundsatz sind heute – auch wenn nicht im Detail – die Hintergründe bzw. die Abläufe, die zur lastunabhängigen Volumenabnahme des Betons, d. h. zum Schwinden führen, geklärt [15].

Die nach langer Trocknungszeit entstehenden Betonverformungen infolge von Schwinden liegen im Bereich von 0,1 bis 1 mm/m. Dabei ist für Normalbeton der Feuchteverlust im Laufe der Trocknungszeit der wichtigste Einflussparameter für die Größe des Schwindens [15].

Im Allgemeinen ist das Schwinden umso größer, je höher der Wasser- und der Zementleimgehalt und je niedriger die relative Luftfeuchtigkeit der Umgebungsluft ist. Zudem schwinden dicke Bauteile wesentlich langsamer im Vergleich zu dünnen, da diese erst nach sehr langer Trocknungszeit im gesamten Querschnitt ein Feuchtegleichgewicht mit der umgebenden Luft erreichen [15].

Das Endschwindmaß müsste rein theoretisch von der Bauteildicke unabhängig sein, da aber sehr dicke Bauteile erst sogar nach Jahrhunderten diesen Endwert erreichen, kann praktisch eine Abnahme des Endschwindmaßes mit steigender Bauteildicke angenommen werden [15].

### Mathematische Beschreibung des Schwindens

Die **gesamte Schwinddehnung** setzt sich aus den wesentlichen Anteilen des Grundschrwindens und des Trocknungsschwindens zusammen. Um die Schwinddehnung eines Betonbauteils zu einem betrachteten Zeitpunkt  $t$  rechnerisch zu erfassen, werden die maßgebenden Anteile voneinander getrennt betrachtet [6], [15]:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s) \quad (2.35)$$

Hierbei ist:

$\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  die Gesamtschwinddehnung bei einem bestimmten Betonalter  $t$ ,

$\varepsilon_{cas}(t)$  die Schrumpfdehnung / das Grundschrwinden bei einem bestimmten Betonalter  $t$ ,

$\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  das Trocknungsschwinden des Betons bei einem bestimmten Alter  $t$ ,

$t_s$  Alter des Betons in Tagen bei Austrocknungsbeginn.

Das **Grundschrwinden** errechnet sich durch die Multiplikation einer Zeitfunktion  $\beta_{as}(t)$  mit dem Endwert  $\varepsilon_{cas0}(f_{cm})$ , der allein von der Zementart und der Druckfestigkeit abhängig ist [6], [15]:

$$\varepsilon_{cas}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \quad (2.36)$$

Dabei ist der Zeitverlauf unabhängig von den Randbedingungen [6]:

$$\beta_{as}(t) = 1 - e^{(-0,2 \cdot \sqrt{t})} \quad (2.37)$$

Der Endwert des Grundschrwindens ist wie folgt definiert [6], [15]:

$$\varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = \left[ -\alpha_{as} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{f_{cm} + 60} \right)^{2,5} \right] \cdot \frac{1}{10^6} \quad (2.38)$$

Hierbei bedeutet:

$t$  Betonalter in Tagen,

$\alpha_{as}$  von der Zementart abhängiger Beiwert nach Tabelle 2.5.

Das **Trocknungsschwinden** ergibt sich aus dem Grundwert  $\varepsilon_{cds0}(f_{cm})$ , dem Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der relativen Luftfeuchtigkeit  $\beta_{RH}$  und einer Zeitfunktion  $\beta_{ds}(t - t_s)$  [6], [15]:

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \cdot \beta_{ds}(t - t_s) \quad (2.39)$$

mit

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{\left( -\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10} \right)} \right] \cdot \frac{1}{10^6} \quad (2.40)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right], & 40 \% \leq RH < 99 \% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25, & RH \geq 99 \% \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (2.42)$$

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left[ \frac{t - t_s}{350 \cdot \left( \frac{h_0}{100} \right)^2 + t - t_s} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

$$h_0 = 2 \cdot \frac{A_c}{U} \quad (2.44)$$

Dabei ist:

$\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$  von der Zementart abhängige Beiwerte nach Tabelle 2.5,

$RH$  relative Luftfeuchte der Umgebungsluft in %,

$h_0$  wirksame Bauteildicke in mm,

$A_c$  Querschnittsfläche des Betons,

$U$  Querschnittsumfang, der dem Trocknen ausgesetzt ist.

Die Gleichung (2.41) bringt den Unterschied zwischen Schwinden und Quellen zum Ausdruck. Ist die zweite Bedingung  $RH \geq 99 \% \cdot \beta_{s1}$  erfüllt, stellt sich rechnerisch eine positive Dehnung (Quellen) ein [6].

Gleichung (2.43) verdeutlicht, dass der zeitliche Verlauf des Trocknungsschwindens ausschließlich von der wirksamen Bauteildicke  $h_0$  beeinflusst wird [6].

Die Gleichung (2.43) basiert auf der Diffusionstheorie und ist somit auch physikalisch begründbar [15].

**Tabelle 2.5: vom Zementtyp abhängige Beiwerte  $\alpha_{as}$ ,  $\alpha_{ds1}$  und  $\alpha_{ds2}$  nach [6]**

Linie	Zementtyp	Festigkeitsklasse nach DIN EN 197-1	$\alpha_{as}$	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
„1“	SL	32,5 N	800	3	0,13
„2“	N,R	32,5 R; 42,5 N	700	4	0,12
„3“	RS	42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	600	6	0,12

Das Trocknungsschwinden nimmt im Gegensatz zum Grundschrwinden mit steigender Betondruckfestigkeit ab. Das Schwinden infolge von Austrocknung ist also umso geringer, je niedriger der Wasserzementwert und die daraus resultierende Kapillarporosität sind. Da der Wasserzementwert die Druckfestigkeit des Betons beeinflusst, ergibt sich hieraus der Zusammenhang zwischen Schwinden und Betondruckfestigkeit [15].

Das Grundschrwinden ist – wie bereits erwähnt – unabhängig von der relativen Luftfeuchte der Umgebungsluft. Dies wird nochmals durch Gleichung (2.38) verdeutlicht. Das Trocknungsschwinden hingegen wird stark von der relativen Luftfeuchte der umgebenden Luft beeinflusst [15].

Wird für  $t$  eine sehr große Zahl an Tagen eingesetzt, so wird aus den Gleichungen (2.37) und (2.43) deutlich, dass beide den Endwert 1,0 erreichen. Der Endwert des Gesamtschwindens berechnet sich dann wie folgt [15]:

$$\varepsilon_{cs}(\infty, t_s) = \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) + \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \quad (2.45)$$

Somit ist theoretisch der Endwert des Schwindens unabhängig von der Bauteilgeometrie. Dieser stellt sich jedoch bei dickeren Bauteilen erst nach sehr langer Zeit ein [15].

In Abbildung 2.19 wird unter anderem veranschaulicht, dass ein Bauteil mit einer wirksamen Höhe von  $h_0 = 400$  mm ( $b/h = 800/800$  mm) erst nach etwa 25 Jahren ca. 80 % des Endwertes des Trocknungsschwindens erreicht.

Zudem zeigt Abbildung 2.19, dass sich das Grundschrwinden deutlich schneller entwickelt als das Trocknungsschwinden [15].

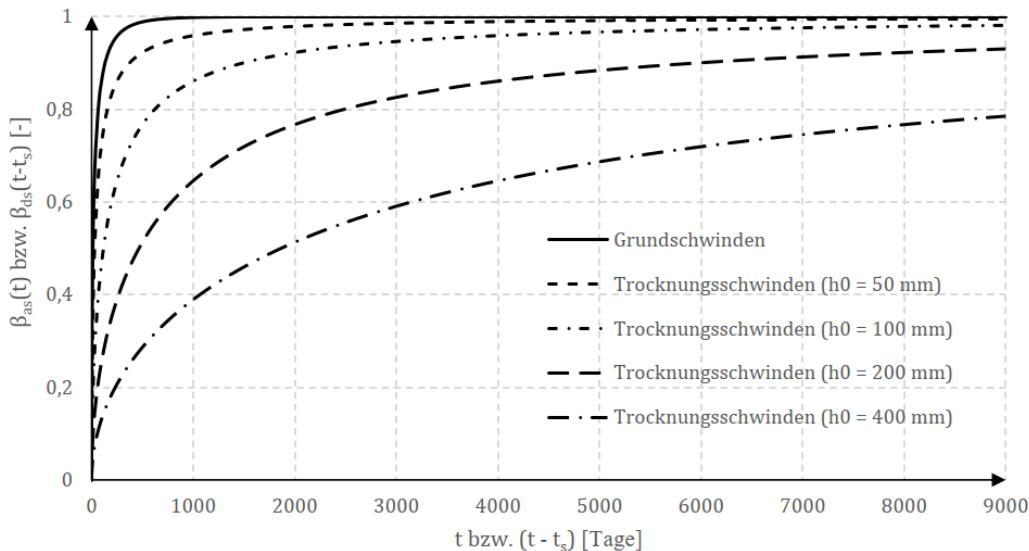


Abbildung 2.19: Zeitfunktionen des Grund- und Trocknungsschwinden für unterschiedlich wirkende Bauteildicken  $h_0$

In [17] werden aufgrund des Einflusses der Bauteildicke auf die zeitliche Entwicklung des Trocknungsschwindens Schwinddehnungen für eine 70 jährige Austrocknungsduer angegeben (siehe Tabelle 2.6). Diese dürfen, falls keine bestimmte Genauigkeit erforderlich ist, als Endschwindwerte für Normalbeton angesehen werden [17].

Tabelle 2.6: Schwindwerte  $\varepsilon_{cs,70y}$  für Normalbeton für eine 70 jährige Austrocknungsduer [17]

Dry atmospheric conditions (inside) ( $RH = 50\%$ )			Humid atmospheric conditions (outside) ( $RH = 80\%$ )		
Notional size $2A_c/u$ (mm)					
50	150	600	50	150	600
-0.57	-0.56	-0.47	-0.32	-0.31	-0.26

### Regelungen nach DIN 1045-1

Die gesamte Schwinddehnung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  darf wie folgt berechnet werden [18], [6], [4]:

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = \varepsilon_{cas}(\infty) + \varepsilon_{cds}(\infty) \quad (2.46)$$

Hierbei ist:

- $\varepsilon_{cs}(\infty)$  die gesamte Betonschwinddehnung zum Zeitpunkt  $t = \infty$ ,
- $\varepsilon_{cas}(\infty)$  das Grundschrwinden zum Zeitpunkt  $t = \infty$  bzw. der Endwert des Grundschrwindens,
- $\varepsilon_{cds}(\infty)$  der Endwert des Trocknungsschrwindens bezogen auf eine Trocknungszeit von 70 Jahren.

Die Schwinddehnung zu einem beliebigen Zeitpunkt lässt sich mit den Gleichungen (2.35) - (2.44) berechnen. Die Endschwindwerte des Grundschrwindens können aus Abbildung 2.20 und Abbildung 2.21 bestimmt werden [4], [6].

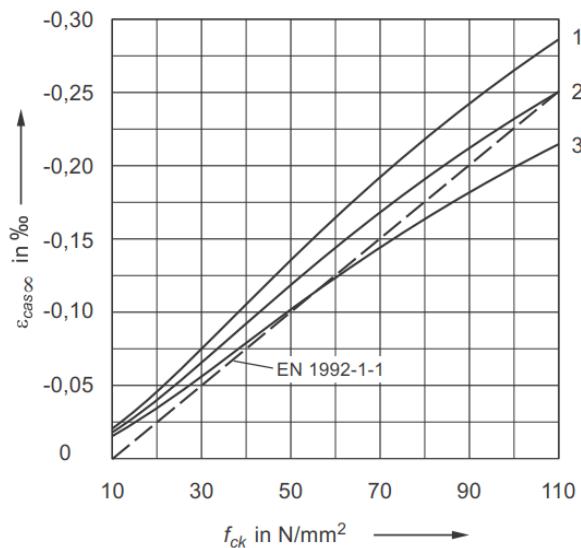


Abbildung 2.20: Endschwindwert der Schrumpfdehnung nach DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 [6]

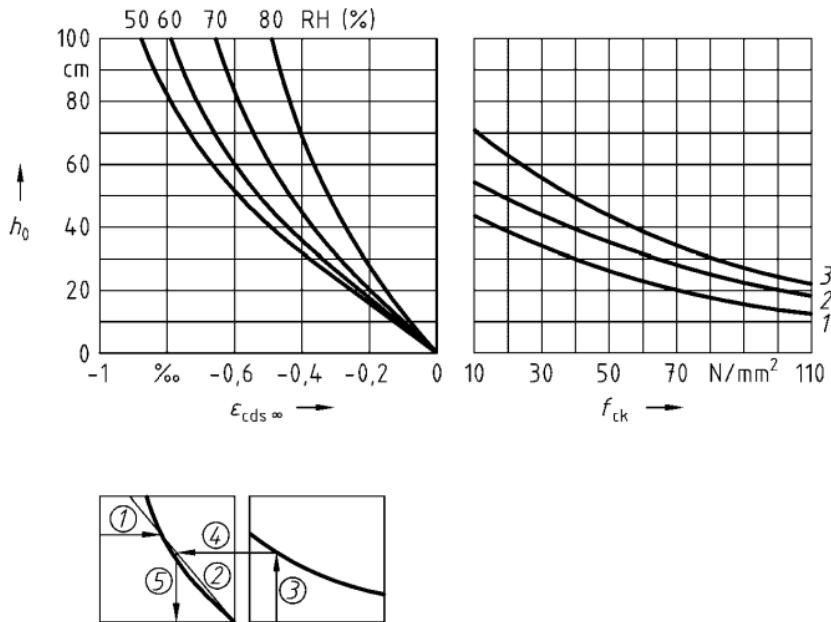


Abbildung 2.21: Endwert des Trocknungsschwindens bezogen auf eine Trocknungsdauer von 70 Jahren [18]

#### Regelungen nach DIN EN 1992-1-1:

Die zuvor beschriebenen Formeln zur Schwindvorhersage (Gleichungen (2.35) - (2.44)), welche physikalisch und in der Größenordnung die lastunabhängige Volumenabnahme des Betons korrekt wiedergeben, wurden mit der Einführung der DIN EN 1992-1-1:2011-01 durch neue Formeln ersetzt [15].

Mit den Bezeichnungen nach DIN EN 1992-1-1 setzt sich die gesamte Schwinddehnung zum Zeitpunkt  $t$  wie folgt zusammen [3], [6]:

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{ca}(t) + \varepsilon_{cd}(t) \quad (2.47)$$

Dabei ist:

$\varepsilon_{cs}(t)$  die Gesamtschwinddehnung bei einem bestimmten Betonalter  $t$ ,

$\varepsilon_{ca}(t)$  die Schrumpfdehnung / das Grundschrwinden bei einem bestimmten Betonalter  $t$ ,

$\varepsilon_{cd}(t)$  das Trocknungsschwinden des Betons bei einem bestimmten Alter  $t$ .

Die **Grundschwinddehnung** errechnet sich durch die Multiplikation einer Zeitfunktion  $\beta_{as}(t)$  mit dem Endwert  $\varepsilon_{ca}(\infty)$ , der im Vergleich zur DIN 1045-1 vereinfacht nur von der Betondruckfestigkeit abhängig ist [3]:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (2.48)$$

Der Zeitverlauf stimmt mit dem aus DIN 1045-1 überein und lässt sich somit mit der Gleichung (2.37) berechnen [3], [6]:

$$\beta_{as}(t) = 1 - e^{(-0,2 \cdot \sqrt{t})}$$

Da bei normalfestem Beton der Anteil des Grundschrindens an der Gesamtschwinddehnung relativ gering ist, wurde gegenüber DIN 1045-1 der Endwert linearisiert und ist unabhängig von der Zementart (vgl. Abbildung 2.20) [3]:

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot \frac{1}{10^6} \quad (2.49)$$

Die **Trocknungsschwinddehnung** ergibt sich aus dessen Grundwert  $\varepsilon_{cd,0}$ , dem von der wirksamen Bauteildicke abhängigen Koeffizienten  $k_h$  und einer Zeitfunktion  $\beta_{ds}(t, t_s)$  [3], [6]:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \varepsilon_{cd,0} \cdot k_h \cdot \beta_{ds}(t, t_s) \quad (2.50)$$

Der Grundwert des Trocknungsschwindens wurde im Vergleich zur DIN 1045-1 mit dem Vorfaktor 0,85 reduziert und schließt den von der relativen Luftfeuchte abhängigen Beiwert  $\beta_{RH}$  mit ein [3], [6], [19]:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \cdot \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{\left( -\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10} \right)} \right] \cdot \beta_{RH} \cdot \frac{1}{10^6} \quad (2.51)$$

mit

$$\beta_{RH} = -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] \quad (2.52)$$

Für Zement der Klasse R gilt  $\alpha_{ds2} = 0,11$ . Bei allen anderen Zementklassen sind die Beiwerte wie zuvor nach Tabelle 2.5 abzulesen [3].

Tabelle 2.7: Koeffizient  $k_h$

$h_0$ in mm	$k_h$
100	1,0
200	0,85
300	0,75
$\geq 500$	0,70

Mit der angepassten Zeitverlaufsfunktion werden die Endschwindwerte im Vergleich zur DIN 1045-1 schneller erreicht (vgl. Abbildung 2.22) [3]:

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{0,04 \cdot (h_0)^{3/2} + t - t_s} \quad (2.53)$$

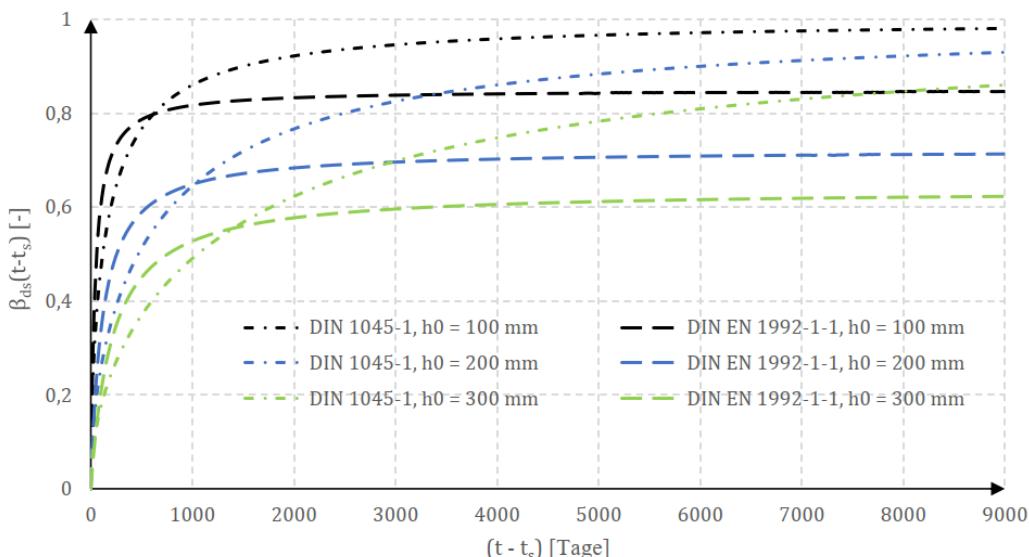


Abbildung 2.22: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Trocknungsschwindens zwischen DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 (mit Berücksichtigung des Vorfaktors 0,85 und des  $k_h$  - Wertes) nach [3]

Der Verlauf der zeitlichen Entwicklung nach DIN EN 1992-1-1:2011 weicht stark von der nach DIN 1045-1 ab. Grund dafür ist, dass dem damals zuständigen CEN-Ausschuss bei der Verfassung der Norm (DIN EN 1992-1-1:2011) ein Fehler unterlaufen ist. Hierbei wurde das richtig erachtete, frühere Schwindmodell (MC 1978) – welches die Schwinddehnungen erheblich unterschätzt – als Referenz betrachtet. Dessen Weiterentwicklung bzw. Korrektur (im MC 1990 bzw. MC 1990-99) wurde jedoch ignoriert. Dementsprechend wurden die Vorfaktoren 0,85 und der  $k_h$  - Wert eingeführt, um das als fehlerhaft erachtete Schwindmodell in der Vorgängerversion zu korrigieren. Dieser Fehler wurde mit dem Entwurf prEN 1992-1-1:2020 beseitigt und lehnt sich stark an die Regelungen der DIN 1045-1 an [20]. Näheres hierzu ist in [20] zu finden.

## Kriechen

Die Zunahme der Verformung im Laufe der Zeit unter einer konstanten Spannung – abzüglich des Schwindens – wird als Kriechen bezeichnet [15].

Obwohl bereits unzählige wissenschaftliche Untersuchungen und Dissertationen zu diesem Phänomen veröffentlicht wurden, sind die komplexen Vorgänge in der Mikrostruktur, die das Kriechen des Betons verursachen, bis heute nicht vollständig geklärt [16], [21].

Im Wesentlichen resultiert das Betonkriechen aus den zeit- und lastabhängigen Verformungen des Zementsteins. Da die Gesteinskörnung selbst kein nennenswertes Kriechverhalten aufweist, trägt sie zur Verringerung des Betonkriechens bei. Die Ursache des Kriechens liegt vor allem im Verhalten des Zementsteins, der durch eine sehr poröse und feine Gelstruktur gekennzeichnet ist. Das Langzeitverformungsverhalten wird insbesondere durch das Wasser in den Kapillar- und Gelporen beeinflusst [21]. Kriechverformungen entstehen unter anderem durch die Umlagerung des physikalisch gebundenen Wassers im Zementstein [6], [16].

Die Untersuchungen zum Kriechen auf der Makro-Ebene führten zu wichtigen Erkenntnissen. Im Folgenden werden die relevanten Einflussfaktoren vorgestellt und erläutert [21]:

- **Porosität des Zementsteins**

Die Porosität des Zementsteins beeinflusst maßgeblich die Größe der Verformungen infolge des Kriechens. Eine geringere Porosität, die durch einen niedrigeren Wasserzementwert und einen höheren Hydratationsgrad erreicht wird, führt zu einer signifikanten Abnahme der Kriechverformungen [21].

- **Gesteinskörnung**

Die Gesteinskörnung reduziert die Kriechverformung des Zementsteins im Beton erheblich, da sie selbst kaum kriecht. Dieser Effekt wird verstärkt, je höher der Volumenanteil und die Steifigkeit der Gesteinskörnung im Beton sind [21].

- **Größe der einwirkenden Spannung**

Solange die einwirkenden Spannungen unter etwa 40 % der mittleren Druckfestigkeit des Betons bleiben, kann von linearem Kriechen ausgegangen werden, das heißt, die Kriechdehnungen sind proportional zu den einwirkenden Spannungen. Überschreiten die Spannungen jedoch diesen Wert, wachsen Mikrorisse im Beton, wodurch die Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung verloren geht – die Kriechdehnungen verhalten sich nichtlinear [6].

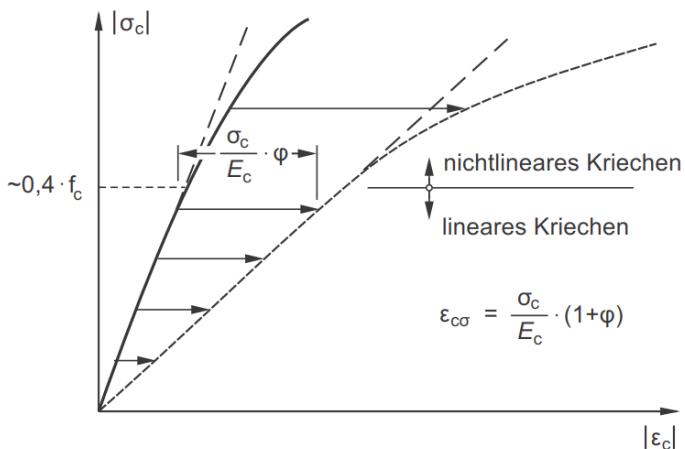


Abbildung 2.23: Lineares und nichtlineares Betonkriechen [6]

- **Umgebungsfeuchte**

Der Feuchtegehalt der umgebenden Luft hat einen erheblichen Einfluss auf die Größe und den Verlauf des Kriechens. Die Kriechdehnung nimmt mit steigendem Feuchteverlust während der Belastung zu. Bei dicken Bauteilen ist der prozentuale Wasserverlust (Austrocknung) und das daraus resultierende Kriechen innerhalb einer bestimmten Zeit jedoch wesentlich geringer als bei dünnen Bauteilen. Eine hohe Umgebungsfeuchte, die eine geringe Wasserabgabe bewirkt, führt zu einer Reduzierung des Kriechens [21].

- **Umgebungstemperatur**

Höhere Temperaturen während der Belastung führen zu höheren Kriechverformungen. Im Gegensatz dazu beschleunigen höhere Temperaturen vor der Belastung die Alterung des Betons und verringern dadurch das Kriechen [21].

## Verformungskomponenten des Betons unter einer Dauerlast

Bei experimentellen Untersuchungen lassen sich die Kriechverformungen nicht isoliert von anderen Verformungskomponenten bestimmen. Für ein besseres Verständnis ist es hilfreich, die einzelnen Verformungs- bzw. Dehnungskomponenten zu separieren und klar zu definieren [21].

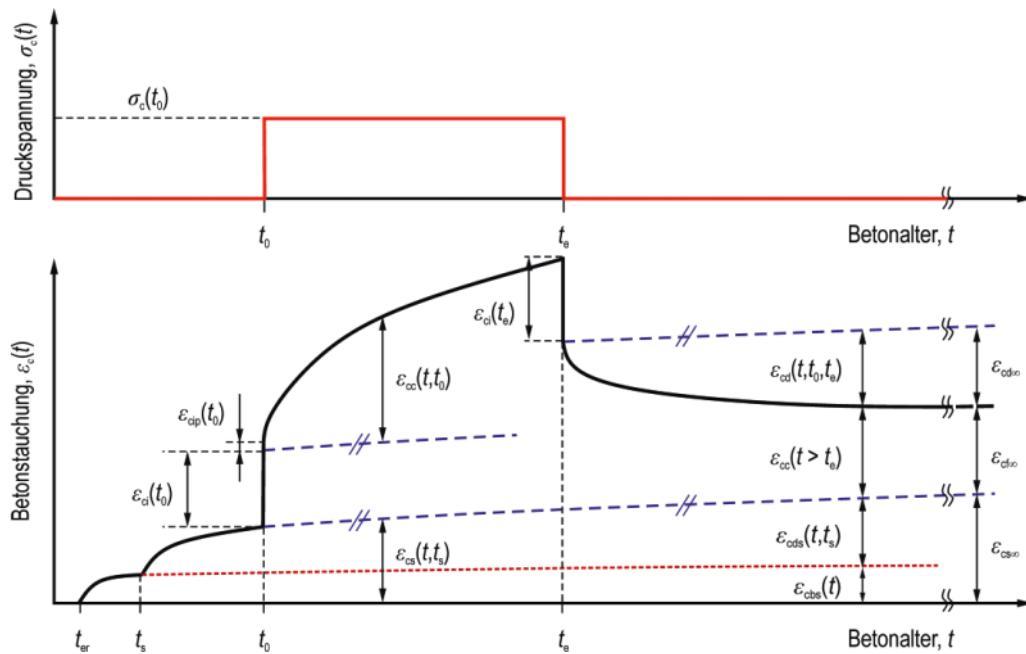


Abbildung 2.24: Verformungs- bzw. Dehnungskomponenten von Beton im Einstufenversuch [21]

In der obenstehenden Abbildung ist auf der vertikalen Achse die Betonstauchung  $\varepsilon_c(t)$  und auf der horizontalen das Betonalter  $t$  dargestellt. Die Kurve zeigt die zeitliche Verformungsentwicklung einer Betonprobe, die zum Zeitpunkt  $t_{er}$  erhärtet ist, zum Zeitpunkt  $t_s$  ausgeschalt und somit einer Austrocknung ausgesetzt wurde. Zum Zeitpunkt  $t_0$  wurde eine konstante Druckspannung  $\sigma_c(t_0)$  auf den Prüfkörper aufgebracht und zum Zeitpunkt  $t_e$  wieder vollständig entlastet [21].

Die gestrichelten Linien zeigen den Verlauf der Schwinddehnung, die parallel an einem unbelasteten Probekörper unter denselben klimatischen Bedingungen ermittelt wurde. Selbstverständlich ist die Größe der Schwinddehnung einer unbelasteten Probe nicht identisch mit der eines belasteten Probekörpers, da die aufgebrachten Spannungen den Schwindprozess beschleunigen. Dieses Defizit lässt sich jedoch nicht vermeiden, da es experimentell nicht möglich ist, die tatsächliche Schwinddehnung während der Belastung genau zu erfassen [21].

Bereits ab dem Zeitpunkt der Erhärtung  $t_{er}$  erfährt der Beton eine lastunabhängige Dehnung infolge des Grundschrwindens  $\varepsilon_{cbs}(t)$ , deren Zunahme im Laufe der Zeit deutlich abnimmt. Nach dem Ausschalen der Betonprobe zum Zeitpunkt  $t_s$  wird sie der Trocknung ausgesetzt, wodurch das Trocknungsschwinden eine zusätzliche, lastunabhängige Dehnung  $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  bewirkt. Deren Verlauf ist ebenfalls mit einem unterproportionalen Anstieg gekennzeichnet. Die Summe der beiden Schwindkomponenten stellt die gesamte Schwinddehnung  $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  dar [21].

Das Aufbringen der äußeren Spannung  $\sigma_c(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  führt zu einer elastischen Dehnung  $\varepsilon_{ci}(t_0)$  sowie zu einer relativ kleinen plastischen Dehnung  $\varepsilon_{cip}(t_0)$ , die als Setzdehnung bezeichnet wird. Um die Größe der Setzdehnung  $\varepsilon_{cip}(t_0)$  zu erfassen, wird ebenfalls ein Parallelversuch durchgeführt, bei dem der Probekörper zunächst bis zur Spannung  $\sigma_c(t_0)$  belastet und anschließend wieder entlastet wird. Der bleibende (irreversible) Anteil der Verformung wird dabei als plastische Verformung erfasst. Dieser Versuch ermöglicht auch die Bestimmung des Sekanten- und Tangentenmoduls (vgl. Abbildung 2.25) [21].

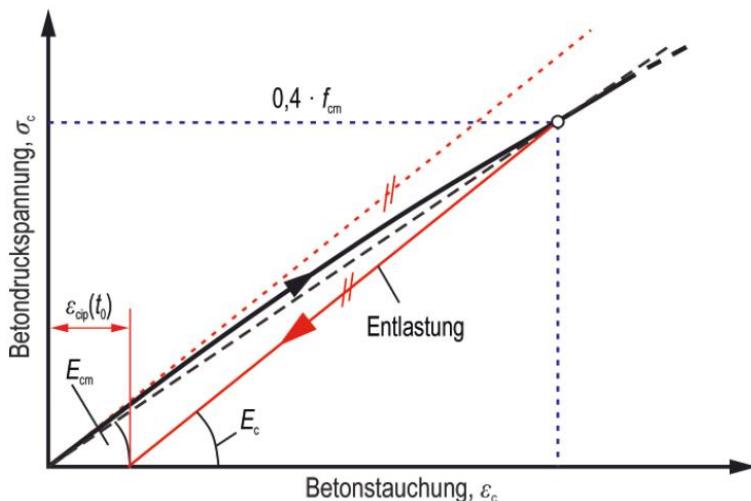


Abbildung 2.25: Sekantenmodul  $E_{cm}$ , Tangentenmodul  $E_c$  und die zugehörige plastische Dehnung  $\varepsilon_{cip}(t_0)$  aus der Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton [21]

Die konstante Spannung  $\sigma_c(t_0)$ , die vom Zeitpunkt  $t_0$  bis  $t_e$  aufgebracht wird, bewirkt eine Zunahme der Dehnung im Laufe der Zeit, die als Kriechdehnung  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  erfasst wird. Abbildung 2.24 zeigt, dass die Gesamtdehnung unmittelbar nach der Entlastung um den elastischen Dehnungsanteil  $\varepsilon_{ci}(t_e)$  abnimmt. Die verzögerte elastische Dehnung, auch als **reversibler** Anteil der Kriechdehnung (früher Rückkriechen) bekannt, führt zu einer zusätzlichen Abnahme der Gesamtdehnung über die Zeit und erreicht ihren Endwert  $\varepsilon_{cd\infty}$  bereits nach wenigen Monaten.

Der bleibende, **irreversible** Kriechanteil  $\varepsilon_{cf\infty}$  wird als Fließen bezeichnet und ist größer als der reversible Anteil. Um diesen Wert zu bestimmen, muss abgewartet werden, bis das Rückkriechen vollständig abgeschlossen und das Schwinden zum Stillstand gekommen ist [21].

Die Kriechdehnung wird erhalten, indem von der Gesamtdehnung die Dehnung infolge des Schwindens sowie die rein elastische Dehnung subtrahiert werden [21].

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_c(t) - \varepsilon_{ci}(t_0) - \varepsilon_{cs}(t, t_s) \quad (2.54)$$

Hierbei wird die Setzdehnung der Kriechdehnung zugerechnet, obwohl es sich dabei um eine rein plastische Dehnung mit einem anderen mechanischen Hintergrund handelt. Da die Separierung der Setzdehnung das Modell des Kriechens erheblich verkomplizieren würde und die Kriechdehnung um ein Vielfaches größer ist als die Setzdehnung, kann dieser Fehler in der Regel als vernachlässigbar angesehen werden [21].

Bis heute ist wissenschaftlich nicht bewiesen, dass die Kriechverformung unter konstanter Last einen endgültigen Endwert erreicht. Es ist jedoch sicher, dass nach einer 50-jährigen Belastungsdauer die weitere Zunahme der Verformung sehr gering ausfällt, selbst wenn das Bauteil weitere 50 oder 100 Jahre belastet wird [21].

Die Feuchteabgabe des Betons während der Wirkung einer Dauerlast führt zu einer deutlichen Vergrößerung der Kriechdehnung, die als Trocknungskriechen bezeichnet wird. Daher wird die Kriechdehnung – analog zum Schwinden – in **Grundkriechen**  $\varepsilon_{cc,b}(t, t_0)$  und **Trocknungskriechen**  $\varepsilon_{cc,d}(t, t_0)$  unterteilt [21]:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{cc,b}(t, t_0) + \varepsilon_{cc,d}(t, t_0) \quad (2.55)$$

Das Grundkriechen beschreibt die Kriechverformung eines Bauteils, das während der Belastung, zum Beispiel durch die Versiegelung der Oberflächen, nicht austrocknen kann. Je niedriger der Wassergehalt des Betons, desto geringer das Grundkriechen [15].

Im Vergleich zum Normalbeton ist das Trocknungskriechen bei höherfestem Beton deutlich geringer (vgl. Abbildung 2.26). Dies ist auf die geringere Porosität des Zementsteins und den entsprechend niedrigeren Wasserzementwert zurückzuführen [6].

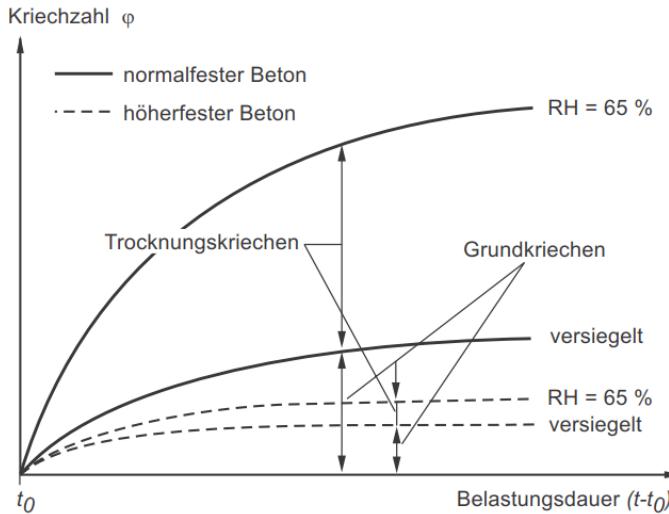


Abbildung 2.26: Verlauf des Grund- und Trocknungskriechens bei normalfestem und höherfestem Beton [6]

Aus der obenstehenden Abbildung wird zudem deutlich, dass bei höherfestem Beton der Anteil des Grundkriechens an der gesamten Kriechdehnung im Vergleich zu normalfestem Beton zunimmt [15].

### Grundlagen für das Vorhersageverfahren

Bei linearem Kriechen ( $\sigma_c < 0,4 \cdot f_{cm}$ ) lässt sich die Kriechdehnung  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  mithilfe der sogenannten Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  berechnen. Diese Kriechzahl ist als Vielfaches der elastischen Dehnung  $\varepsilon_{ci,28}$  unter derselben Spannung definiert [6], [15], [21]:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{ci,28}} \quad (2.56)$$

mit

$$\varepsilon_{ci,28} = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c,28}} \quad (2.57)$$

Hierbei ist:

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  die Kriechdehnung des Betons im Alter  $t$ , der zum Zeitpunkt  $t_0$  belastet wurde,

$\varphi(t, t_0)$  die zugehörige Kriechzahl,

$\varepsilon_{ci,28}$  die elastische Dehnung des Betons infolge derselben Spannung, berechnet mit dem 28-tägigen Tangentenmodul (unabhängig vom Belastungsalter  $t_0$ ).

Die Kriechzahl liegt für Konstruktionsbetone üblicherweise im Bereich von  $1 < \varphi < 6$ . Eine Kriechzahl von  $\varphi = 6$  bedeutet, dass die Kriechverformung nach langer Belastungsdauer sechsmal größer ist als die elastische Verformung. Dies verdeutlicht nochmals den Einfluss und die Wichtigkeit des Kriechens [15], [21].

Die gesamte lastabhängige Betondehnung  $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$  setzt sich aus der Summe der elastischen Dehnung und der Kriechdehnung zusammen und lässt sich durch die folgende Gleichung berechnen [15], [21]:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \right] = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (2.58)$$

Dabei ist:

$J(t, t_0)$  die sogenannte Kriechfunktion,

$E_c(t_0)$  der Tangentenmodul zum Belastungszeitpunkt.

### Vorhersageverfahren

Einige Annahmen sind notwendig, um die Kriechverformungen mathematisch einfach und dennoch relativ zuverlässig zu beschreiben. Dem entwerfenden Ingenieur liegen in der Regel bei der Bemessung begrenzte Eingangsparameter vor. Üblicherweise sind sowohl die Abmessungen und die Festigkeit des Bauteils als auch die Umgebungsbedingungen der geplanten Konstruktion bekannt. Die Berücksichtigung der Zementart führt zu einer Verbesserung der Genauigkeit des Vorhersagemodells [15].

Die ersten mathematischen Ansätze zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Beton wurden bereits vor vielen Jahren veröffentlicht. Diese wurden mit der nächsten Ausgabe einer Richtlinie korrigiert, angepasst und weiterentwickelt, um dem aktuellen Stand der Technik zu entsprechen [15], [21].

Die Entwicklung der Kriechmodelle im Laufe der Jahre in den CEB-FIP und fib Model Codes sowie dessen Hintergründe werden in [21] erläutert, worauf hier nicht detailliert eingegangen wird.

Im Folgenden wird das in DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 enthaltene Vorhersageverfahren vorgestellt. Gegenüber dem Modell in CEB-FIP MC90 [17] wurden dabei Korrekturfaktoren ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ ) eingeführt, um das Kriechen von hochfesten Betonen zu berücksichtigen. In den genannten Normen stimmen somit die formelmäßigen Zusammenhänge zur Beschreibung der Kriechverformungen weitgehend miteinander überein [6], [15], [21].

Die Kriechdehnung wird mit Gleichung (2.56) unter Verwendung des 28-tägigen Tangentenmoduls berechnet. Dabei ergibt sich die Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  aus dem Produkt des Grund- bzw. Endwertes  $\varphi_0$  und der Funktion  $\beta_c(t, t_0)$ , die den zeitlichen Verlauf des Kriechens beschreibt [15]:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (2.59)$$

Die Komponenten Trocknungs- und Grundkriechen sowie der Einfluss des Betonalters bei Belastungsbeginn werden mit der Grundkriechzahl  $\varphi_0$  erfasst. Sie setzt sich wie folgt zusammen [6]:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (2.60)$$

mit

$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{\frac{h_0}{1000}}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad (2.61)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (2.62)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_{0,eff})^{0,2}} \quad (2.63)$$

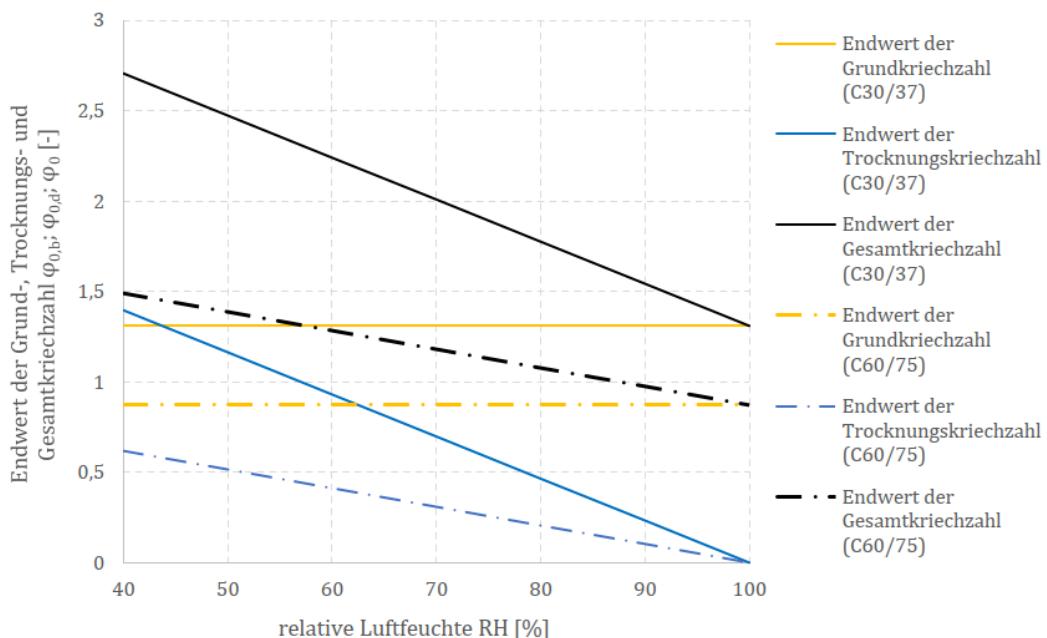
Der Einfluss der Betondruckfestigkeit wird dabei durch die Korrekturfaktoren  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  berücksichtigt [6]:

$$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7}, \quad \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad (2.64)$$

Aus Gleichung (2.61) geht eine Aufspaltung in Grund- und Trocknungskriechen hervor. Vereinfacht wird davon ausgegangen, dass beide Kriechkomponenten die gleiche Verlaufsfunktion besitzen [22].

Die Kriechdehnungen nehmen mit zunehmender relativer Luftfeuchtigkeit und wirksamer Bauteildicke  $h_0$  ab. Je höher die relative Luftfeuchtigkeit, desto geringer ist der Einfluss der Bauteilgeometrie. Dies liegt daran, dass bei hoher relativer Luftfeuchtigkeit der Anteil des Trocknungskriechens immer weiter abnimmt. Bei einer relativen Luftfeuchte von 100 % wird der Zähler und damit auch der gesamte Bruch in Gleichung (2.61) zu Null, was bedeutet, dass lediglich das Grundkriechen auftritt [15].

Darüber hinaus wird bei der Separierung der Gleichung (2.61) in Trocknungs- und Grundkriechens deutlich, dass der Endwert des Grundkriechens – wie beim Grundschrinnen – unabhängig von den Umweltbedingungen und der Bauteilgeometrie ist (vgl. Abbildung 2.27).



**Abbildung 2.27: Endwert des Grund-, Trocknungs- und Gesamtkriechens für unterschiedliche relative Luftfeuchtigkeiten und Betonfestigkeitsklassen ( $h_0 = 150 \text{ mm}$ ,  $t_0 = 28 \text{ Tage}$ , Zementtyp N)**

Gemäß den Gleichungen (2.61) und (2.64) nimmt der Einfluss der relativen Luftfeuchtigkeit auf die Kriechfähigkeit mit steigender Betondruckfestigkeit ab. Dies ist auf das geringere Feuchteangebot im Bauteil zurückzuführen. Somit wird mit den Beiwerten aus Gleichung (2.64) korrekt erfasst, dass sich der Anteil des Grund- und insbesondere des Trocknungskriechens mit steigender Druckfestigkeit verringert (vgl. Abbildung 2.27) [6], [15].

Der Beton weist – je nach verwendetem Zementtyp – unterschiedliche Hydratationsgrade bei einem bestimmten Belastungsalte  $t_0$  auf. Dies wird durch das **effektive** Betonalter bei Belastungsbeginn  $t_{0,\text{eff}}$  berücksichtigt [6], [15]:

$$t_{0,\text{eff}} = t_0 \cdot \left[ \frac{9}{2 + (t_0)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ Tage} \quad (2.65)$$

**Tabelle 2.8: Potenz  $\alpha$  zur Berücksichtigung der Festigkeitsentwicklung des Betons [6], [15]**

Linie	Zementtyp	Festigkeitsklasse nach DIN EN 197-1	$\alpha$
„1“	SL	32,5 N	-1
„2“	N,R	32,5 R; 42,5 N	0
„3“	RS	42,5 R; 52,5 N; 52,5 R	1

Die zeitliche Entwicklung der Kriechdehnungen wird über eine Hyperbelfunktion  $\beta_c(t, t_0)$  beschrieben [6], [15]:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (2.66)$$

mit

$$\beta_H = 1,5 \cdot h_0 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1,2 \cdot RH}{100} \right)^{18} \right] + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad (2.67)$$

$$\alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad (2.68)$$

Für  $(t - t_0) \rightarrow \infty$  strebt die Funktion ihrem Endwert  $\beta_c(t, t_0) = 1,0$  entgegen. Außerdem wird aus den Gleichungen (2.66) bis (2.68) der Einfluss der Bauteilgeometrie deutlich. Je größer die wirksame Bauteildicke  $h_0$ , desto langsamer verläuft die zeitliche Entwicklung des Kriechens [15].

Mit steigender Druckfestigkeit des Betons wird der End- bzw. Grundwert der Kriechdehnung schneller erreicht. Dies ist auf den geringeren Anteil des Trocknungskriechens zurückzuführen [15].

Wie schon bereits erwähnt, wurden Korrekturfaktoren in DIN 1045-1 eingeführt, um die Abnahme der Kriechfähigkeit von höherfesten Betonen zu berücksichtigen. In DIN EN 1992-1-1 werden diese Faktoren auf  $\alpha_i \leq 1,0$  begrenzt. Damit wird die Überschätzung der Kriechdehnung von Betonen mit geringerer Festigkeit ( $f_{cm} \leq 35 \text{ N/mm}^2$ ) beseitigt (vgl. Abbildung 2.28) [6].

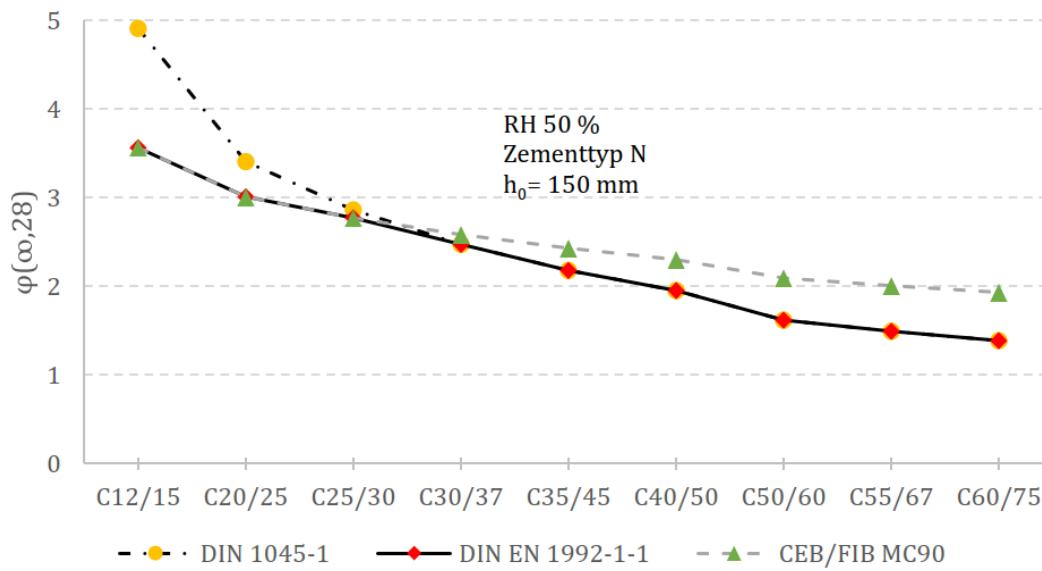


Abbildung 2.28: Vergleich der Endkriechzahlen  $\varphi(\infty, 28)$

Tabelle 2.9: Endkriechzahlen  $\varphi(\infty, t_0)$  nach DIN EN 1992-1-1 für Zementtyp N

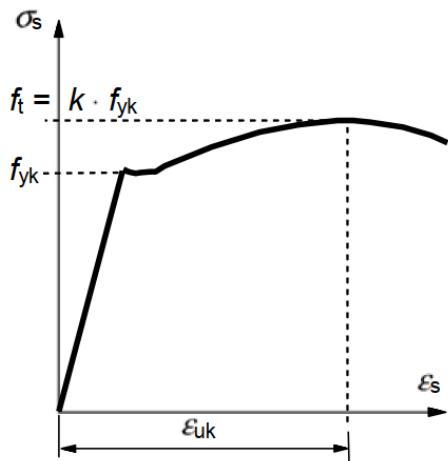
RH = 50 %	$t_0$ [Tage]	$h_0$ [mm]						
		50	150	250	350	450	550	650
C20/25	1	6,80	5,60	5,18	4,93	4,77	4,65	4,55
	20	3,90	3,21	2,97	2,83	2,73	2,66	2,61
	28	3,66	3,01	2,78	2,65	2,56	2,50	2,45
	50	3,27	2,69	2,49	2,37	2,29	2,24	2,19
	80	2,99	2,46	2,28	2,17	2,10	2,04	2,00
	100	2,87	2,36	2,18	2,08	2,01	1,96	1,92
C25/30	1	6,27	5,16	4,77	4,54	4,39	4,28	4,19
	20	3,59	2,96	2,73	2,60	2,52	2,45	2,40
	28	3,37	2,77	2,56	2,44	2,36	2,30	2,25
	50	3,01	2,48	2,29	2,19	2,11	2,06	2,02
	80	2,75	2,27	2,10	2,00	1,93	1,88	1,84
	100	2,64	2,17	2,01	1,91	1,85	1,80	1,77
C30/37	1	5,56	4,60	4,26	4,07	3,94	3,84	3,77
	20	3,18	2,64	2,44	2,33	2,26	2,20	2,16
	28	2,99	2,47	2,29	2,19	2,12	2,06	2,02
	50	2,67	2,21	2,05	1,96	1,89	1,85	1,81
	80	2,44	2,02	1,87	1,79	1,73	1,69	1,66
	100	2,34	1,94	1,80	1,71	1,66	1,62	1,59
C35/45	1	4,86	4,06	3,77	3,61	3,50	3,42	3,35
	20	2,78	2,32	2,16	2,07	2,00	1,96	1,92
	28	2,61	2,18	2,03	1,94	1,88	1,84	1,80
	50	2,34	1,95	1,81	1,74	1,68	1,64	1,61
	80	2,14	1,78	1,66	1,59	1,54	1,50	1,47
	100	2,05	1,71	1,59	1,52	1,47	1,44	1,41

## 2.3 Betonstahl

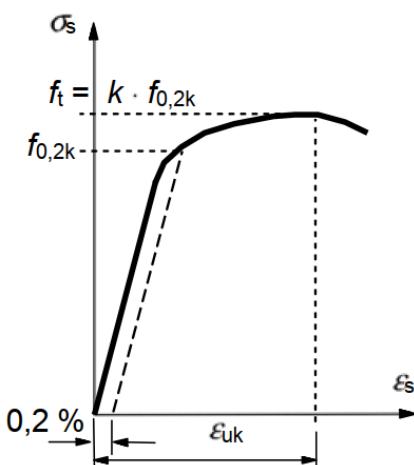
In Deutschland wird der Betonstahl hauptsächlich mit einer charakteristischen Festigkeit beim Erreichen der Fließgrenze von  $500 \text{ N/mm}^2$  produziert und in folgenden Lieferformen bereitgestellt [23]:

- Betonstabstahl
- Betonstahlmatten
- Betonstahl in Ringen

Die Betonstähle, die im Stahlbeton verwendet werden, sind in DIN 488-1 genormt [11]. Dabei wird zwischen warm- und kaltverformten Betonstählen unterschieden. Der kaltgefertigte Betonstahl zeigt im Vergleich zum warmgefertigten keine ausgeprägte Fließgrenze auf. Daher wird die Streckgrenze als 0,2 %-Dehnungsgrenze definiert (siehe Abbildung 2.29). Dementsprechend ist das Verformungsverhalten bei warmgewalztem Betonstahl deutlich größer als beim kaltverformten Betonstahl [23].



a) Warmgewalzter Stahl



b) Kaltverformter Stahl

Abbildung 2.29: Spannungs-Dehnungs-Linie unter Zugbeanspruchung für warmgewalzten und kaltverformten Stahl [3]

Zur Beurteilung der Betonstahleigenschaften werden drei wesentliche Kenngrößen benötigt [11], [23]:

- die charakteristische Fließgrenze  $f_{yk}$  bzw.  $f_{0,2k}$
- die charakteristische Zugfestigkeit  $f_{tk}$
- die Duktilität

Der Betonstahl muss in der Lage sein, zusätzliche Belastungen – beispielsweise infolge Umlagerungen von Schnittgrößen oder Zwang – ohne Bruch aufzunehmen. Dafür ist eine angemessene Dehnfähigkeit erforderlich [1].

Über die Dehnung bei Erreichen der Höchstlast  $\varepsilon_{uk}$  und über das Streckgrenzenverhältnis  $f_{tk}/f_{yk}$  lassen sich folgende Duktilitätsklassen bestimmen [11], [24]:

- normalduktil (Kennbuchstabe A):  $\varepsilon_{uk} \geq 25\%$  und

$$\frac{f_{tk}}{f_{yk}} \geq 1,05$$

- hochduktil (Kennbuchstabe B):  $\varepsilon_{uk} \geq 50\%$  und

$$\frac{f_{tk}}{f_{yk}} \geq 1,08$$

Wird Betonstahl warmverformt hergestellt, besitzt er eine hohe Duktilität, während kaltverformter Betonstahl sich normalduktil verhält [11].

Tabelle 2.10: Eigenschaften des Betonstahls nach [11]

Beton- stahlsorte	Erzeugnis- form	Betonstab- stahl	Betonstahl- matte	Betonstab- stahl	Beton- stahlmatte
	Benennung	B500A	B500A	B500B	B500B
<b>Duktilität</b>		normal		hoch	
<b>Fließgrenze <math>f_{yk}</math></b>		500 N/mm <sup>2</sup>			
<b>Verhältnis <math>(f_{tk})</math></b>		$\geq 1,05$		$\geq 1,08$	
<b>Stahldehnung unter Höchstlast <math>\varepsilon_{uk}</math></b>		25 %		50 %	

Die Oberfläche des Betonstahls ist gerippt, um den Verbund mit dem umgebenden Beton zu gewährleisten bzw. zu verbessern. Die Anordnung der Rippen gibt zudem Aufschluss über die Duktilitätsklasse des Stahls [11]:

- **Drei Rippenreihen:** normalduktil
- **Zwei oder vier Rippenreihen:** hochduktil

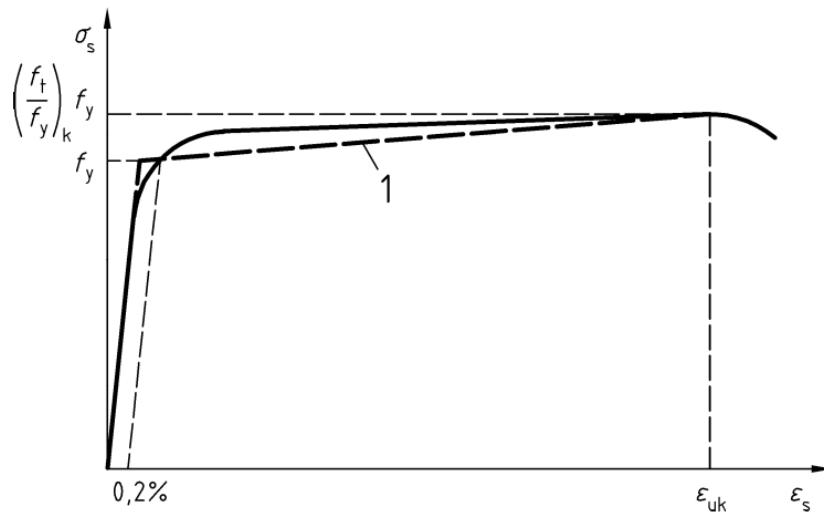


Abbildung 2.30: Wirklichkeitsnahe Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung (1 entspricht idealisiertem Verlauf) [25]

Bis zur Fließgrenze zeigt der Baustahl ein linear-elastisches Verhalten auf. In diesem Bereich berechnet sich die Stahldehnung  $\varepsilon_s$  nach dem Hooke'schen Gesetz [11]:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (2.69)$$

Hierbei ist:

$\sigma_s$  die einwirkende Spannung,

$E_s$  der Elastizitätsmodul ( $E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$ ).



## 2.4 Stahlbeton

Wird die Zugfestigkeit des Betons bei bewehrten Bauteilen überschritten, übernimmt der eingelegte Stahl bei der Rissbildung die freigesetzte Betonzugkraft [6]. Die Voraussetzung hierfür ist die schubfeste Verbindung zwischen Stahl und Beton [23]. Dieser Verbund wird unter anderem durch die Rippen an der Stahloberfläche erreicht und gewährleistet so das statische Zusammenwirken beider Baustoffe. Damit können die günstigen Eigenschaften der beiden Baustoffe — die hohe Druckfestigkeit des Betons und die hohe Stahlzugfestigkeit — optimal genutzt werden. Der Stahlbeton ist somit ein klassischer Verbundbaustoff [6].

Im Folgenden wird das Tragverhalten eines Stahlbetonbauteils unter Zug- und Biegebeanspruchung im Zustand I und Zustand II erläutert.

### 2.4.1 Tragverhalten unter Zugbeanspruchung

Das Tragverhalten eines Stahlbetonstabes unter einer stetig ansteigenden Zugkraft  $N = F$  ist in Abbildung 2.31 dargestellt und lässt sich in vier verschiedene Phasen unterteilen [6]:

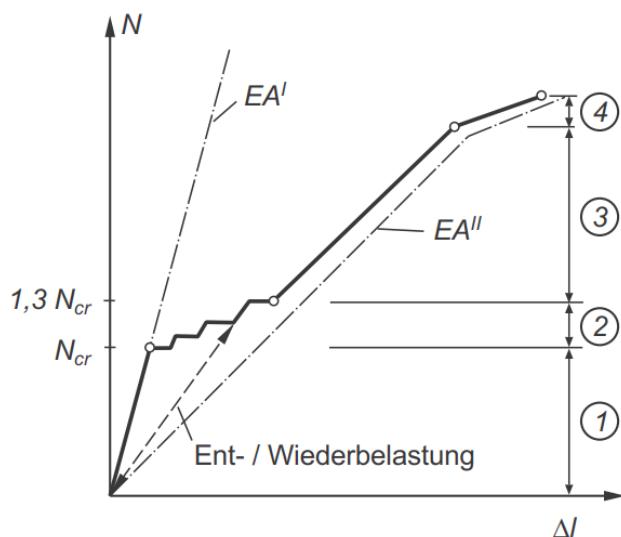


Abbildung 2.31: Kraft-Verformungs-Verhalten eines Stahlbetonzugstabes [6]

### Phase ①: Ungerissener Stahlbetonzugstab (Zustand I)

In diesem Bereich liegt die Betonzugspannung unterhalb der Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$ . Der Zugstab ist demnach ungerissen (Zustand I) und es herrscht an allen Stellen des Bauteils ein idealer Verbund. Somit sind die Dehnungen im Stahl und im umgebenden Beton identisch [6], [8]:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \quad (2.70)$$

Mit der Annahme eines linearen Werkstoffverhaltens für beide Baustoffe ergibt sich [8], [11]:

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_{ct}}{E_{cm}} \quad (2.71)$$

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{ct}}{E_{cm}} \cdot E_s = \alpha_e \cdot \sigma_{ct} \quad (2.72)$$

Aus Gleichung (2.72) ergibt sich, dass die Stahlspannung um das Verhältnis der Elastizitätsmoduli  $\alpha_e = E_s/E_{cm}$  größer sein muss als die Betonspannung, damit die Dehnungen im Beton und im Stahl gleich bleiben.

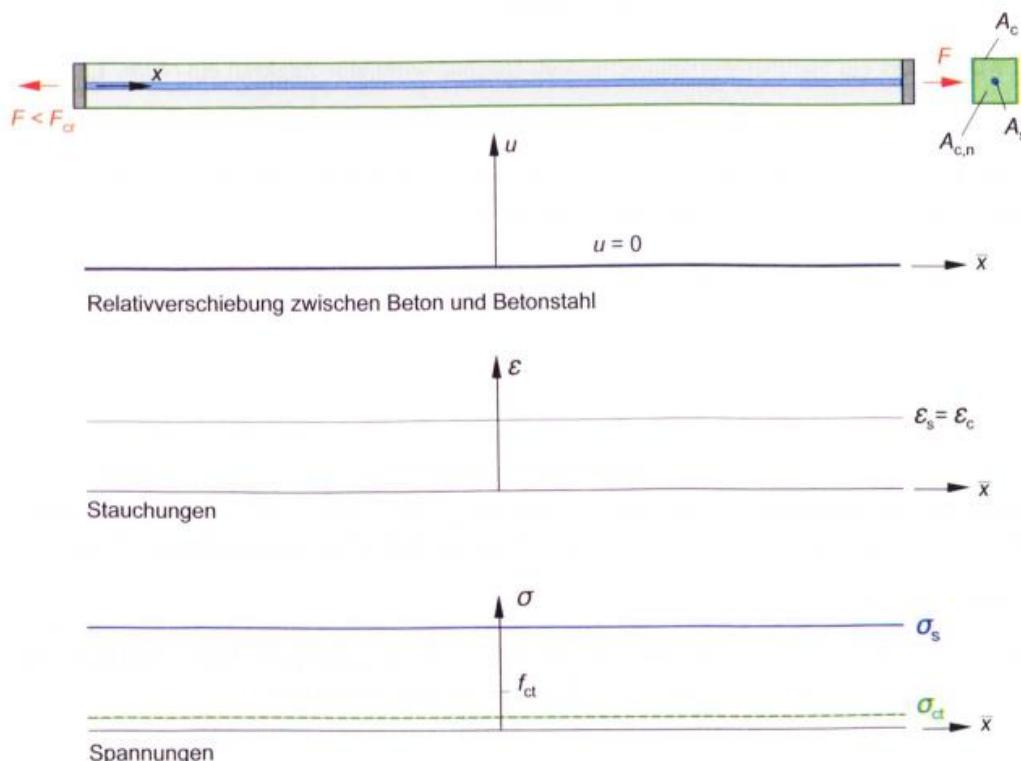


Abbildung 2.32: Stahlbetonzugstab im Zustand I [11]

Die Zugkraftanteile im Beton  $F_{ct}$  und im Stahl  $F_s$  können durch die Anwendung der Gleichgewichtsbedingung ermittelt werden [8]:

$$F = F_{ct} + F_s \quad (2.73)$$

mit

$$F_{ct} = \sigma_{ct} \cdot A_{c,n} \quad (2.74)$$

$$F_s = \sigma_s \cdot A_s = \alpha_e \cdot \sigma_{ct} \cdot A_s \quad (2.75)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2.74) und (2.75) in Gleichung (2.73) folgt [8]:

$$F = \alpha_e \cdot \sigma_{ct} \cdot A_s + \sigma_{ct} \cdot A_{c,n}$$

$$F = \sigma_{ct} \cdot A_{c,n} \cdot \left( 1 + \alpha_e \cdot \frac{A_s}{A_{c,n}} \right) \quad (2.76)$$

$$F = F_{ct} \cdot \left( 1 + \alpha_e \cdot \frac{A_s}{A_{c,n}} \right) = F_{ct} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho) \quad (2.77)$$

Durch Umstellen der Gleichung (2.77) kann der Zugkraftanteil im Beton und damit auch die Stahlzugkraft bestimmt werden [8]:

$$F_{ct} = \frac{F}{(1 + \alpha_e \cdot \rho)} \quad (2.78)$$

$$F_s = F - \frac{F}{1 + \alpha_e \cdot \rho} = F \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + \alpha_e \cdot \rho} \right) \quad (2.79)$$

Da der übliche Bewehrungsgrad  $\rho$  wenige Prozent beträgt und das Verhältnis der Elastizitätsmoduli  $\alpha_e < 10$  ist, kann aus den Gleichungen (2.78) bzw. (2.79) erkannt werden, dass der Kraftanteil des Stahls sehr klein ist. Demnach wird die Tragfähigkeit im ungerissenen Zustand hauptsächlich durch den Beton bestimmt [8], [11].

Die Dehnsteifigkeit im Zustand I berechnet sich wie folgt [11]:

$$EA^I = E_{cm} \cdot A_{c,n} + E_s \cdot A_s = E_{cm} \cdot A_{c,n} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho) \quad (2.80)$$

Der Ausdruck  $A_{c,n} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho)$  stellt eine Fläche dar und wird als ideeller Querschnitt  $A_i$  definiert [11]:

$$A_i = A_{c,n} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho) \quad (2.81)$$

### Phase ②: Rissbildung im Stahlbetonzugstab

Sobald bei weiterer Laststeigerung die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  im Querschnitt erreicht ist, bildet sich im Stab der erste Riss. Dessen Ort kann – aufgrund der starken Streuung der Betonzugfestigkeit – nicht vorhergesagt werden. Der Riss tritt an der Stelle mit der geringsten Betonzugfestigkeit auf. Mit Gleichung (2.77) lässt sich die Kraft, die den Riss hervorruft, berechnen [1], [11]:

$$F = F_{ct} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho)$$

mit

$$F_{ct} = f_{ct} \cdot A_{c,n} \quad (2.82)$$

folgt:

$$F_{cr} = N_{cr} = f_{ct} \cdot A_{c,n} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho) = f_{ct} \cdot A_i \quad (2.83)$$

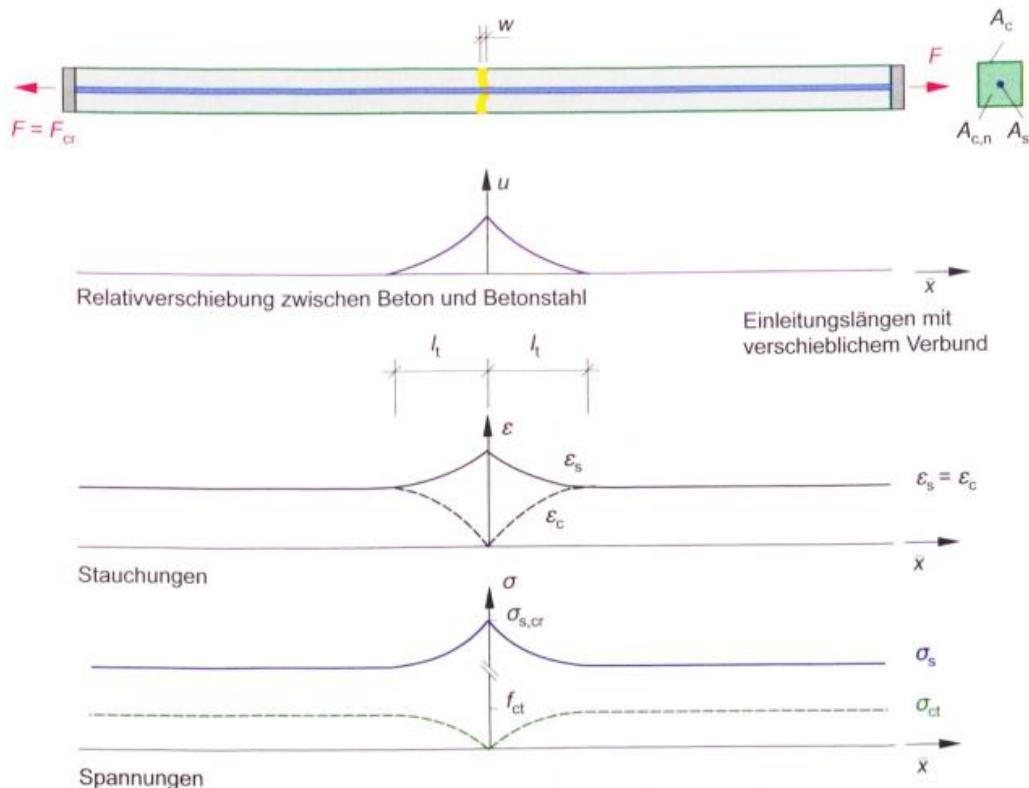


Abbildung 2.33: Stahlbetonzugstab nach Bildung des ersten Risses [11]

Infolge der Rissbildung muss lokal die freigesetzte Betonkraft und damit die gesamte äußere Zugkraft vom Stahl allein übernommen werden. Dies führt zu einer sprunghaften Zunahme der Spannung und Dehnung im Stahl. Die Größe der Stahldehnung wird dabei maßgeblich vom Bewehrungsgrad  $\rho$  beeinflusst [6], [11].

Unmittelbar vor der Rissbildung beträgt die Spannung im Stahl [11]:

$$\sigma_s = f_{ct} \cdot \alpha_e \quad (2.84)$$

Unmittelbar nach der Rissbildung muss der Zugkraftanteil des Betons vom Stahl übernommen werden. Damit gilt für die zusätzliche Stahlspannung [11]:

$$\sigma_{ct} = 0 \Rightarrow \Delta\sigma_s = \frac{F_{ct}}{A_s} = f_{ct} \cdot \frac{A_{c,n}}{A_s} = f_{ct} \cdot \frac{1}{\frac{A_s}{A_{c,n}}} = \frac{f_{ct}}{\rho} \quad (2.85)$$

Daraus folgt für die gesamte Stahlspannung nach der Rissbildung [11]:

$$\sigma_{s,cr} = \frac{F_{cr}}{A_s} = \sigma_s + \Delta\sigma_s = f_{ct} \cdot \alpha_e + \frac{f_{ct}}{\rho} = f_{ct} \cdot \left( \alpha_e + \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.86)$$

Die unterschiedliche Dehnung von Stahl und Beton im Trennrissbereich führt zu Relativverschiebungen und damit zu Verbundspannungen. Beidseits des Risses werden Zugspannungen in den Beton eingeleitet, um den Dehnungsunterschied abzubauen. Die Stahlspannung baut sich also über den Verbund wieder ab, der Dehnungsunterschied zwischen Stahl und Beton wird kleiner [6], [8].

Die Länge, die zur Einleitung der Kraft  $F_{ct}$  über den Verbund in den Beton erforderlich ist, wird als Einleitungslänge  $l_t$  bezeichnet. Das Integral der Dehnungsunterschiede ergibt die Rissbreite  $w$ . Außerhalb des Einleitungsbereiches liegen die Verhältnisse des ungerissenen Stabes vor (Zustand I) – die Dehnungen im Stahl und Beton sind identisch (vgl. Abbildung 2.33) [6], [8], [11].

Mit der ersten Rissbildung nimmt die Dehnung des Stahlbetonzugstabes schlagartig zu, was im Kraft-Verformungs-Diagramm (Abbildung 2.31) als ein Sprung nach rechts erkennbar ist. Im reinen Zustand II entspricht die Dehnsteifigkeit  $EA^{II}$  der Dehnsteifigkeit des Betonstahls  $E_s A_s$  [6].

Bei geringer Erhöhung der Zugkraft entstehen, abhängig von der Streuung der Zugfestigkeit im Bauteil, weitere Risse. Dies führt zu weiteren Dehnungssprüngen im Stahlbetonzugstab (vgl. Abbildung 2.34). Zwischen den Rissen gibt es jedoch Bereiche, in denen die Dehnungen von Stahl und Beton identisch sind. An diesen Stellen ist der Verbund ungestört, sodass das Bauteil bereichsweise im ungerissenen Zustand verbleibt (Zustand I) [6].

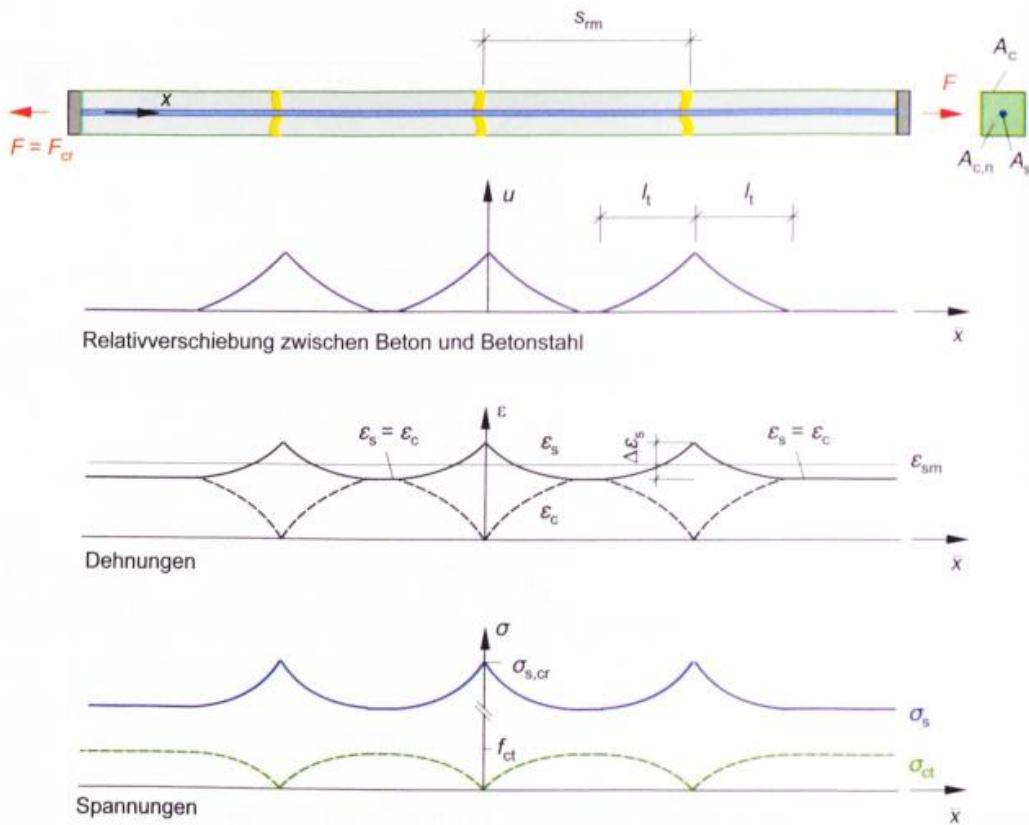


Abbildung 2.34: Bildung weiterer Risse im Stahlbetonzugstab [11]

Bei weiterer Laststeigerung setzt sich die Rissbildung des Stabes so lange fort, bis die Betonzugfestigkeit an keiner Stelle mehr erreicht wird. Damit ist die Rissbildung abgeschlossen [6].

Die Zunahme der Last zwischen der ersten und abgeschlossenen Rissbildung ist von der Streuung der Betonzugfestigkeit abhängig, die innerhalb des Bauteils in engen Grenzen liegt. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Rissabstände bei einer Last von etwa  $1,3 \cdot F_{cr}$  so klein sind, sodass sie sich bei weiterer Laststeigerung kaum noch verändern. Ab diesem Belastungsniveau sind somit die Dehnungen im Stahl und Beton an jeder Stelle unterschiedlich [6], [8].

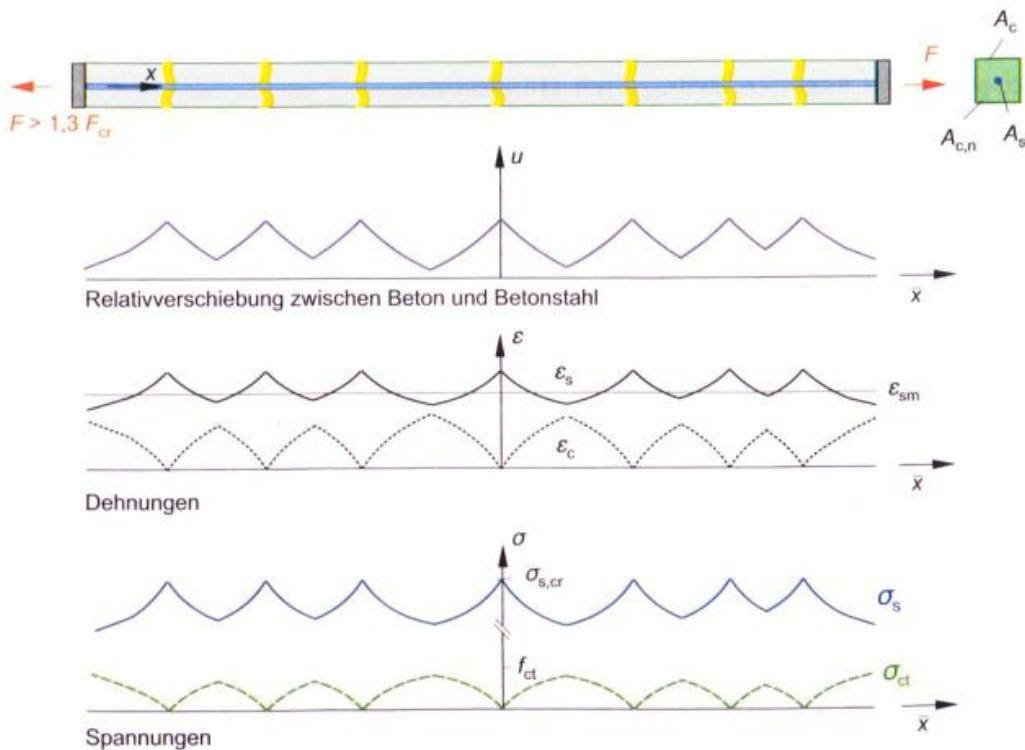


Abbildung 2.35: Stahlbetonzugstab nach abgeschlossener Rissbildung [11]

### Phase (3): Abgeschlossenes Rissbild

Das Rissbild ist abgeschlossen, wenn die Abstände zwischen den vorhandenen Rissen nicht mehr ausreichen, um Zugspannungen in Höhe der Betonzugfestigkeit einzuleiten und damit neue Risse hervorzurufen (vgl. Abbildung 2.35). Entlang des gesamten Stabes wirken Verbundspannungen – in keinem Bereich herrscht ungestörter Verbund. Die Betonstahlkraft bzw. die freigesetzte Betonkraft im Riss kann nicht mehr vollständig in den Beton eingeleitet werden. Daher weisen Beton und Betonstahl über die ganze Stablänge unterschiedliche Dehnungen auf [6], [23].

Durch eine Extremwertbetrachtung ist es möglich, den Rissabstand  $s_r$  einzuschränken. Bei der Erstrissbildung kann am Ende der Einleitungslänge  $l_t$  ein neuer Riss entstehen. Der kleinste Rissabstand  $s_{r,min}$  entspricht somit der Einleitungslänge. Da bei abgeschlossener Rissbildung keine weiteren Risse entstehen können, beträgt der maximale Rissabstand  $s_{r,max}$  der doppelten Einleitungslänge. Oberhalb dieser Länge würde die Zugspannung, die über Verbund vom Stahl in den Beton eingeleitet wird, die Betonzugfestigkeit erreichen und damit einen neuen Riss hervorrufen [6], [11], [23].

$$l_t \leq s_r \leq 2 \cdot l_t \quad (2.87)$$

Der mittlere Rissabstand  $s_{rm}$  beträgt [6], [23]:

$$s_{rm} \approx \frac{s_{r,max} + s_{r,min}}{2} = \frac{2 \cdot l_t + l_t}{2} = 1,5 \cdot l_t \quad (2.88)$$

Die mittlere Betonstahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  kann mit Hilfe des Völligkeitsbeiwertes  $\beta_t$ , der den Rissabstand und die Belastungsdauer erfasst, angegeben werden [11], [17]:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s,max} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_s = \varepsilon_{s,max} - \beta_t \cdot \frac{\Delta\sigma_s}{E_s} \quad (2.89)$$

Hierbei kennzeichnet der Abzugsterm die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Zugversteifung) [11].

#### *Phase ④: Fließen der Bewehrung*

Wird die Streckgrenze des Betonstahls bei weiterer Laststeigerung überschritten, steigt die Dehnung im Stab durch die in den Rissen hervorgerufenen plastischen Verformungen der Bewehrung deutlich an. Eine geringe Laststeigerung ist aufgrund der Verfestigung des Betonstahls noch möglich. Die Tragfähigkeit des Stahlbetonzugstabes ist abhängig von der Zugfestigkeit des Betonstahls. Die maximal mögliche mittlere Stabdehnung ist an die Duktilität der Bewehrung verknüpft [6].

#### **Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Zugversteifung)**

Bei einer abgeschlossenen Rissbildung treten entlang des gesamten Stabes Dehnungsunterschiede zwischen Stahl und Beton auf. Über Verbundspannungen werden zwischen den Rissen wieder Zugspannungen in den Beton eingeleitet, wodurch die Stahlspannungen außerhalb des Rissufers reduziert werden. Dadurch ist die mittlere Betonstahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  geringer als die maximale Stahldehnung  $\varepsilon_{s,max} = \varepsilon_{sr2}$  im Riss. Die mittlere Dehnung des Zugstabes entspricht dabei der mittleren Betonstahldehnung [6].

Die Längenänderung des gesamten Stabes wird daher mit der im reinen Zustand II wirkenden Dehnsteifigkeit  $EA^{II}$  deutlich überschätzt – die Dehnsteifigkeit des Stabes entsprechend unterschätzt. Die Abminderung der maximalen Betonstahldehnung bzw. die Erhöhung der Dehnsteifigkeit gegenüber der Dehnsteifigkeit im reinen Zustand II resultiert aus der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen [6].

Um das Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen und somit die daraus resultierende Steifigkeitserhöhung zu berücksichtigen, muss für den gerissenen Zugstab eine effektive Dehnsteifigkeit angesetzt werden [6]:

$$EA_m^{\text{II}} = \frac{N}{\varepsilon_{sm}} \quad (2.90)$$

Die untenstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Zugstabes unmittelbar nach der Rissbildung. Der maximale Rissabstand entspricht der doppelten Einleitungslänge. Auf Grundlage dieser Betrachtung wird im Folgenden die effektive Dehnsteifigkeit bestimmt bzw. abgeleitet [6].

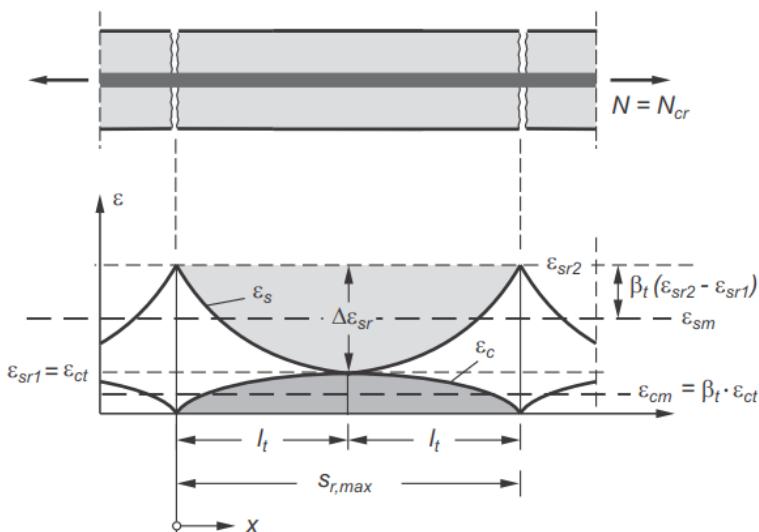


Abbildung 2.36: Dehnungen bei Erstrissbildung [6]

Am Ende der Lasteinleitungslänge wird die im Riss freigesetzte Betonzugkraft wieder in den Beton eingeleitet. Die Betonspannung erreicht gerade die Betonzugfestigkeit und damit die Zugbruchdehnung  $\varepsilon_{ct}$  des Betons. An dieser Stelle sind die Beton- und Stahldehnungen identisch – es herrscht idealer Verbund. Aus Gleichgewichtsgründen muss zwischen dem Riss und dem Ende der Einleitungslänge gelten [6]:

$$\varepsilon_{ct} \cdot E_{cm} \cdot A_{c,n} = (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \cdot E_s \cdot A_s \quad (2.91)$$

$$\varepsilon_{ct} \cdot E_{cm} \cdot A_{c,n} = \Delta\varepsilon_{sr,max} \cdot E_s \cdot A_s \quad (2.92)$$

Die freigesetzte Betonzugkraft im Riss wird über Verbundspannungen wieder in den Beton eingeleitet. Aus Gleichgewichtsgründen muss daher in jedem Schnitt die Differenz der Stahlzugkraft, welche sich aus der maximalen Stahldehnung im Riss und der Stahldehnung an der betrachteten Stelle  $x$  ergibt, mit der Betonzugkraft an der Stelle  $x$  identisch sein [6]:

$$\varepsilon_c(x) \cdot E_{cm} \cdot A_{c,n} = (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_s(x)) \cdot E_s \cdot A_s \quad (2.93)$$

$$\varepsilon_c(x) \cdot E_{cm} \cdot A_{c,n} = \Delta\varepsilon_{sr}(x) \cdot E_s \cdot A_s \quad (2.94)$$

Werden die Beton- und Stahldehnungen auf integriert und durch die Einleitungslänge dividiert, ergeben sich dessen Mittelwerte [6]:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} \varepsilon_c(x) \cdot dx = \beta_t \cdot \varepsilon_{ct} \quad (2.95)$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} \varepsilon_s(x) \cdot dx = \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} (\varepsilon_{sr2} - \Delta\varepsilon_{sr}(x)) \cdot dx \quad (2.96)$$

Hierbei ist:

$\beta_t$  der Völligkeitsbeiwert der Betondehnungsverteilung.

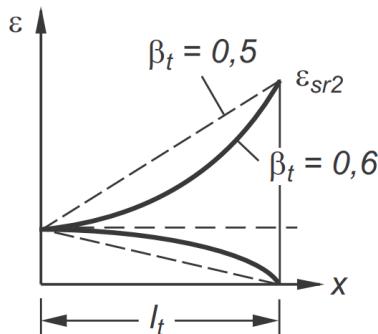


Abbildung 2.37: Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  [6]

Durch Einsetzen der Gleichung (2.94) für die Differenzdehnung  $\Delta\varepsilon_{sr}(x)$  in Gleichung (2.96) folgt für die mittlere Betonstahldehnung [6]:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} \left( \varepsilon_{sr2} - \varepsilon_c(x) \cdot \frac{E_{cm} \cdot A_{c,n}}{E_s \cdot A_s} \right) \cdot dx$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sm} &= \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} \varepsilon_{sr2} \cdot dx - \frac{E_{cm} \cdot A_{c,n}}{E_s \cdot A_s} \cdot \frac{1}{l_t} \cdot \int_0^{l_t} \varepsilon_c(x) \cdot dx \\ \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{sr2} - \frac{E_{cm} \cdot A_{c,n}}{E_s \cdot A_s} \cdot \beta_t \cdot \varepsilon_{ct}\end{aligned}\quad (2.97)$$

Durch Umformen der Gleichung (2.91) und Einsetzen in Gleichung (2.97) kann die mittlere Stahldehnung wie folgt ausgedrückt werden [6]:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sr2} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.98)$$

Aus Gleichung (2.98) und Abbildung 2.37 wird ersichtlich, dass der Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  auch für die Differenzdehnung des Betonstahls gilt, da die Betondehnung denselben Kurvenverlauf aufweist [6], [11].

Unter der Annahme, dass sich die Verbundkraft mit zunehmender Betonstahldehnung nicht verändert, bleibt die Dehnungsdifferenz zwischen dem Rissufer und der Mitte zwischen zwei Rissen konstant. Dies bedeutet zugleich, dass der Verlauf der Betondehnung und der Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  bei zunehmender Last unverändert bleibt. Folglich gilt die Gleichung (2.98) auch für Zugkräfte, welche die Risslast  $N_{cr}$  übersteigen [6]:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.99)$$

Es ist jedoch ausdrücklich zu erwähnen, dass diese Annahme eine starke Vereinfachung darstellt, da der Betondehnungsverlauf  $\varepsilon_c(x)$  und damit auch der Verlauf der Differenzdehnung  $\Delta\varepsilon_s(x)$  bei einer Steigerung der Last eben nicht gleich bleibt. Die Völligkeit nimmt allein schon durch die zunehmende Betonstahldehnung und die damit einhergehende Verbundstörung in der Rissnähe ab [6].

Unter der Bedingung konstanter Verbundspannungen resultiert ein linearer Dehnungsverlauf. Für diesen Fall gilt ein Völligkeitsbeiwert von  $\beta_t = 0,5$  (vgl. Abbildung 2.37). Ein gekrümmter Dehnungsverlauf beschreibt allerdings die Realität besser. In CEB/FIB [17] wird daher für kurzzeitige Belastungen ein Völligkeitsbeiwert von  $\beta_t = 0,6$  angegeben. Für Verformungsberechnungen ist in der Regel das mittlere Bauteilverhalten relevant, wodurch der mittlere Rissabstand  $s_{rm} \approx 2/3 \cdot s_{r,max}$  maßgebend ist. Somit erreicht die Betondehnung zwischen den Rissen  $\approx 2/3 \cdot \varepsilon_{ct}$  und für den Völligkeitsbeiwert ergibt sich  $\beta_t = 2/3 \cdot 0,6 = 0,4$  [6].

Bei abgeschlossenem Rissbild können die Auswirkungen unter einer Dauerlast (Verbundkriechen) vereinfacht durch die Abminderung des Völligkeitsbeiwertes um 1/3 berücksichtigt werden. Es gilt [6], [8], [17]:

$$\beta_t = 0,4 \quad \text{für eine kurzzeitige Zugbeanspruchung,}$$

$$\beta_t = 0,4 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,25 \quad \text{für eine langandauernde Zugbeanspruchung.}$$

Da die mittlere Bauteildehnung der mittleren Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  entspricht, kann die wirksame Spannungs-Dehnungs-Linie des Zugstabes äquivalent durch die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls dargestellt werden [6].

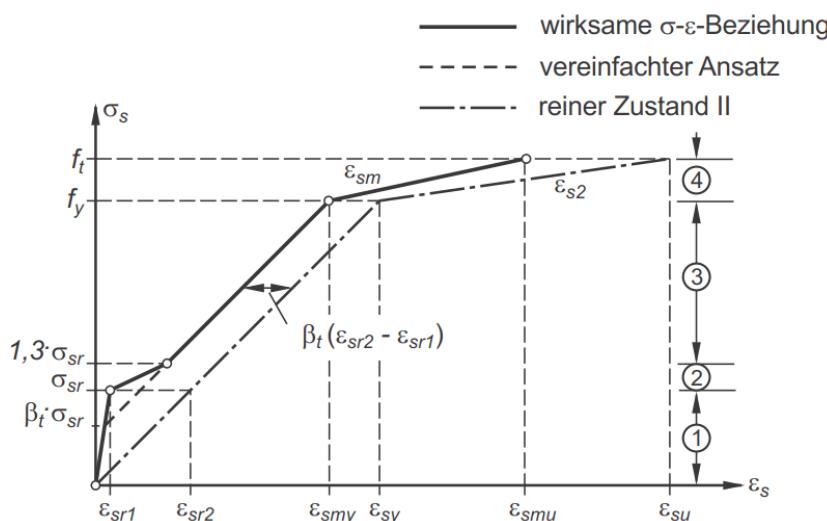


Abbildung 2.38: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Zugstabes [6]

Aus der obenstehenden Abbildung wird deutlich, dass die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Zugversteifung) eine Abminderung der Betonstahldehnung gegenüber dem reinen Zustand II bedeutet [6].

Die mittlere Betonstahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  in den verschiedenen Bereichen kann ausgehend von der Betonstahlspannung  $\sigma_s$  im reinen Zustand II mit den folgenden Beziehungen ermittelt werden [6], [17]:

Bereich ①: Ungerissen ( $0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr}$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s1} \quad (2.100)$$

Bereich(2): Rissbildung ( $\sigma_{sr} < \sigma_s \leq 1,3 \cdot \sigma_{sr}$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr}) + (1,3 \cdot \sigma_{sr} - \sigma_s)}{0,3 \cdot \sigma_{sr}} \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.101)$$

Bereich (3): Abgeschlossene Rissbildung ( $1,3 \cdot \sigma_{sr} < \sigma_s \leq f_y$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.102)$$

Bereich(4): Fließen des Betonstahls ( $f_y < \sigma_s \leq f_t$ )

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) + \delta_d \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{sr}}{f_y}\right) \cdot (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy}) \quad (2.103)$$

Hierbei ist:

- $\varepsilon_{sm}$  die mittlere Stahldehnung,
- $\varepsilon_{s1}$  die Stahldehnung im Zustand I,
- $\varepsilon_{s2}$  die Stahldehnung im Zustand II,
- $\varepsilon_{sr1}$  die Dehnung im Stahl unmittelbar vor der Rissbildung im Zustand I,
- $\varepsilon_{sr2}$  die Stahldehnung unmittelbar nach der Rissbildung im Zustand II,
- $\varepsilon_{sy}$  die Stahldehnung bei Erreichen der Fließgrenze,
- $\beta_t$  der Völligkeitsbeiwert,
- $\sigma_s$  die Stahlspannung im Zustand II,
- $\sigma_{sr}$  die Stahlspannung unmittelbar nach der Rissbildung,
- $f_y$  Die Betonstahlspannung bei Erreichen der Fließgrenze,
- $\delta_d$  Faktor zur Berücksichtigung der Duktilität des Betonstahls mit  $\delta_d = 0,6$  für normalduktilen und  $\delta_d = 0,8$  für hochduktilen Betonstahl.

Für die Berechnung der Tragwerksverformung ist der vierte Bereich nicht relevant, da im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit plastische Verformungen vermieden werden sollten. Außerdem kann vereinfacht und auf der sicheren Seite liegend die Abnahme der Steifigkeit nach der Rissbildung durch die Verlängerung der Linie für die abgeschlossene Rissbildung ersetzt werden [6].

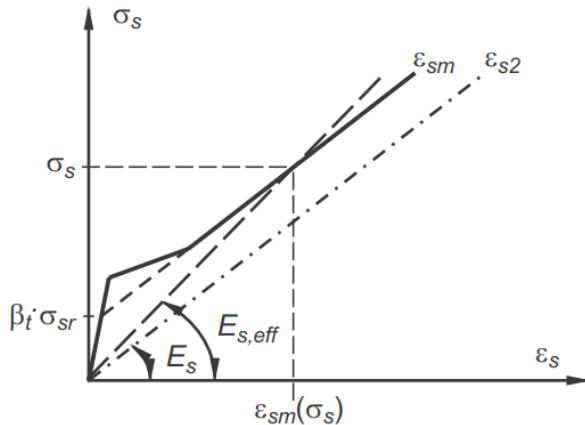


Abbildung 2.39: Definition des wirksamen Elastizitätsmoduls  $E_{s,eff}$  [6]

Die obenstehende Abbildung zeigt, dass nach der Rissbildung des Zugstabes kein konstanter E-Modul vorliegt.

Im Folgenden wird für einen Zugstab der Einfluss des Bewehrungsgrades sowohl auf das Kraft-Verformungs-Verhalten (Abbildung 2.40) als auch auf die effektive Dehnsteifigkeit in Abhängigkeit von der äußeren Zugkraft (Abbildung 2.41) dargestellt [6].

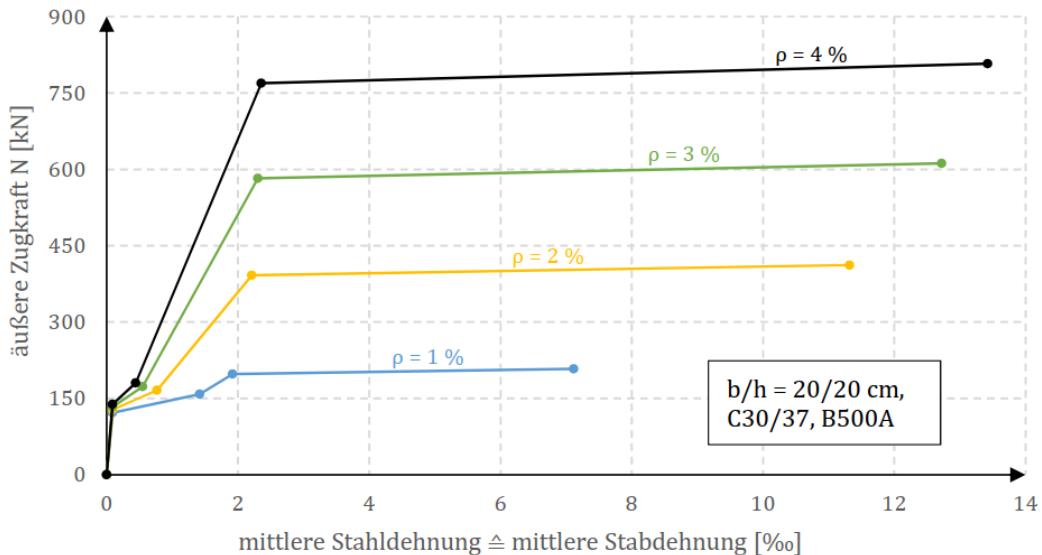


Abbildung 2.40: Einfluss des Bewehrungsgrades auf den Kraft-Verformungs-Verlauf nach [6]

In Gleichung (2.85) wird der Einfluss des Betonstahlanteils auf die Dehnungszunahme nach der Bildung des ersten Risses aufgezeigt. Dies wird auch deutlich in Abbildung 2.40 veranschaulicht. Die Dehnungszunahme des Zugstabes nach der Rissbildung ist umso geringer, je höher der Bewehrungsgrad ist. Im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung zeigt sich bei zunehmendem Bewehrungsgehalt ein deutlich ausgeprägteres Dehnungsvermögen bis zum Fließbereich.

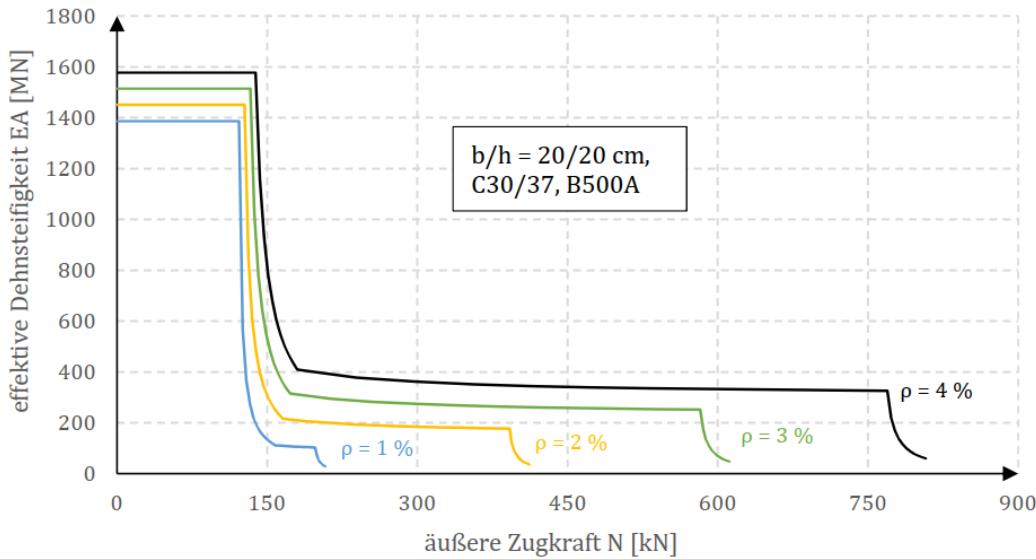


Abbildung 2.41: Einfluss des Bewehrungsgrades auf die effektive Dehnsteifigkeit nach [6]

Wird die Dehnsteifigkeit für jeden Bereich in Abhängigkeit der äußeren Zugkraft berechnet und dargestellt, zeigt sich, die Steifigkeit des Zugstabes bei einsetzender Rissbildung schlagartig abnimmt (siehe Abbildung 2.41). Der Bewehrungsgrad hat dabei einen deutlichen Einfluss auf die Größe der Dehnsteifigkeit des gerissenen Zugstabes [6].

### Völligkeitsbeiwert $\beta_t$ im Rahmen der Verformungsberechnung

Im Zuge der Verformungsberechnung lässt sich ein beanspruchungsabhängiger, mit zunehmender Stahlspannung hyperbolisch abnehmender Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  nach Gleichung (2.104) wiederfinden. Nach Zilch [6] stammt dieser Beiwert aus den Versuchsbeobachtungen von Rao [26].

$$\beta_t = \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad (2.104)$$

mit

$$\beta = 1,0 \quad \text{für kurzzeitige Beanspruchungen,}$$

$$\beta = 0,5 \quad \text{für langandauernde Beanspruchungen.}$$

Die Betonstahldehnung unmittelbar vor und nach dem Riss kann durch Umformen auch folgendermaßen berechnet werden [6]:

$$\varepsilon_{sr1} = \varepsilon_{s1} \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad (2.105)$$

$$\varepsilon_{sr2} = \varepsilon_{s2} \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad (2.106)$$

Mit dem Einsetzen der Gleichungen (2.104) bis (2.106) in Gleichung (2.99) ergibt sich für die abgeschlossene Rissbildung [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{s2} - \beta \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \cdot \left( \varepsilon_{s2} \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} - \varepsilon_{s1} \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right) \\ \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{s2} \cdot \left( 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right) + \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \varepsilon_{s1} \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} \cdot \zeta + \varepsilon_{s1} \cdot (1 - \zeta) \quad (2.108)$$

mit

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2.109)$$

Folglich kann die mittlere Dehnung auch durch die Bestimmung der Betonstahldehnung infolge der einwirkenden Belastung im ungerissenen und im gerissenen Zustand ermittelt werden. Der Verteilungsbeiwert  $\zeta$  berücksichtigt dabei die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen [3], [6].

Ist der Völligkeitsbeiwert konstant, so ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (2.105) und (2.106) in Gleichung (2.99) ebenfalls die Gleichung (2.108). Der Verteilungsbeiwert ist dann jedoch wie folgt zu berechnen:

$$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad (2.110)$$

## 2.4.2 Tragverhalten unter Biegebeanspruchung

Wie bereits in Kapitel 2.1 erläutert, verhält sich ein unter Biegung ausgesetzter Stahlbetonbalken bis zur Rissbildung zunächst linear-elastisch.

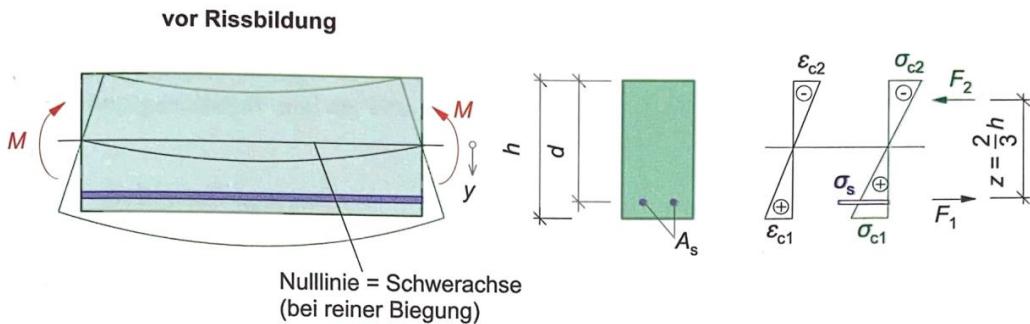


Abbildung 2.42: Verhalten eines Stahlbetonbalkenelements unter Biegung im Zustand I [11]

Die Querschnittsverkrümmung berechnet sich nach Gleichung (2.3). Mit den Bezeichnungen in Abbildung 2.42 gilt somit [11]:

$$\kappa_I = \frac{|\varepsilon_{c1}| + |\varepsilon_{c2}|}{h} = \frac{M}{E \cdot I^I} \quad (2.111)$$

Das einwirkende Biegemoment erzeugt im Querschnitt Spannungen, die linear über den Querschnitt verlaufen. Durch Integration der Spannungen ergeben sich die inneren Kräfte bzw. das Kräftepaar  $F_1$  und  $F_2$ . Damit muss gelten [8]:

$$M = F_1 \cdot z = F_2 \cdot z \quad (2.112)$$

Beim Rechteckquerschnitt beträgt der innere Hebelarm  $z = 2/3 \cdot h$ , solange sich der Querschnitt im Zustand I befindet. Erhöht sich das Biegemoment, steigen die Spannungen und die resultierenden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  proportional an, wobei der innere Hebelarm unverändert bleibt. Bei gewöhnlichen Bewehrungsgraden ist der Einfluss des Betonstahls auf die Biegesteifigkeit  $E \cdot I^I$  vernachlässigbar klein. Daher kann anstelle der ideellen Querschnittswerte mit den Bruttoquerschnittswerten gerechnet werden [8], [11]:

$$E \cdot I^I = E_c \cdot I_i = E_c \cdot I_c \quad (2.113)$$

Wird das Rissmoment  $M_{cr}$  bei weiterer Erhöhung der Last überschritten, führt dies zur Rissbildung in der Zugzone. Für Momente, die das Rissmoment übersteigen, befindet sich der Querschnitt demnach im Zustand II [8].

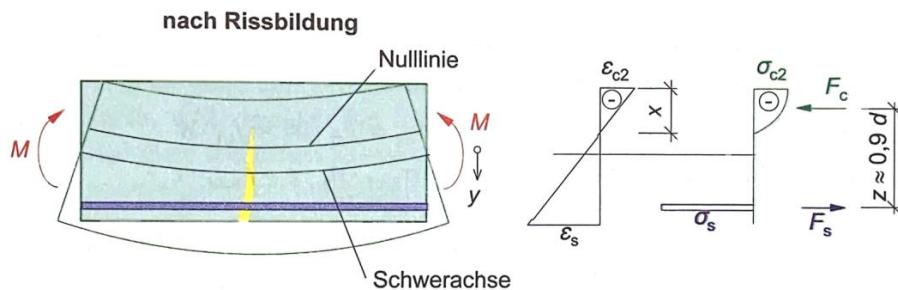


Abbildung 2.43: Verhalten eines Stahlbetonbalkenelements im Zustand II [11]

Nach der Rissbildung wird der im Zugbereich liegende Betonstahl aktiviert. Die Nulllinie (neutrale Faser) fällt nicht mehr mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen – sie verschiebt sich in die Druckzone hinein. Je kleiner der Stahlanteil ist, desto größer ist die Verschiebung der Nulllinie in die Druckzone, da die freigesetzte Betonzugkraft damit einen größeren Dehnungssprung im Stahl verursacht [8].

Das Biegemoment wird durch ein Kräftepaar aus der Betondruckkraft  $F_c$  und der Stahlzugkraft  $F_s$  im Gleichgewicht gehalten. Bei reiner Biegung gilt daher [8]:

$$M = F_c \cdot z = F_s \cdot z \quad (2.114)$$

Die Bernoulli Hypothese stellt die wichtigste Voraussetzung für die Anwendung der Biegetheorie dar. Auch im Zustand II wird vereinfacht angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben. Dadurch kann die Biegesteifigkeit im reinen Zustand II mit der bekannten Beziehung zwischen Moment und Krümmung bestimmt werden [8]:

$$\kappa_{II} = \frac{M}{E \cdot I^{II}} \Rightarrow E \cdot I^{II} = \frac{M}{\kappa_{II}} \quad (2.115)$$

Die Krümmung im reinen Zustand II kann ebenfalls über das innere Moment bestimmt werden [8]:

$$M = F_s \cdot z = E_s \cdot \varepsilon_s \cdot A_s \cdot z \quad (2.116)$$

Durch Umstellen der Gleichung (2.116) nach der Stahldehnung  $\varepsilon_s$  folgt [8]:

$$\varepsilon_s = \frac{M}{E_s \cdot A_s \cdot z} \quad (2.117)$$

Die Krümmung im gerissenen Querschnitt ergibt sich aus der geometrischen Abhängigkeit zu [8]:

$$\kappa_{II} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} = \frac{M}{E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)} \quad (2.118)$$

Hierbei stellt der Ausdruck im Nenner in Gleichung (2.118) die Steifigkeit im reinen Zustand II dar [8], [11]:

$$E \cdot I^{II} = E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x) \quad (2.119)$$

Analog zum Zugstab hat die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen auch beim Biegebalken einen erheblichen Einfluss auf die Biegesteifigkeit (vgl. Abbildung 2.44). Der Unterschied zum Zugstab besteht darin, dass bei Biegebauteilen – die üblicherweise keinen konstanten Momentenverlauf über die Bauteillänge aufweisen – die Rissbildung sich mit Steigerung der Last in Richtung der Auflager fortsetzt. Demzufolge treten gleichzeitig mehrere Rissbildungsphasen im Balken auf. In Feldmitte kann bereits ein abgeschlossenes Rissbild vorliegen, während der Beton in Auflagernähe ungerissen bleibt [6].

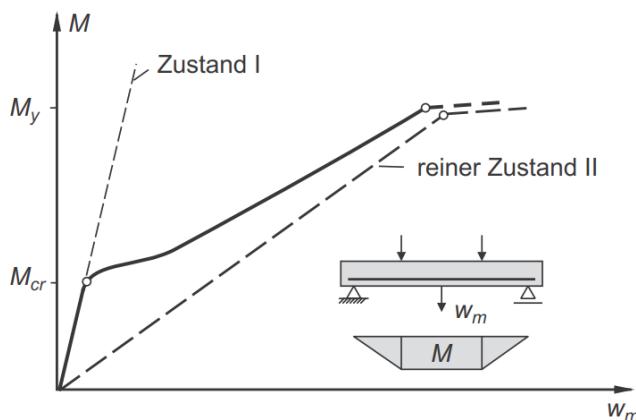


Abbildung 2.44: Momenten-Verformungs-Linie eines Stahlbetonbalkens [6]



### 3 Bewertung unterschiedlicher Nachweismethoden für die Verformungen

#### 3.1 Vereinfachter Nachweis über die Biegeschlankheit

##### 3.1.1 Allgemeines

Eine „genaue“ Verformungsberechnung unter Berücksichtigung zahlreicher Einflussfaktoren ist mit einem großen Rechenaufwand verbunden. Vor allem für Hand-Berechnungen bieten sich daher einfachere Methoden an [23].

Gemäß [4] und [23] stammen die ersten Lösungsansätze von *Mayer/Rüsch* [27], die in den 60er Jahren veröffentlicht wurden. Dabei wurden etwa 180 Schadensfälle aus dem gesamten Bundesgebiet als Resultat der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen erfasst und daraus sogenannte Biegeschlankheitskriterien zur Sicherstellung einer schadensfreien Konstruktion abgeleitet [4], [23].

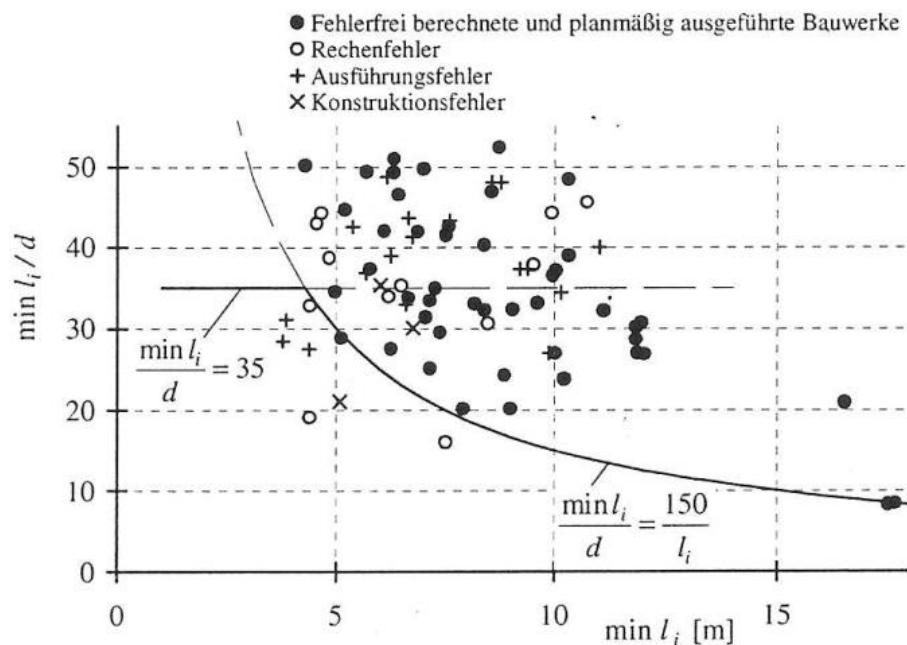


Abbildung 3.1: Grenzschlankheiten von Stahlbetonbauteilen nach [27] aus [28]

In den nachfolgenden Abschnitten werden lediglich die Vorschriften gemäß DIN 1045-1 [18] und DIN EN 1992-1-1 [19] erläutert. Alternative Biegeschlankheitskriterien sind z. B. in *Zilch/Donaubauer* [29], *Krüger/Mertzsch* [30], [31], *Jeromin* [32], [33] und *Fischer* [34] enthalten.

### 3.1.2 Regelungen nach DIN 1045-1

Der von [27] entwickelte Ansatz wurde in die Stahlbetonbaunorm aufgenommen und ist ebenfalls in DIN 1045-1 [18] enthalten. Damit gilt [4], [6], [23]:

Generell:

$$\frac{l_i}{d} \leq 35 \quad (3.1)$$

Bei Einbau verformungsempfindlicher Bauteile (z. B. leichte Trennwände):

$$\frac{l_i}{d} \leq \frac{150}{l_i} \quad (3.2)$$

Hierbei ist:

$l_i = \alpha \cdot l_{\text{eff}}$  die Ersatzstützweite als Abstand der Momentennullpunkte,

$\alpha$  der Beiwert gemäß Tabelle 3.1,

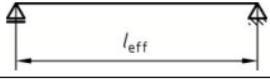
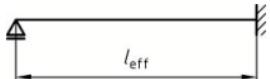
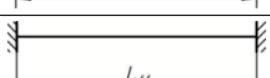
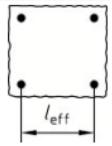
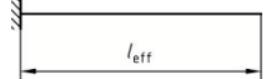
$l_{\text{eff}}$  die tatsächliche Stützweite,

$d$  die statische Nutzhöhe.

Bei linienförmig gelagerten, zweiachsig gespannten Stahlbetonplatten ist die kleinere der beiden Stützweiten und bei punktförmig gelagerten (Flachdecken) die größere maßgebend [18].

Die Beiwerte in Tabelle 3.1 (Zeile 2 bzw. 3) dürfen bei Rand- und Innenfeldern durchlaufender Bauteile verwendet werden, sofern das Verhältnis zwischen der betrachteten und benachbarten Stützweite im Bereich zwischen  $0,8 < l_{\text{eff},1}/l_{\text{eff},2} < 1,25$  liegt [18].

Tabelle 3.1: Beiwerte  $\alpha$  zur Bestimmung der Ersatzstützweite [18]

Spalte	1	2
Zeile	Statisches System	$\alpha = l_i / l_{\text{eff}}$
1		1,00
2		0,80
3		0,60
4		Innenfeld 0,70 <sup>a</sup> Randfeld 0,90 <sup>a</sup>
5		2,4

<sup>a</sup> Bei Platten mit Beton ab der Festigkeitsklasse C30/37 dürfen diese Werte um 0,1 abgemindert werden.

In Abbildung 3.2 ist die statische Nutzhöhe in Abhängigkeit der Ersatzstützweite dargestellt. Für Ersatzstützweiten  $l_i < 4,3$  m führt die Bedingung  $d \geq l_i / 35$  zu höheren Deckenstärken. In diesem Bereich ist daher stets die Bedingung  $l_i / d \leq 35$  maßgebend [1].

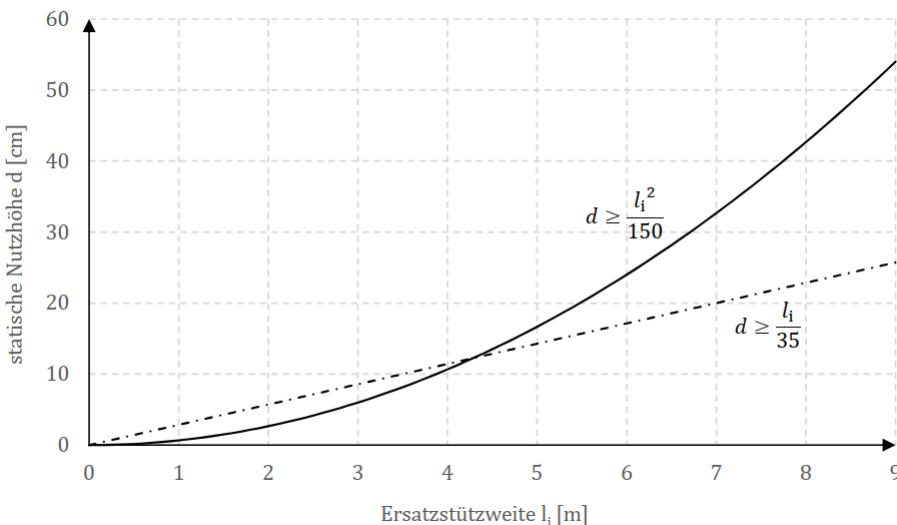


Abbildung 3.2: Deckenstärke  $d$  in Abhängigkeit der Ersatzstützweite  $l_i$  nach [1]

Zum Zeitpunkt der Untersuchungen von Mayer/Rüsch [27] kamen deutlich niedrigere Stahl- und Betongüten zum Einsatz. Im Vergleich dazu werden die heutigen Bauteile im Allgemeinen stärker ausgenutzt als in den 60er Jahren [4], [23].

Dies betrifft insbesondere den Betonstahl. In der Vergangenheit kam er teilweise mit einer Streckgrenze von  $f_{yk} = 220 \text{ N/mm}^2$  zum Einsatz, während er heute mit einer wesentlich höheren Streckgrenze von  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$  auf dem Markt ist. Dies führt zu einer größeren Krümmung und entsprechend auch zu einer größeren Durchbiegung [4], [23].

Die deutlich höhere Ausnutzung der Baustoffe infolge der technologischen Entwicklung hat zur Folge, dass die damaligen Untersuchungen von *Mayer/Rüschi* [27] die heutige Bemessungspraxis nur bedingt widerspiegeln [1], [4]. Daher ist von der Anwendung dieser Regelung abzuraten [23].

Die dennoch weitgehende Schadensfreiheit in der Vergangenheit bei Einhaltung des Biegeschlankheitskriteriums nach DIN 1045-1 ist auf unberücksichtigte Einflussparameter wie Überfestigkeiten des Materials, nicht erfasste Randeinspannungen, zweiachsiger Lastabtrag usw. zurückzuführen [4].

Wie aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) zu erkennen ist, hängt die Biegeschlankheit der Deckenplatte nach DIN 1045-1 lediglich von der Ersatzstützweite und der statischen Höhe ab. Die Betonfestigkeit, die Höhe der Beanspruchung, das Belastungsalter, die Rissbildung und Langzeiteffekte wie Kriechen und Schwinden werden dabei nicht berücksichtigt. Dies verdeutlicht ebenfalls die Unverlässlichkeit des vereinfachten Nachweises der Verformung über das Biegeschlankheitskriterium.

### 3.1.3 Regelungen nach DIN EN 1992-1-1

Im Gegensatz zur DIN 1045-1 wurden die Biegeschlankheitskriterien in DIN EN 1992-1-1 [19] aus rechnerischen Parameterstudien an Einfeldträgern (Platten und Balken mit Rechteckquerschnitt) hergeleitet [3], [23].

Für diese Parameterstudie kam der in Kapitel 3.2.3 beschriebene Ansatz gemäß DIN EN 1992-1-1 zur Anwendung, worin unterschiedliche Betondruckfestigkeitsklassen und eine charakteristische Streckgrenze von  $500 \text{ N/mm}^2$  berücksichtigt wurden. Das Tragfähigkeitsmoment wurde dabei für eine gegebene Biegezugbewehrung errechnet und als quasi-ständige Einwirkung wurde 50 % der Gesamtbemessungslast angesetzt [19].

Des Weiteren berücksichtigen die in DIN EN 1992-1-1 zulässigen Biegeschlankheitskriterien neben dem Einfluss der Belastung über den erforderlichen Längsbewehrungsgrad zudem über  $f_{ck}$  die Festigkeit und den Elastizitätsmodul des Betons. Dabei werden die Richtwerte der Elastizitätsmoduln für Betonarten mit quarzhaltigen Zuschlägen gemäß Tabelle 2.2 zugrunde gelegt. Hiervon abweichende Gesteinskörnungen und deren Einfluss auf den Elastizitätsmodul wurden dabei nicht berücksichtigt [2].

In [3] werden die in [35] genannten Randbedingungen, die der Parameterstudie zugrunde liegen, wiedergegeben:

- Aufbringen der Eigenlast  $g_1$  des Tragwerks zum Zeitpunkt  $t_1 = 10$  d
- Aufbringen der Ausbaulasten  $g_2$  zum Zeitpunkt  $t_2 = 60$  d
- Quasi-ständige Einwirkungskombination  $g_1 + g_2 + (\psi_2 \cdot q)$  zum Zeitpunkt  $t_3 = 365$  d, mit  $\psi_2 = 0,3$
- Begrenzung des Durchhangs auf den Grenzwert  $\leq l_{\text{eff}}/250$
- Begrenzung der Durchbiegung bei verformungsempfindlichen Bauteilen auf den Grenzwert  $\leq l_{\text{eff}}/500$
- Relative Luftfeuchte für die Ermittlung der Kriech- und Schwindbeiwerte beträgt zwischen 50 % und 80 %
- Aufgrund üblicher Aufrundungen bei der Bewehrungswahl im GZT liegt das Verhältnis zwischen vorhandener und erforderlicher Bewehrung bei  $A_{s,\text{vorh}}/A_{s,\text{erf}} \leq 1,10$
- Betonfestigkeiten, Bewehrungsgrade
- Nachbehandlungsdauer beträgt 3 Tage
- Elastizitätsmodul gemäß Tabelle 2.2 (Richtwerte für Betonsorten mit quarzhaltigen Zuschlägen)

Beim vereinfachten Nachweis über die Biegeschlankheit wird zwischen gering und mäßig bewehrten und hochbewehrten Bauteilen unterschieden [3]:

Für  $\rho \leq \rho_0$  (gering und mäßig bewehrte Bauteile) gilt:

$$\frac{l}{d} = K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{1,5} \right] \quad (3.3)$$

Für  $\rho > \rho_0$  (hochbewehrte Bauteile) gilt:

$$\frac{l}{d} = K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad (3.4)$$

Hierbei ist:

$\frac{l}{d}$  der Grenzwert der Biegeschlankheit als Verhältnis zwischen Stützweite  $l$  und statischer Nutzhöhe  $d$ ,

$K$  der Beiwert aus Tabelle 3.2 zur Berücksichtigung der verschiedenen statischen Systeme,

$\rho_0$  der Referenzbewehrungsgrad mit  $\rho_0 = 10^{-3} \cdot \sqrt{f_{ck}}$ ,

$f_{ck}$  die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit des Betons in MN/m<sup>2</sup>,

$\rho$  der **erforderliche** Zugbewehrungsgrad in Feldmitte (bei Kragträgern am Einspannquerschnitt), welcher sich aus dem Bemessungsmoment ergibt,

$\rho'$  der **erforderliche** Druckbewehrungsgrad Feldmitte (bei Kragträgern am Einspannquerschnitt), welcher sich aus dem Bemessungsmoment ergibt.

Die Biegeschlankheiten nach Gleichung (3.3) und (3.4) sind im Allgemeinen auf den Maximalwert  $l/d \leq K \cdot 35$  und bei Einbau verformungsempfindlicher Ausbauelemente auf den Maximalwert  $l/d \leq K^2 \cdot 150/l$  zu begrenzen [25].

**Tabelle 3.2: Beiwert  $K$  zur Berücksichtigung der verschiedenen statischen Systeme und Grundwerte der Biegeschlankheit für Stahlbetonbauteile ohne Druckbewehrung [19]**

Statisches System	$K$	Beton hoch beansprucht $\rho = 1,5\%$	Beton gering beansprucht $\rho = 0,5\%$
frei drehbar gelagerter Einfeldträger; gelenkig gelagerte einachsig oder zweiachsig gespannte Platte	1,0	14	20
Endfeld eines Durchlaufträgers oder einer einachsig gespannten durchlaufenden Platte; Endfeld einer zweiachsig gespannten Platte, die kontinuierlich über einer längere Seite durchläuft	1,3	18	26
Mittelfeld eines Balkens oder einer einachsig oder zweiachsig gespannten Platte	1,5	20	30
Platte, die ohne Unterzüge auf Stützen gelagert ist (Flachdecke) (auf Grundlage der größeren Spannweite)	1,2	17	24
Kragträger	0,4	6	8

ANMERKUNG 1 Die angegebenen Werte befinden sich im Allgemeinen auf der sicheren Seite. Genaue rechnerische Nachweise führen häufig zu dünnern Bauteilen.

ANMERKUNG 2 Für zweiachsig gespannte Platten ist in der Regel der Nachweis mit der kürzeren Stützweite zu führen. Bei Flachdecken ist in der Regel die größere Stützweite zugrunde zu legen.

ANMERKUNG 3 Die für Flachdecken angegebenen Grenzen sind weniger streng als der zulässige Durchhang von 1/250 der Stützweite. Erfahrungsgemäß ist dies ausreichend.

Die Herleitung der Gleichungen (3.3) und (3.4) basiert auf der Annahme, dass die Stahlspannung unter der Bemessungslast im GZG in einem gerissenen Querschnitt in Feldmitte eines Balkens bzw. einer Platte oder am Einspannquerschnitt eines Kragträgers  $310 \text{ N/mm}^2$  beträgt ( $500/(1,15 \cdot 1,4) = 310 \text{ N/mm}^2$ ). Ist die vorhandene Bewehrung größer als die erforderliche, so führt dies zu einer kleineren Stahlspannung und somit auch zu einer geringeren Stahldehnung im Rissquerschnitt. Daraus ergibt sich eine reduzierte Krümmung und damit eine geringere Durchbiegung [3], [19].

Insofern darf der Einfluss einer niedrigeren Stahlspannung mit einem Erhöhungsfaktor gemäß Gleichung (3.5) für die zulässigen Biegeschlankheiten berücksichtigt werden [3], [19]. Aufgrund der zugrunde liegenden Randbedingungen ist es jedoch zu empfehlen, den Erhöhungsfaktor auf 1,1 zu begrenzen [2]:

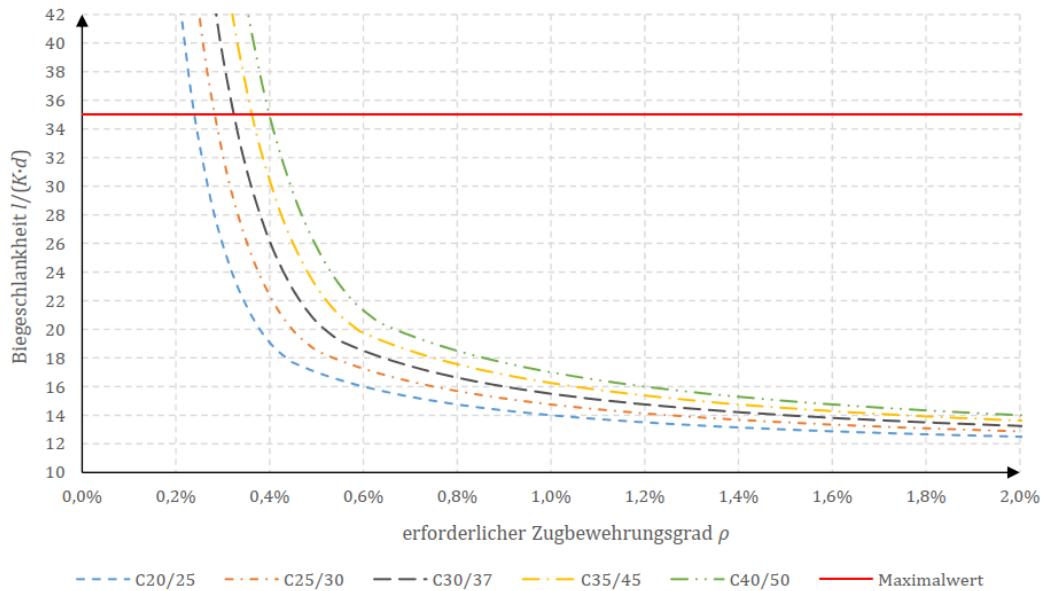
$$\frac{310}{\sigma_s} = \frac{500}{f_{yk} \cdot \frac{A_{s,erf}}{A_{s,vorh}}} \leq 1,1 \quad (3.5)$$

Dabei ist:

$\sigma_s$  die Betonstahlspannung in Feldmitte (bei Kragträgern am Einspannquerschnitt) unter der Bemessungslast im GZG,

$A_{s,erf}$  die erforderliche Biegezugbewehrung im GZT,

$A_{s,vorh}$  die vorhandene Biegezugbewehrung.



**Abbildung 3.3: Grenzwerte der Biegeschlankheiten bis  $\rho = 2,0\%$  (ohne Druckbewehrung, Verformungsbegrenzung auf  $L/250$ ) nach [3]**

In Abbildung 3.3 sind die Grenzwerte für die Biegeschlankheiten in Abhängigkeit des erforderlichen Biegezugbewehrungsgrads für unterschiedliche Betonfestigkeitsklassen dargestellt. Im Allgemeinen wird deutlich, dass die zulässige Biegeschlankheit abnimmt, wenn der Längsbewehrungsgrad und somit die Belastung zunimmt. Sie werden dagegen größer, wenn die Betonfestigkeit und damit auch der Elastizitätsmodul ansteigt [3].

Bei niedrigen Bewehrungsgraden ergeben sich sehr hohe Werte für die zulässige Biegeschlankheit (vgl. Abbildung 3.3). Um konstruktiv unsinnige und unterdimensionierte Bauteildicken zu vermeiden, wurden im nationalen Anhang [25] die Maximalwerte ( $l/d \leq K \cdot 35$  bzw.  $l/d \leq K^2 \cdot 150/l$ ) aus DIN 1045-1 als obere Grenzwerte festgelegt [3].

Für Bauteile, bei denen die Gefahr besteht, dass deren übermäßige Verformung benachbarte Ausbauteile beschädigen könnten, sind in der Regel die zulässigen Biegeschlankheitswerte gemäß Gleichung (3.3) bzw. (3.4) mit einem zusätzlichen Faktor  $\alpha_i$  zu reduzieren (vgl. Abbildung 3.4) [3]:

$$\text{Balken und Platten mit } l_{\text{eff}} > 7 \text{ m:} \quad \alpha_i = \frac{7,0}{l_{\text{eff}}} \quad (3.6)$$

$$\text{Flachdecken mit } l_{\text{eff}} > 8,5 \text{ m:} \quad \alpha_i = \frac{8,5}{l_{\text{eff}}} \quad (3.7)$$

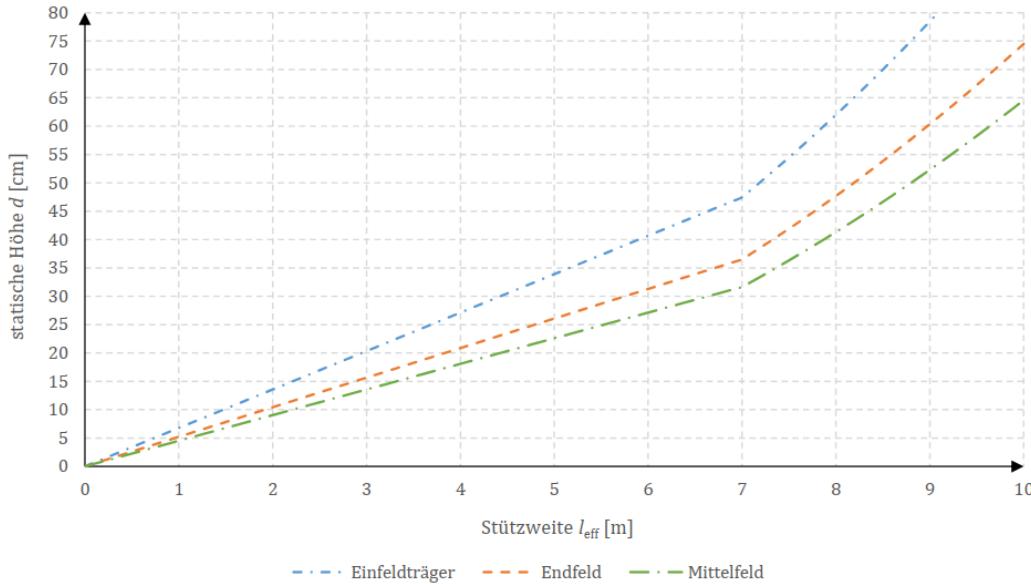


Abbildung 3.4: statische Höhe  $d$  in Abhängigkeit der tatsächlichen Stützweite  $l_{\text{eff}}$  bei Einbau verformungsempfindlicher Bauteile (Verformungsbegrenzung auf  $L/500$ ) für unterschiedliche statische Systeme (C25/30,  $\rho = 1,0\%$ , ohne erforderliche Druckbewehrung, keine Flachdecke)

Durchbiegungsberechnungen sind gemäß [19] im Allgemeinen nicht erforderlich, solange das Biegeschlankheitskriterium eingehalten wird. Ist dies nicht der Fall oder liegen andere Randbedingungen zugrunde, so ist der Nachweis über eine direkte Verformungsberechnung durchzuführen.

Werden demnach bei Stahlbetonplatten oder -balken die zulässigen Biegeschlankheiten eingehalten, darf laut [19] davon ausgegangen werden, dass auch ihre Durchbiegungen die Verformungsgrenzwerte ( $l/250$  bzw.  $l/500$ ) nicht überschreiten.

In [36] wird jedoch anhand der Ergebnisse eines Vergleiches festgestellt, dass die für den Nachweis der Durchbiegung erforderlichen Deckenstärken, basierend auf der direkten Verformungsberechnung, größer sind als jene, die sich aus dem vereinfachten Nachweis über die Biegeschlankheit ergeben. Dies widerspricht dem Prinzip in DIN EN 1992-1-1.

Obwohl die Regelungen zum vereinfachten Nachweis aus Gründen der Vollständigkeit dargestellt wurden, wird dieser aufgrund der oben genannten Tatsache nicht in den Vergleich der in dieser Arbeit behandelten Verfahren einbezogen.

## 3.2 Rechnerischer Nachweis

### 3.2.1 Allgemeines

Wie bereits in Kapitel 2.1 dargelegt, kann die Durchbiegung bei schubstarren Biegebauteilen durch zweimalige Integration der Krümmung über die Stablänge bestimmt werden [37]:

$$w(x) = - \iint \kappa(x) \cdot dx = - \iint \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \cdot dx \quad (3.8)$$

Die wesentliche Schwierigkeit bei Stahlbetonbauteilen liegt darin, dass infolge der Rissbildung keine konstante Biegesteifigkeit über die Bauteillänge vorliegt. Während ungerissene Querschnitte einen linearen Zusammenhang zwischen einwirkendem Moment und Krümmung aufweisen, ist diese lineare Verknüpfung bei gerissenen Querschnitten nicht mehr vorhanden [6], [11].

Ist die von der einwirkenden Belastung verursachte Krümmung bzw. die Biegesteifigkeit an jedem Querschnitt bekannt, so kann die Durchbiegung an einer bestimmten Stelle mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnet werden [37]:

$$w = \int_0^l \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \cdot \bar{M}(x) \cdot dx = \int_0^l \kappa(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx \quad (3.9)$$

Zu erwähnen ist jedoch, dass im Stahlbetonbau eine exakte Verformungsrechnung aufgrund stark streuenden Eingangsgrößen und idealisierten Randbedingungen nicht möglich ist [6].

Die wahrscheinliche Verformung eines Bauteils wird sich jedoch zwischen zwei Grenzwerten einstellen [6]:

- **Unterer Grenzwert  $w^I$**  als Rechenwert der Durchbiegung des ungerissenen Bauteils (Zustand I)
- **Oberer Grenzwert  $w^{II}$**  als Rechenwert der Durchbiegung des vollständig gerissenen Bauteils (reiner Zustand II ohne Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen)

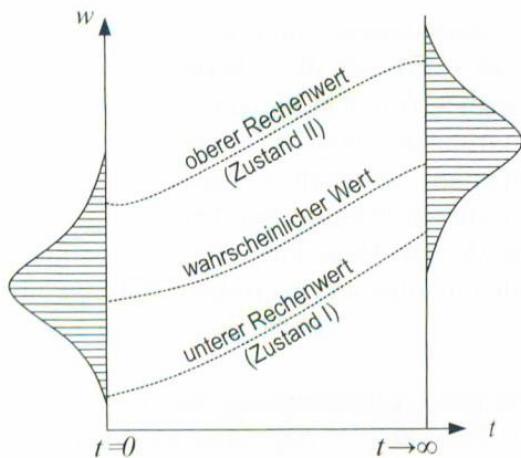


Abbildung 3.5: rechnerische Grenzwerte und der wahrscheinliche Wert der Durchbiegung mit Be- rücksichtigung der zeitabhängigen Verformungen [37]

### 3.2.2 Grundlagen

#### Ungerissener Querschnitt (Zustand I)

Das Tragverhalten eines ungerissenen Querschnitts unter einer Biegebeanspruchung wurde bereits in Kapitel 2.4.2 beschrieben. Entsprechend Gleichung (2.111) ergibt sich für den ideellen Querschnitt die Krümmung im Zustand I unter kurzzeitig wirkender Biegebeanspruchung zu [6]:

$$\kappa_I = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_i} \quad (3.10)$$

Bei reiner Biegung lassen sich die Beton- und Stahlspannungen durch den Abstand  $z_i$  des betrachteten Querschnittspunktes vom ideellen Schwerpunkt berechnen [6]:

$$\sigma_{c1} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_i} \cdot z_i \quad (3.11)$$

$$\sigma_{s1} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I_i} \cdot z_i \cdot \alpha_s = \sigma_{c1} \cdot \alpha_s \quad (3.12)$$

mit:

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_{cm}} \quad (3.13)$$

Für die Berechnung des Rissmomentes  $M_{cr}$  wird die mittlere Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}$  angesetzt [6]:

$$M_{cr} = W \cdot f_{ctm} \quad (3.14)$$

Hierbei ist:

$W$  das Widerstandsmoment.

## Gerissener Querschnitt (Zustand II)

Im gerissenen Querschnitt erreichen sowohl die Stahl- als auch die Betonspannungen ihr Maximum. Mit der Annahme, dass die Bernoulli-Hypothese auch im gerissenen Querschnitt Gültigkeit besitzt, die Bewehrung und der Beton mit gleichem Abstand von der Dehnungsnulllinie identische Dehnungen aufweisen, ergibt sich entsprechend der Herleitung in Kapitel 2.4.2 die Biegesteifigkeit und daraus die Krümmung im reinen Zustand II zu [6]:

$$E_{cm} \cdot I^{II} = E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x) \quad (3.15)$$

$$\kappa_{II} = \frac{M}{E_{cm} \cdot I^{II}} = \frac{M}{E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)} \quad (3.16)$$

Das Trägheitsmoment des gerissenen Querschnitts errechnet sich zu [6]:

$$I^{II} = \frac{E_s}{E_{cm}} \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x) = \alpha_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x) \quad (3.17)$$

Wie aus Gleichung (3.17) zu erkennen ist, muss für die Errechnung des Trägheitsmomentes die Druckzonenhöhe  $x$  bekannt sein.

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit muss die Druckzonenhöhe durch die Iteration der Dehnungsebene bestimmt werden. Da im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit die hervorgerufenen Betonstauchungen in der Regel zwischen 0,3 bis 0,5 % liegen, ist es ausreichend genau einen linearen Verlauf der Betonspannungen anzunehmen [6], [23].

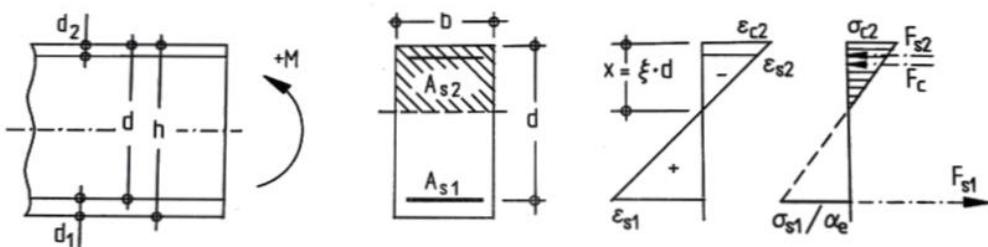
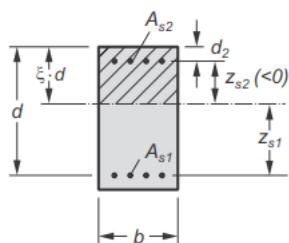


Abbildung 3.6: Spannungen und Dehnungen im gerissenen Querschnitt unter reiner Biegung (Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit) [38]

Wird ein Stahlbetonquerschnitt unter reiner Biegung beansprucht, kann die Druckzonenhöhe  $x$  aus dem Gleichgewicht der inneren Kräfte ( $F_{s1} - F_{s2} - F_c = 0$ ) bestimmt werden. Die Druckzonenhöhe ist dann unabhängig vom einwirkenden Moment und wird nur mehr durch das Verhältnis der E-Moduln  $\alpha_s$  und durch die vorhandene Bewehrung bestimmt. Für reine biegebeanspruchte Rechteckquerschnitte mit bzw. ohne Druckbewehrung sind die Lösungen für die Druckzonenhöhe und Randspannungen in Abbildung 3.7 angegeben [6], [23].

#### Rechteckquerschnitt mit Druckbewehrung



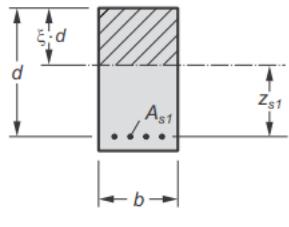
$$\xi = -\alpha_s (\rho_{s1} + \rho_{s2}) + \sqrt{\alpha_s^2 (\rho_{s1} + \rho_{s2})^2 + 2\alpha_s (\rho_{s1} + \rho_{s2} \frac{d_2}{d})}$$

$$\sigma_{c2} = -\frac{M_{Ed}}{bd^2 \left[ \frac{\xi}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) + \alpha_s \rho_{s2} \left( 1 - \frac{d_2}{d} \right) \left( 1 - \frac{d_2}{d} \frac{1}{\xi} \right) \right]}$$

$$\sigma_{s1} = -\sigma_{c2} \alpha_s \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)$$

mit  $\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot d}$ ,  $\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot d}$ ,  $\alpha_s = \frac{E_s}{E_c}$

#### Einfach bewehrter Rechteckquerschnitt



$$\xi = -\alpha_s \rho_{s1} + \sqrt{(\alpha_s \rho_{s1})^2 + 2\alpha_s \rho_{s1}}$$

$$\sigma_{c2} = -\frac{M_{Ed}}{bd^2 \frac{\xi}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right)}$$

$$\sigma_{s1} = -\sigma_{c2} \alpha_s \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right)$$

Abbildung 3.7: Druckzonenhöhe und Spannungen im reinen Zustand II (ohne Normalkraft) bei linear-elastischem Materialverhalten von Bewehrung und Beton [6]

Das Trägheitsmoment kann bei bekannter Druckzonenhöhe  $x$  alternativ zu Gleichung (3.17) nach den allgemeinen Regeln der Technischen Mechanik ermittelt werden. Bei reiner Biegebeanspruchung entspricht die Dehnungsnulllinie dem mechanischen Schwerpunkt des gerissenen Querschnitts. Das Trägheitsmoment errechnet sich für den einfach bewehrten Rechteckquerschnitt unter Vernachlässigung der Eigenträgheit der Bewehrung zu [6]:

$$I^{II} = \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \alpha_s \cdot A_{s1} \cdot (d - x)^2 \quad (3.18)$$

## Zeitabhängige Verformungen

Die Kriech- und Schwindverformungen, die sich im Laufe der Zeit einstellen, wurden bereits in Kapitel 2.2.5 ausführlich beschrieben. Nachfolgend wird deren rechnerische Erfassung in der Verformungsberechnung erläutert.

- **Kriechen bei ungerissenem Querschnitt**

Im Zustand I kriecht sowohl die Druck- als auch die Zugzone des Querschnitts (Abbildung 3.8). Damit steigt die Dehnung  $\varepsilon_{c\sigma}$  in unbewehrten Querschnitten infolge einer äußeren Spannung im Laufe der Zeit an. Somit gilt für die Dehnung zum Zeitpunkt  $t$  mit der Kriechzahl  $\varphi = \varphi(t, t_0)$  [6]:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t_0) \cdot (1 + \varphi) \quad (3.19)$$

Analog dazu erhöht sich die Krümmung und damit auch die Verformung zum Zeitpunkt  $t$  um denselben Faktor  $(1 + \varphi)$  [6]:

$$\kappa(t) = \kappa(t_0) \cdot (1 + \varphi) \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow w(t) = \int_0^l \kappa(t_0) \cdot (1 + \varphi) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx = w(t_0) \cdot (1 + \varphi) \quad (3.21)$$

Für die Berechnung der Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t$  kann damit eine effektive Biegesteifigkeit angesetzt werden, welche die Kriechverformungen berücksichtigt. Da für Verformungsberechnungen in der Regel der Sekantenmodul  $E_{cm}$  angesetzt wird, ist für  $E_{c,eff}$  der Bezug auf  $E_{cm}$  sinnvoll. Daher werden vereinfacht die Kriechverformungen nicht auf den Tangentenmodul, sondern auf den Sekantenmodul bezogen [6]:

$$E_{cm} \cdot I^I(t) = \frac{E_{cm} \cdot I^I(t_0)}{(1 + \varphi)} = E_{c,eff} \cdot I^I \quad (3.22)$$

Das Trägheitsmoment des unbewehrten Querschnitts im Zustand I wird durch das Kriechen nicht beeinflusst. Die Kriechverformungen dürfen daher vereinfacht über den effektiven Elastizitätsmodul  $E_{c,eff}$  erfasst werden [6].

In bewehrten Querschnitten wird die Kriechdehnung durch den Betonstahl behindert. Dieser positive Effekt der Bewehrung wird durch das ideelle Trägheitsmoment bereits erfasst. Für das Verhältnis der E-Modulen  $\alpha_{s,eff}$  wird der Quotient aus dem Elastizitätsmodul der Bewehrung und dem **effektiven** Elastizitätsmodul des Betons, welches das Kriechen berücksichtigt, gebildet [6]:

$$\alpha_{s,eff} = \frac{\frac{E_s}{E_{cm}}}{\frac{(1 + \varphi)}{E_{cm}}} = \frac{E_s \cdot (1 + \varphi)}{E_{cm}} = \frac{E_s}{E_{c,eff}} \quad (3.23)$$

- **Kriechen bei gerissenem Querschnitt**

Im Unterschied zum ungerissenen Querschnitt kriecht bei einem gerissenen Querschnitt lediglich die Druckzone. Da die Dehnungsverteilung über den Querschnitt auch im reinen Zustand II unter der Annahme der Bernoulli-Hypothese eben bleiben muss, liegt die Dehnungsnulllinie infolge Kriechdehnungen näher an der Bewehrung (Abbildung 3.8). Dadurch vergrößert sich die Druckzone, wobei das Integral der Druckspannungen (entspricht der Betondruckkraft) konstant bleibt. Die Ordinate der Betondruckspannung nimmt entsprechend ab. Da der innere Hebelarm dadurch verkleinert wird, wachsen die Stahlspannungen aus Gleichgewichtsgründen an.

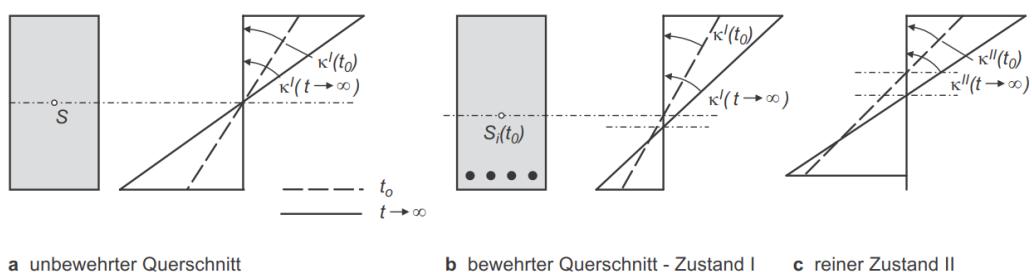


Abbildung 3.8: Kriechauswirkungen auf die Querschnittsverkrümmung [6]

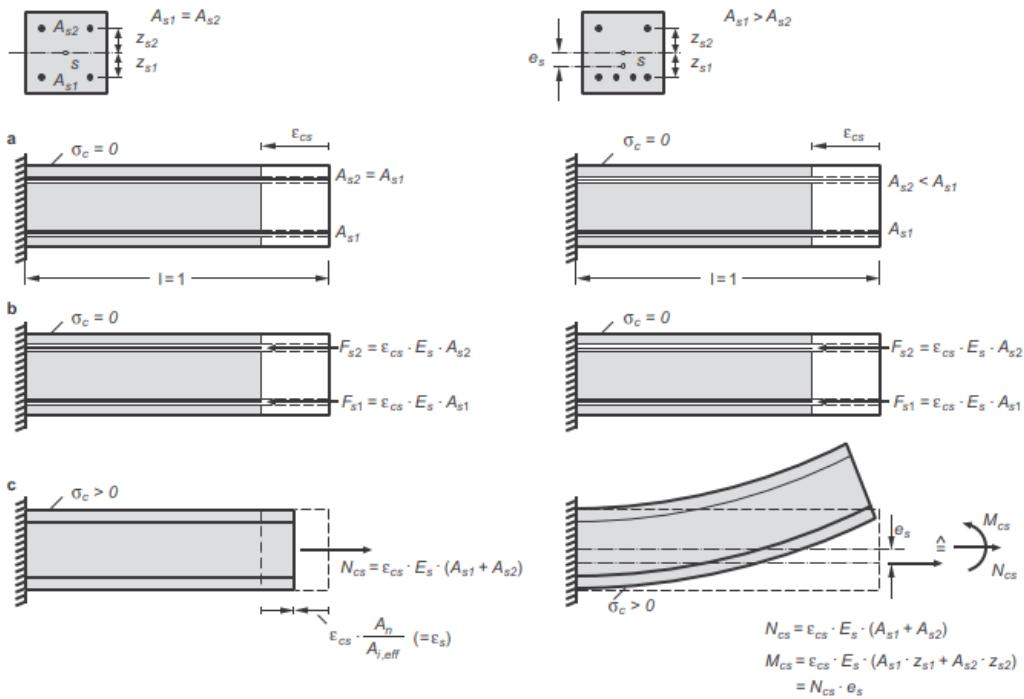
Die Auswirkungen des Kriechens können bei gerissenen Querschnitten näherungsweise durch  $E_{c,eff}$  erfasst werden. Zur Ermittlung der Spannungen und der Druckzonenhöhe im reinen Zustand II (Abbildung 3.7) wird dann das Verhältnis  $\alpha_{s,eff}$  gebildet [6].

- **Schwinden bei ungerissenem Querschnitt**

Die Schwindverformungen sind im Gegensatz zu den Kriechverformungen beanspruchungsunabhängig. Es wird vorausgesetzt, dass die Schwinddehnungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind [6].

Durch die Bewehrungsanordnung werden die Schwindverformungen behindert und im Querschnitt entsteht ein Eigenspannungszustand (Abbildung 3.9). Die behinderte Schwinddehnung wirkt dabei als fiktive Normalkraft  $N_{cs}$  im Bewehrungsschwerpunkt auf den Verbundquerschnitt. Falls der Bewehrungsschwerpunkt nicht mit dem Schwerpunkt des Verbundquerschnitts identisch ist, wird infolge der Exzentrizität der Normalkraft zum Schwerpunkt des ideellen Querschnitts ein Moment  $M_{cs}$  und damit neben einer Verkürzung zusätzlich eine Querschnittsverkrümmung erzeugt [6].

Eine detaillierte Beschreibung des Modells aus Abbildung 3.9 ist in [6] zu finden.



- a Beton und Bewehrung sind nicht verbunden  $\rightarrow$  freie Schwindverformung
- b Der Bewehrung wird die Verformung  $\epsilon_{cs}$  aufgezwungen  $\rightarrow F_{s1}, F_{s2}$
- c Verbund zwischen Bewehrung und Beton  $\rightarrow N_{cs}$  wirkt im Bewehrungsschwerpunkt auf den Verbundquerschnitt

Abbildung 3.9: Auswirkungen des Schwindens [6]

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf von Kriechen und Schwinden affin ist, gilt mit  $z_s$  als Abstand zwischen dem Bewehrungsschwerpunkt und dem Schwerpunkt des idealen Querschnitts [6]:

$$N_{cs} = \epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \quad (3.24)$$

$$M_{cs} = N_{cs} \cdot z_s = \epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot z_s \quad (3.25)$$

$$\kappa_{cs} = \frac{M_{cs}}{E_{cm} \cdot I^I(t)} = \frac{M_{cs}}{E_{c,eff} \cdot I^I} = \frac{\epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot z_s}{E_{c,eff} \cdot I^I} = \epsilon_{cs} \cdot \alpha_{s,eff} \cdot \frac{S^I}{I^I} \quad (3.26)$$

Hierbei ist:

$S^I = A_s \cdot z_s$  das statische Moment des Bewehrungsquerschnitts im Zustand I.

- **Schwinden bei gerissenem Querschnitt**

Im gerissenen Querschnitt schwindet lediglich die Druckzone. Näherungsweise kann auch im reinen Zustand II die Gleichung (3.26) für die Ermittlung der Querschnittsverkrümmung herangezogen werden, indem die entsprechenden Querschnittswerte des gerissenen Zustandes eingesetzt werden ( $I^{II}$  und  $S^{II}$ ) [6].

### 3.2.3 Numerische Verformungsberechnung durch Integration der Momenten-Krümmungs-Beziehung

#### Momenten-Krümmungs-Beziehung analog zum Zugstab (Zugstab-Analogie)

Da die Durchbiegung eines Bauteils durch zweimalige Integration der Krümmung entlang der Bauteillänge ermittelt wird, ist der Zusammenhang zwischen dem einwirkendem Moment und der resultierenden Querschnittsverkrümmung von zentraler Bedeutung [6].

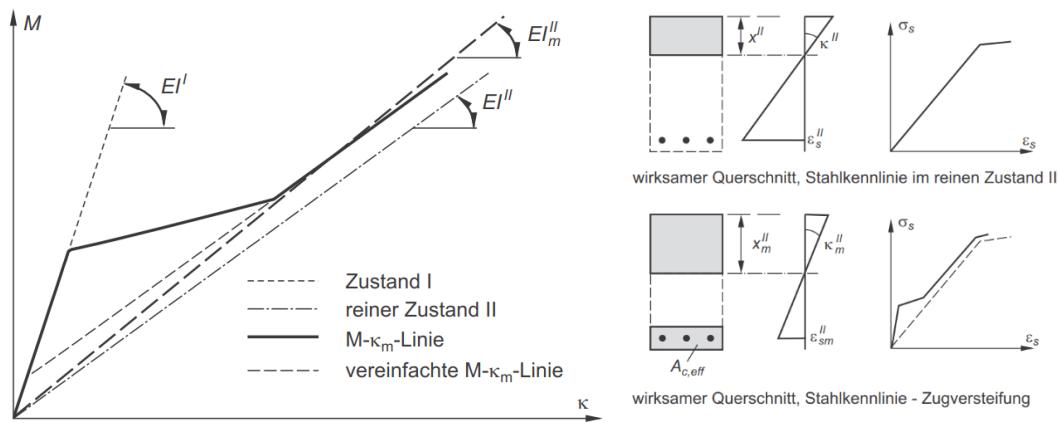


Abbildung 3.10:  $M-\kappa$ -Linien und wirksame Querschnitte [6]

Die „genaueste“ Methode zur Berechnung der Verformung besteht darin, die Krümmungen an möglichst vielen Stellen des Bauteils zu berechnen und anschließend durch numerische Integration die Durchbiegung zu bestimmen [6], [37].

Ist die mittlere Betonstahldehnung  $\varepsilon_{sm}^{II}$  bekannt, so kann die mittlere Krümmung  $\kappa_m^{II}$  direkt aus der Dehnungsebene bestimmt werden [6]:

$$\kappa_m^{II} = \frac{\varepsilon_{sm}^{II}}{d - x_m^{II}} \quad (3.27)$$

Wird der Zuggurt als zentrisch beanspruchter Zugstab mit der Querschnittsfläche  $A_{c,eff}$  idealisiert (siehe Abbildung 3.11), kann die Momenten-Krümmungs-Beziehung mithilfe der wirksamen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Zugstabes aus Abbildung 2.38 bestimmt werden. Damit kann die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen bzw. die daraus resultierende mittlere Betonstahldehnung analog zum Zugstab berücksichtigt werden.

Für das Tragverhalten des Zugstabes (siehe Kapitel 2.4.1) wurde allerdings eine gleichmäßige Zugspannungsverteilung über den Querschnitt angenommen. Diese Annahme trifft bei Bauteilen, die größere Querschnittsabmessungen aufweisen und deren Bewehrung an den Rändern konzentriert ist, nur bedingt zu [6].

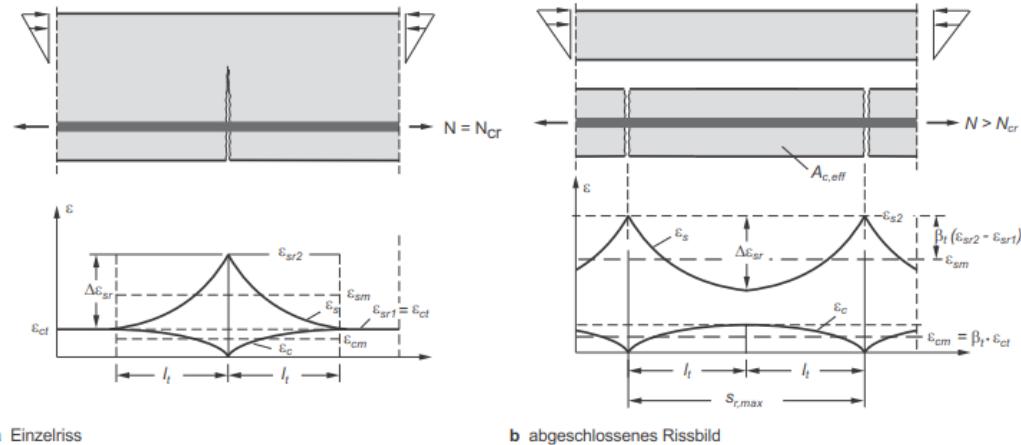


Abbildung 3.11: Zuggurt idealisiert als zentrisch beanspruchter Zugstab mit der wirksamen Querschnittsfläche  $A_{c,eff}$  [6]

Nach der Erstrissbildung (Primärrissbildung) reicht oftmals eine kleinere als die unter Zustand I ermittelte Risskraft aus, um weitere Risse (Sekundärrisse) zu erzeugen. Die Sekundärrisse dringen nicht tief in das Bauteilinnere hinein und entstehen, wenn die durch den Verbund eingeleiteten Zugspannungen – die einen nichtlinearen Verlauf aufweisen und sich ausgehend vom Rissfufer ausbreiten – lokal die Betonzugfestigkeit überschreiten (Abbildung 3.12). Die erforderliche Zugkraft zur Bildung der Sekundärrisse wird dabei durch die effektive Querschnittsfläche  $A_{c,eff}$  rechnerisch erfasst [6], [8].

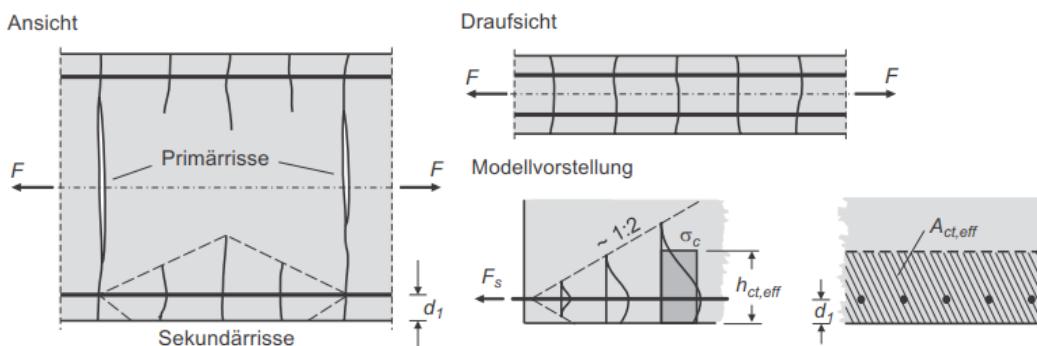


Abbildung 3.12: Effektive Zugfläche

Die effektive Querschnittsfläche bzw. der Wirkungsbereich der Bewehrung  $A_{c,eff}$  kann bei biegebeanspruchten Bauteilen wie folgt bestimmt werden [6], [19]:

$$A_{c,eff} = b \cdot h_{c,eff} \quad (3.28)$$

$$h_{c,eff} = \min \begin{cases} 2,5 \cdot (h - d) \\ \frac{h - x^I}{2} \\ \frac{h - x^{II}}{3} \end{cases} \quad (3.29)$$

Hierbei ist:

$b$  die Breite der Zugzone,

$h_{c,eff}$  die effektive Höhe der Zugzone,

$h$  die Querschnittshöhe,

$d$  die statische Höhe,

$x^I$  die Druckzonenhöhe im Zustand I,

$x^{II}$  die Druckzonenhöhe im reinen Zustand II.

Eine ausführliche Erläuterung des Hintergrundes zu Gleichung (3.29) sowie zur effektiven Zugfläche  $A_{c,eff}$  ist in [6] zu finden.

Da im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit keine plastischen Dehnungen vorliegen, entfällt der vierte Bereich (Fließen der Bewehrung) und die Momente-Krümmungs-Beziehung kann damit in drei Bereiche (Zustand I, Rissbildung und abgeschlossenes Rissbild) unterteilt werden [6].

Die mittlere Krümmung  $\kappa_m^{II}$  des einfach bewehrten Querschnitts kann bei reiner Biegebeanspruchung (unter Vernachlässigung der zeitabhängigen Effekte) in den folgenden Schritten ermittelt werden [6]:

1. Berechnung der Betonstahlspannung und –dehnung im reinen Zustand II mit:

$$\sigma_s = \frac{M}{z^{II} \cdot A_s} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (3.31)$$

2. Berechnung der mittleren Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  nach den Gleichungen (2.100) bis (2.102) unter Beachtung der Sekundärrissbildung. Die kleinere Spannung, die sich aus der Kraft für die Erstrissbildung  $F_{cr,I}$  und für die Sekundärrissbildung  $F_{cr,s}$  ergibt, ist maßgebend. Für die Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  gilt somit:

$$\sigma_{sr} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{W \cdot f_{ctm}}{z_{II} \cdot A_s} = \frac{M_{cr}}{z_{II} \cdot A_s} = \frac{F_{cr,I}}{A_s} \\ \frac{f_{ctm} \cdot (A_s \cdot \alpha_e + (A_{c,eff} - A_s))}{A_s} = \frac{F_{cr,s}}{A_s} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Aus der Literatur geht nicht klar hervor, ob die maßgebende Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  aus Gleichung (3.32) bereits für die Rissbildungsphase einzusetzen ist. Plausibel und auf der sicheren Seite liegend ist es jedoch, die maßgebende Spannung  $\sigma_{sr}$  und die zugehörige Stahldehnung  $\varepsilon_{sr2}$  schon ab der Rissbildungsphase einzusetzen.

3. Berechnung der größeren (mittleren) Druckzone  $x_m^{II}$  und des größeren (mittleren) Hebelarms  $z_m^{II}$  infolge der Zugversteifung unter Ansatz eines effektiven Elastizitätsmoduls des Betonstahls  $E_{s,eff}$ :

$$x_m^{II} = d \cdot \left( -\alpha_{s,eff} \cdot \rho_{s1} + \sqrt{(\alpha_{s,eff} \cdot \rho_{s1})^2 + 2 \cdot \alpha_{s,eff} \cdot \rho_{s1}} \right) \quad (3.33)$$

$$\alpha_{s,eff} = \frac{E_{s,eff}}{E_{cm}} \Rightarrow E_{s,eff} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_{sm}} \quad (3.34)$$

$$z_m^{II} = d - \frac{x_m^{II}}{3} \quad (3.35)$$

4. Ermittlung der mittleren Dehnung  $\varepsilon_{sm}^{II}$  mit:

$$\varepsilon_{sm}^{II} = \frac{M}{z_m^{II} \cdot A_s \cdot E_{s,eff}} \quad (3.36)$$

5. Ermittlung der mittleren Krümmung  $\kappa_m^{II}$  mit:

$$\kappa_m^{II} = \frac{\varepsilon_{sm}^{II}}{d - x_m^{II}} \quad (3.37)$$

Die wirksame Biegesteifigkeit für den betrachteten Querschnitt errechnet sich dann zu [6]:

$$(E \cdot I)_m^{II} = \frac{M}{\kappa_m^{II}} \quad (3.38)$$

Ist die Querschnittsgeometrie und der Bewehrungsgehalt mit den entsprechenden Abständen konstant über die Bauteillänge, so muss lediglich eine Momenten-Krümmungs-Beziehung bestimmt werden. Andernfalls müssen mehrere erstellt werden, da die  $M-\kappa_m$ -Linie nur für den zugrunde gelegten Querschnitt gilt [6].

Nachdem die Krümmungen  $\kappa_m^{II}$  an einer Vielzahl von Schnitten bestimmt wurden, kann die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle des Bauteils mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte gemäß Gleichung (3.9) berechnet werden [6].

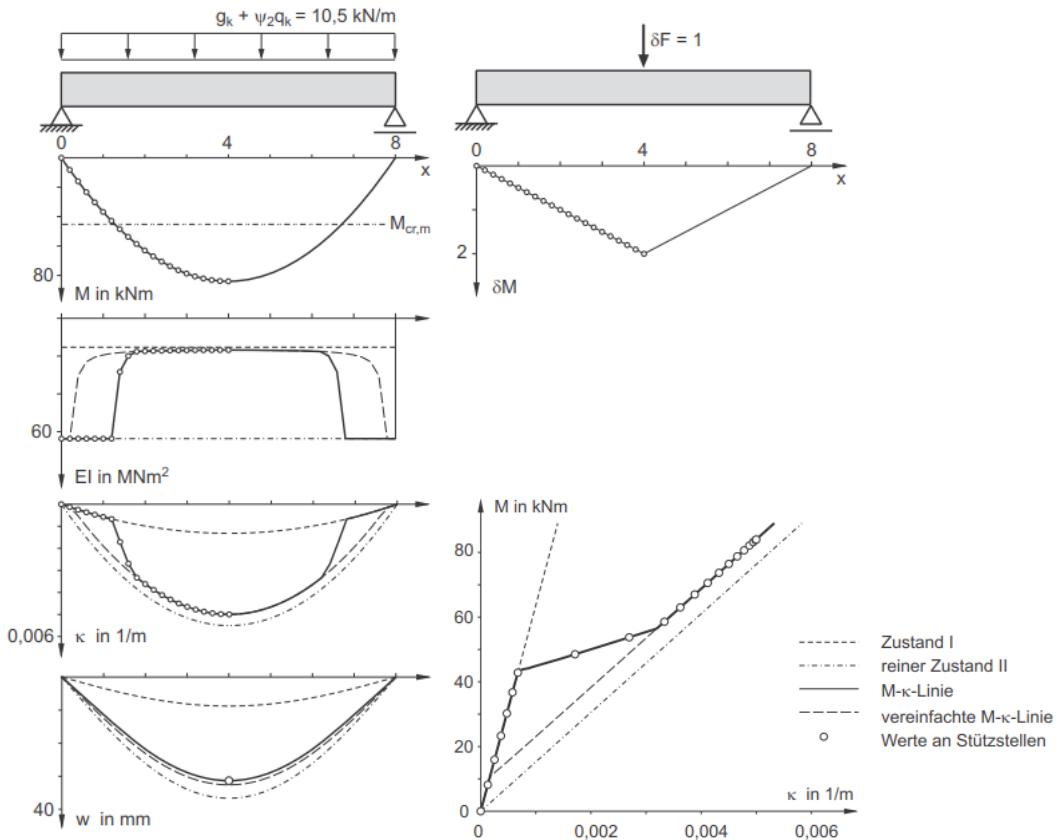


Abbildung 3.13: Verformungsberechnung beim gerissenen Stahlbetonbalken mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte [6]

Für die nummerische Integration der Gleichung (3.9) können die Newton-Cotes-Formeln mit der Trapez- oder Simpsonregel angewendet werden (siehe Abbildung 3.14). Die Genauigkeit der nummerischen Berechnung hängt dabei von der Anzahl der Stützstellen ab [6].

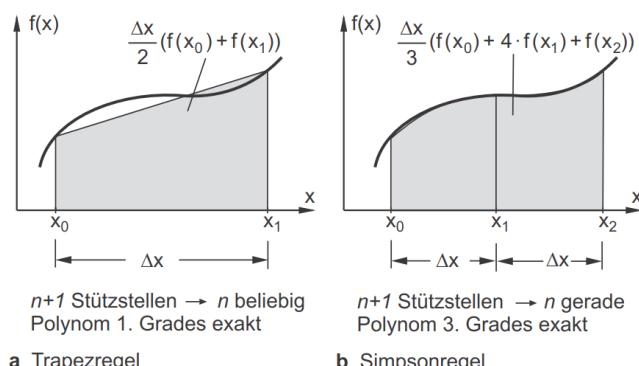


Abbildung 3.14: Newton-Cotes-Formeln für die nummerische Integration [6]

## Vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehung über Verteilungsbeiwerte

Näherungsweise kann die wahrscheinliche Durchbiegung mithilfe eines Verteilungsbeiwertes oder Rissbildungsfaktors  $\zeta$  bestimmt werden. Der Verteilungsbeiwert berücksichtigt, je nach Verfahren, die Ausdehnung des gerissenen Bereichs und die Mitwirkung des Betons auf Zug. Dazu werden zunächst die Grenzwerte der Verformungen (ungerissener und vollständig gerissener Zustand) ermittelt. Im Anschluss wird die wahrscheinliche Verformung mittels des Verteilungsbeiwerts  $\zeta$  interpoliert. Allerdings wird dadurch die im Mittel steifere Druckzone infolge der Zugversteifung nicht berücksichtigt [6].

Zilch [6] erwähnt, dass eine Reihe von Näherungsverfahren diesen Weg zur Interpolation der wahrscheinlichen Durchbiegung zwischen den beiden Grenzwerten nutzen und verweist dabei auf Mayer [39], Grasser/Thielen [40] und Krüger/Mertzsch [41].

Nach DIN EN 1992-1-1 erfolgt die Interpolation zwischen den beiden Grenzwerten nach folgender Gleichung [6], [19]:

$$a = \zeta \cdot a_{II} + (1 - \zeta) \cdot a_I \quad (3.39)$$

Dabei ist:

$a$  der untersuchte Verformungsparameter, der z. B. eine Dehnung oder eine Krümmung sein kann,

$a_I$  die betrachtete Größe im ungerissenen Querschnitt (Zustand I),

$a_{II}$  die betrachtete Größe im gerissenen Querschnitt (reiner Zustand II).

Der Verteilungsbeiwert berücksichtigt dabei die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen und bezeichnet das Verhältnis zwischen der mittleren Stahldehnung und der Stahldehnung im Riss [6].

Demnach können die Gleichungen (2.100) bis (2.102) wie folgt umgeformt werden [6]:

Bereich ①: Ungerissen ( $0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr}$ )

$$\zeta = 0 \quad (3.40)$$

Bereich ②: Rissbildung ( $\sigma_{sr} < \sigma_s \leq 1,3 \cdot \sigma_{sr}$ )

$$\zeta = 1 - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr}) + (1,3 \cdot \sigma_{sr} - \sigma_s)}{0,3 \cdot \sigma_{sr}} \cdot \frac{(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})}{\varepsilon_{s2}} \quad (3.41)$$

Bereich ③: Abgeschlossene Rissbildung ( $1,3 \cdot \sigma_{sr} < \sigma_s \leq f_y$ )

$$\zeta = 1 - \beta_t \cdot \frac{(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})}{\varepsilon_{s2}} \quad (3.42)$$

Wird als Durchbiegungsparameter die Querschnittsverkrümmung gewählt, so müssen für die betrachteten Querschnitte die Krümmung im Zustand I ( $\kappa_I$ ) und im reinen Zustand II ( $\kappa_{II}$ ) sowie mit den entsprechenden Gleichungen der Verteilungsbeiwert  $\zeta$  zur Ermittlung der mittleren Krümmung ( $\kappa_m$ ) bestimmt werden. Bei bekannter  $M-\kappa_m$ -Linie kann dann die Durchbiegung an einer bestimmten Stelle mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte durch numerische Integration bestimmt werden [6].

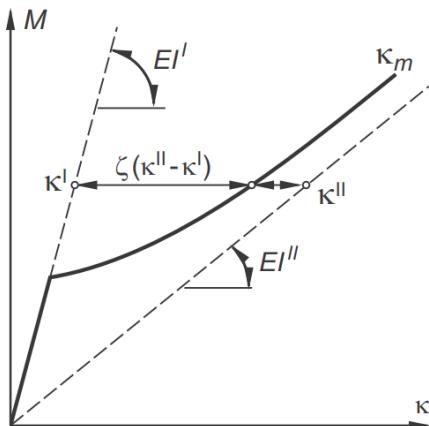


Abbildung 3.15: vereinfachte  $M-\kappa_m$ -Linie durch Interpolation der mittleren Krümmung mit Verteilungsbeiwerten [6]

## Momenten-Krümmungs-Beziehung gemäß DIN EN 1992-1-1

Nach DIN EN 1992-1-1 [19] besteht das „exakte“ Verfahren zur Berechnung der Verformung darin, die Krümmung an einer Vielzahl von Schnitten über die Bau-teillänge nach Gleichung (3.39) zu bestimmen und anschließend die Durchbie-gung mit numerischer Integration zu ermitteln. Wird als Durchbiegungspara-meter die Krümmung angesetzt, so gilt:

$$\kappa_m = \zeta \cdot \kappa_{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa_I \quad (3.43)$$

Die Gleichung (3.39) bzw. (3.43) entspricht dabei der Gleichung (2.108). Die Her-leitung dieser Gleichung wurde bereits in Kapitel 2.4.1 aufgezeigt. Für einen be-anspruchungsabhängigen Völligkeitsbeiwert  $\beta_t$  nach *Rao* [26] ergibt sich ent-sprechend Gleichung (2.109) der Verteilungsbeiwert zu:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

Für ungerissene Querschnitte gilt  $\zeta = 0$  [19].

Das Verhältnis  $\sigma_{sr}/\sigma_s$  in Gleichung (2.109) darf durch das Verhältnis  $M_{cr}/M$  er-setzt werden [19]:

$$\zeta = 1 - \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \quad (3.44)$$

Im Falle, dass das einwirkende Moment  $M$  unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination sich nur wenig vom Rissmoment  $M_{cr}$  unterscheidet oder dieses sogar nicht erreicht, sollte der Verteilungsbeiwert und damit der gerissene Bereich unter der häufigen oder seltenen Einwirkungskombination bestimmt werden [2].

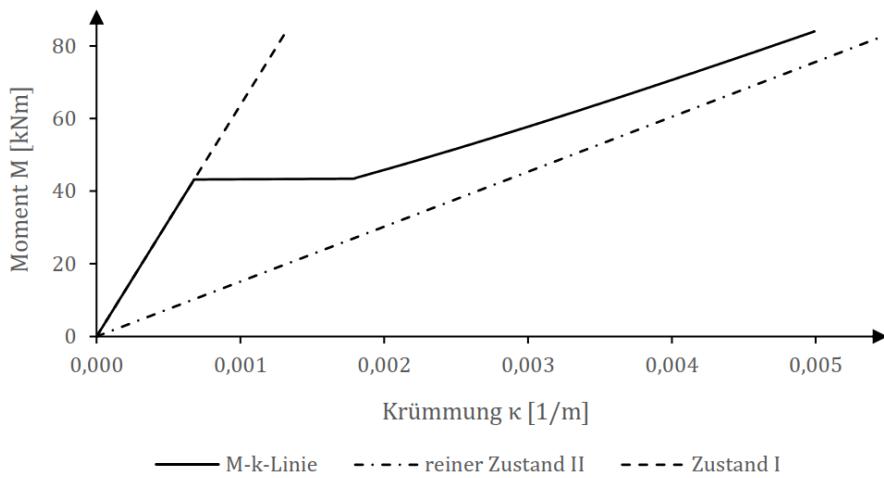


Abbildung 3.16: Momenten-Krümmungs-Beziehung nach DIN EN 1992-1-1

Aus Abbildung 3.16 wird deutlich, dass für die Verformungsberechnung nach DIN EN 1992-1-1 ausschließlich der ungerissene Zustand und der Bereich der abgeschlossenen Rissbildung betrachtet wird.

### Erfassung zeitabhängiger Effekte

Im Rahmen dieses Kapitels wurden die zeitabhängigen Effekte vernachlässigt. Die Kriechverformungen können jedoch, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, über den effektiven Elastizitätsmodul  $E_{c,eff}$  berücksichtigt werden [6]:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{(1 + \varphi)} \quad (3.45)$$

Die mittlere Krümmung infolge Schwinden  $\kappa_{cs,m}$  kann durch die Interpolation nach Gleichung (3.39) bestimmt werden [6]:

$$\kappa_{cs,m} = \zeta \cdot \kappa_{cs}^{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa_{cs}^I \quad (3.46)$$

Hierbei ist:

$\kappa_{cs}^I$  die Krümmung im Zustand I infolge Schwinden gemäß Gleichung (3.26),

$\kappa_{cs}^{II}$  die Krümmung im Zustand II infolge Schwinden gemäß Gleichung (3.26) mit  $I^{II}$  und  $S^{II}$ ,

$\zeta$  der Verteilungsbeiwert.

### 3.2.4 Vereinfachte Durchbiegungsberechnung durch Ansatz von abschnittsweise konstanten Biegesteifigkeiten

Die Berechnung der Verformung mittels numerischer Integration der Krümmung ist sehr aufwändig [42]. Eine näherungsweise Verformungsberechnung kann z. B. unter Ansatz bereichsweise konstanter Biegesteifigkeiten erfolgen. Abbildung 3.17 zeigt, dass die wirksame Biegesteifigkeit zwar beanspruchungsabhängig ist, sich jedoch in weiten Bereichen nur geringfügig verändert [6].

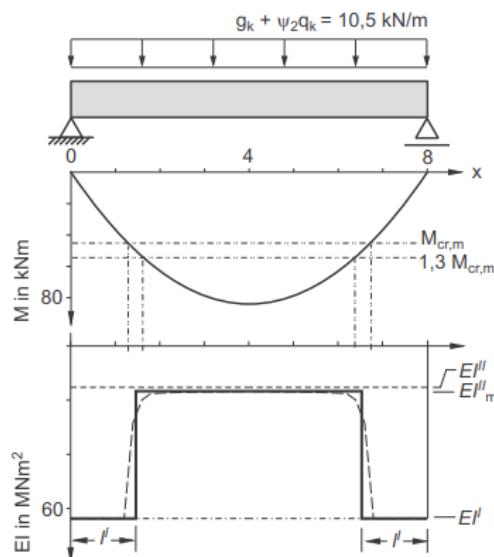


Abbildung 3.17: Näherungsweise Verformungsberechnung mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit [6]

Sinnvoll ist es dabei, das Bauteil in ungerissene und gerissene Bereiche zu unterteilen. Im Übergangsbereich vom ungerissenen Bauteilabschnitt zum abgeschlossenen Rissbild – also zwischen  $M_{cr}$  und  $1,3 \cdot M_{cr}$  – nimmt die Biegesteifigkeit stufenweise ab [6]. Zilch [6] erwähnt, dass Donaubauer [43] zur Erfassung dieses Bereiches vorschlägt, die Abschnittsgrenze im Mittelpunkt zwischen den geometrischen Orten für  $M_{cr}$  und  $1,3 \cdot M_{cr}$  anzunehmen.

Nachdem die Biegesteifigkeit des ungerissenen Bereichs  $EI^I$  und die mittlere Biegesteifigkeit  $EI_m^{II}$  bestimmt wurde, kann die Verformungsberechnung mittels des Prinzips der virtuellen Kräfte oder mithilfe eines Stabwerksprogramms durch die Eingabe der Steifigkeiten an den entsprechenden Stababschnitten erfolgen [2], [6].

Die mittlere Biegesteifigkeit kann dabei direkt über den Verteilungsbeiwert  $\zeta$  entsprechend Gleichung (3.43) bestimmt werden [6]:

$$\kappa_m = \zeta \cdot \kappa_{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa_I$$

mit

$$\kappa_m = \frac{M}{EI_m^{II}}; \kappa_{II} = \frac{M}{EI^{II}}; \kappa_I = \frac{M}{EI^I} \quad (3.47)$$

folgt:

$$\frac{1}{EI_m^{II}} = \zeta \cdot \frac{1}{EI^{II}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{EI^I}$$

$$EI_m^{II} = \frac{1}{\zeta \cdot \frac{1}{EI^{II}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{EI^I}} \quad (3.48)$$

Der Einfluss des Kriechens kann dabei direkt über den effektiven Elastizitätsmodul berücksichtigt werden. Der Einfluss des Schwindens kann berücksichtigt werden, indem die zusätzliche Krümmung infolge Schwinden bereichsweise (für den ungerissenen Bereich  $\kappa_{cs}$  und für den gerissenen Bereich  $\kappa_{cs,m}$ ) angesetzt wird [37].

In [2] wird erwähnt, dass Zilch/Reitmayer [44] die bereits bekannten Integraltafeln erweiterte, um die Berechnung nach dem Prinzip der virtuellen Kräfte unter Berücksichtigung des Steifigkeitssprungs im Bauteil zu vereinfachen.

	Durchbiegung $w_{Feldmitte}$
	$\frac{q l^4}{76,8 EI_m^{II}} - \frac{q l_i^3}{24} \left( 4l - 3l_i \right) \left( \frac{1}{EI_m^{II}} - \frac{1}{EI^I} \right)$
	$\frac{F l^3}{48 EI_m^{II}} - \frac{F l_i^3}{6} \left( \frac{1}{EI_m^{II}} - \frac{1}{EI^I} \right)$
	$\frac{M l^2}{8 EI_m^{II}} - \frac{M l_i^3}{2} \left( \frac{1}{EI_m^{II}} - \frac{1}{EI^I} \right)$

Abbildung 3.18: Durchbiegung für bereichsweise konstante Biegesteifigkeiten nach [44] aus [2]

Der Vorteil der Durchbiegungsberechnung mit Stabwerksprogrammen bei statisch unbestimmten Systemen liegt darin, dass durch die Eingabe abschnittsweiser Biegesteifigkeiten, im Vergleich zu einer Berechnung mit konstanter Biegesteifigkeit, gleichzeitig die Umlagerungen der Schnittgrößen berücksichtigt werden können [2].

### 3.2.5 Vereinfachte Durchbiegungsberechnung mit konstanter Biegesteifigkeit

Eine weitere Vereinfachung zur Berechnung der Verformung besteht darin, die mittlere Krümmung  $\kappa_m$  nur an einem Punkt – in der Regel an der Stelle des maximalen Momentes – zu bestimmen und den Krümmungsverlauf entlang der Bauteillänge affin zur Momentenlinie anzunehmen. Dieses entspricht der Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit entlang der Bauteillänge, wodurch die vorgefertigten Integraltafeln (z. B. aus [45]) angewendet werden können [3], [42].

Ist die gesamte Krümmung  $\kappa_{tot}$  – die sich aus der mittleren Krümmung  $\kappa_m$  infolge der Belastung unter Berücksichtigung des Kriechens und der mittleren Schwindkrümmung  $\kappa_{cs,m}$  ergibt – bekannt, so kann die Durchbiegung  $w_m$  näherungsweise wie folgt berechnet werden [3], [42]:

$$w_m = k \cdot l^2 \cdot \kappa_{tot} \quad (3.49)$$

Hierbei ist:

- $k$  ein Koeffizient zur Beschreibung der Momentenverteilung aus Abbildung 3.19, für andere Momentenverläufe siehe [42] oder [37],
- $l$  die Spannweite des Bauteils.

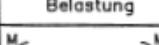
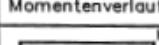
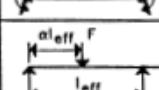
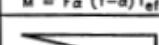
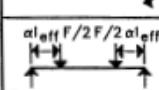
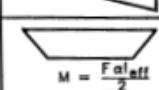
Belastung	Momentenverlauf	Beiwert $K$
		0,125
	 $M = F\alpha (1-\alpha) l_{eff}$	$\frac{3 - 4\alpha^2}{48(1-\alpha)}$ für $\alpha = \frac{1}{2}$ : $K = \frac{1}{12}$
		0,0625
	 $M = \frac{F\alpha_{eff}}{2}$	$0,125 - \frac{\alpha^2}{6}$
		0,104

Abbildung 3.19: Beiwert  $k$  für die vereinfachte Durchbiegungsberechnung [42]

### 3.2.6 Vergleich

Im Folgenden werden die Durchbiegungen, die sich aus den unterschiedlichen Berechnungsverfahren ergeben, miteinander verglichen. Hierzu wird eine Deckenplatte eines Wohnhauses betrachtet, die auf Unterzügen gelagert ist (Abbildung 3.20). Die Berechnung der Durchbiegung erfolgt in der quasiständigen Einwirkungskombination.

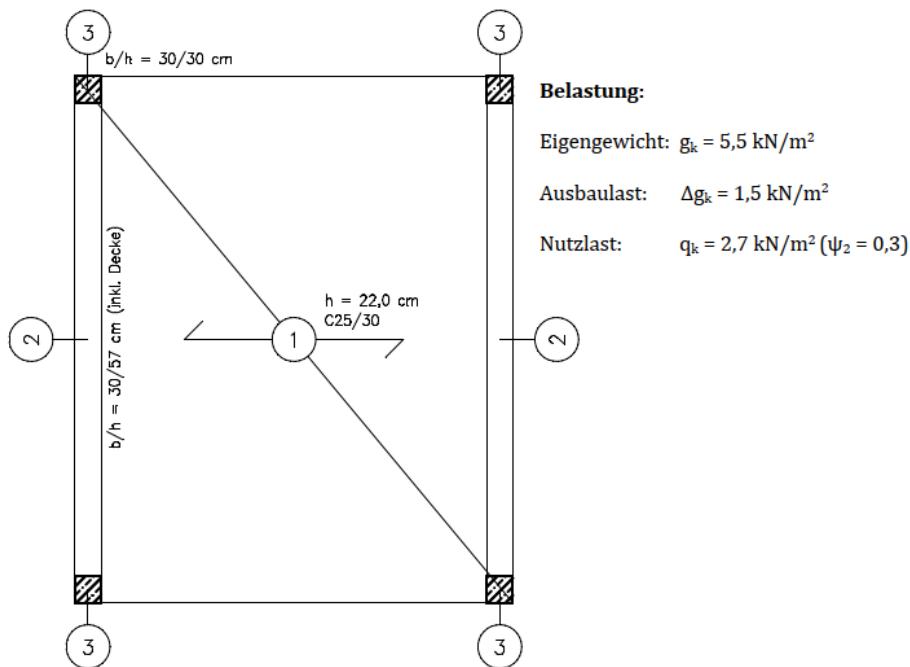


Abbildung 3.20: einachsig gespannte, auf Unterzügen gelagerte Deckenplatte

Zunächst werden die Durchbiegungen der Platte (Pos. 01) verglichen. Dabei werden die Lager – also die Unterzüge – vereinfacht als starr angenommen. Die Platte wird somit als Einfeldträger mit starren Lagern gerechnet. Die Querdehnzahl wird auf Null gesetzt.

Anschließend werden die Verformungen des Unterzuges (Pos. 02) verglichen. Dieser wird vereinfacht als Balken mit konstanter Breite angenommen und ebenfalls als Einfeldträger mit starren Lagern gerechnet.

Es ist ausdrücklich zu erwähnen, dass diese Annahmen lediglich zur Vereinfachung getroffen wurden. Selbstverständlich wird die Plattendurchbiegung von der Unterzugsverformung beeinflusst.

Die Verformungswerte werden mithilfe des Tabellenkalkulationsprogramms Excel ermittelt.

## Vergleich Plattendurchbiegungen

Der Deckenplatte liegen folgende Kennwerte zugrunde:

Plattendicke:  $h = 22,0 \text{ cm}$

Betongüte: C25/30

Elastizitätsmodul:  $E_{cm} = 31.000 \text{ N/mm}^2$

Mittlere Zugfestigkeit:  $f_{ctm} = 2,6 \text{ N/mm}^2$

Längsbewehrung (unten):  $a_{s1,vorh} = \varnothing 12/10 (11,31 \text{ cm}^2/\text{m})$

Abstand zur unteren Lage:  $d_1 = 3,0 \text{ cm}$

Endkriechzahl:  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$

Endschwindmaß:  $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5 \text{ \%}$

Das System und der Querschnitt der Platte sind in Abbildung 3.21 dargestellt. Um den Einfluss einer zunehmenden Belastung auf die Durchbiegung aufzuzeigen, wird die Ausbau- und Nutzlast mit dem Faktor  $\alpha$  multipliziert.

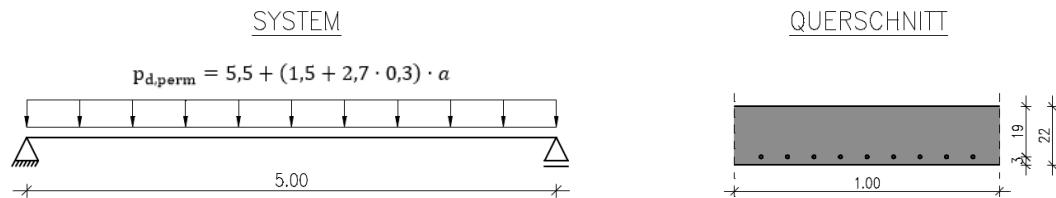


Abbildung 3.21: System, Belastung und Querschnitt der Deckenplatte

In Abbildung 3.22 sind die Verformungen in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$  dargestellt. Die jeweiligen Durchbiegungswerte können dabei aus Tabelle 3.3 und die prozentuale Gegenüberstellung kann aus Tabelle 3.4 entnommen werden. Die Verformungsberechnung, die aus der Zugstab analogie resultiert, wird hierbei als Referenz betrachtet.

Nach allen Berechnungsverfahren verlaufen die Durchbiegungen zunächst linear und deckungsgleich bis zum jenen Faktor  $\alpha$  an, aus der die Belastung resultiert, bei der das Rissmoment erreicht wird. Die Platte verbleibt bis zu diesem Beanspruchungsniveau im Zustand I und verhält sich dementsprechend linear-elastisch.

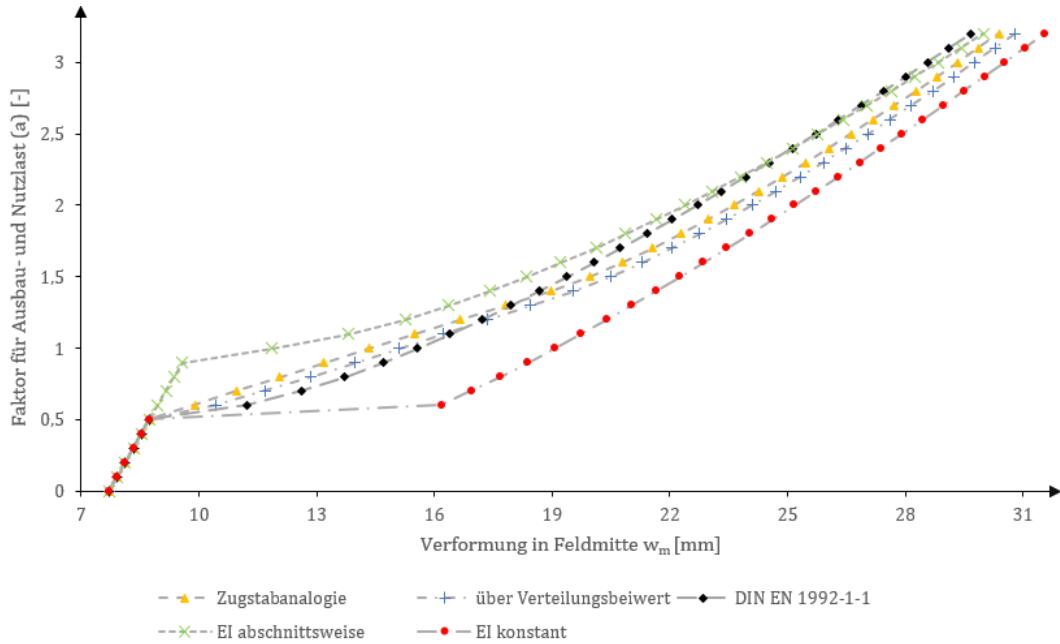


Abbildung 3.22: Vergleich der Plattendurchbiegungen in Feldmitte in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$  für die Ausbau- und Nutzlast mit Berücksichtigung der zeitabhängigen Effekte

Tabelle 3.3: Verformungswerte in Feldmitte der Platte in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$

Faktor $\alpha$ [-]	Zugstabanalogie $w_m$ [mm]	über Verteilungsbeiwert $w_m$ [mm]	DIN EN 1992-1-1 $w_m$ [mm]	EI abschnittsweise $w_m$ [mm]	EI konstant $w_m$ [mm]
0,0	7,71	7,71	7,71	7,71	7,71
0,1	7,92	7,92	7,92	7,92	7,92
0,2	8,12	8,12	8,12	8,12	8,12
0,3	8,33	8,33	8,33	8,33	8,33
0,4	8,54	8,54	8,54	8,54	8,54
0,5	8,74	8,74	8,74	8,74	8,74
0,6	9,89	10,44	11,23	8,95	16,18
0,7	10,96	11,68	12,62	9,16	16,94
0,8	12,06	12,84	13,72	9,36	17,67
0,9	13,19	13,98	14,70	9,57	18,38
1,0	14,32	15,10	15,57	11,86	19,06
1,1	15,48	16,22	16,40	13,82	19,73
1,2	16,65	17,34	17,21	15,25	20,38
1,3	17,81	18,45	17,96	16,37	21,02
1,4	18,97	19,54	18,66	17,40	21,65
1,5	19,95	20,48	19,38	18,35	22,26
1,6	20,79	21,30	20,08	19,22	22,86
1,7	21,56	22,05	20,74	20,12	23,45
1,8	22,28	22,76	21,41	20,87	24,04
1,9	22,97	23,44	22,06	21,65	24,61
2,0	23,63	24,09	22,70	22,39	25,18
2,1	24,26	24,71	23,31	23,09	25,74
2,2	24,87	25,32	23,93	23,79	26,29
2,3	25,47	25,91	24,53	24,48	26,84
2,4	26,05	26,48	25,12	25,14	27,38
2,5	26,62	27,06	25,73	25,76	27,92
2,6	27,18	27,61	26,30	26,41	28,45
2,7	27,73	28,16	26,87	27,02	28,98
2,8	28,28	28,71	27,45	27,66	29,50
2,9	28,81	29,24	28,02	28,24	30,02
3,0	29,34	29,76	28,56	28,85	30,54
3,1	29,86	30,28	29,12	29,42	31,05
3,2	30,38	30,80	29,68	29,99	31,56

**Tabelle 3.4: prozentuale Gegenüberstellung der Verformungswerte in Feldmitte der Platte**

Faktor $a$ [-]	Zugstab analogie $w_m$ [mm]	über Verteilungsbeiwert $w_m$ [mm]	DIN EN 1992-1-1 $w_m$ [mm]	EI abschnittsweise $w_m$ [mm]	EI konstant $w_m$ [mm]
0,0	100%	100%	100%	100%	100%
0,1	100%	100%	100%	100%	100%
0,2	100%	100%	100%	100%	100%
0,3	100%	100%	100%	100%	100%
0,4	100%	100%	100%	100%	100%
0,5	100%	100%	100%	100%	100%
0,6	100%	106%	114%	90%	164%
0,7	100%	107%	115%	84%	155%
0,8	100%	106%	114%	78%	147%
0,9	100%	106%	111%	73%	139%
1,0	100%	105%	109%	83%	133%
1,1	100%	105%	106%	89%	127%
1,2	100%	104%	103%	92%	122%
1,3	100%	104%	101%	92%	118%
1,4	100%	103%	98%	92%	114%
1,5	100%	103%	97%	92%	112%
1,6	100%	102%	97%	92%	110%
1,7	100%	102%	96%	93%	109%
1,8	100%	102%	96%	94%	108%
1,9	100%	102%	96%	94%	107%
2,0	100%	102%	96%	95%	107%
2,1	100%	102%	96%	95%	106%
2,2	100%	102%	96%	96%	106%
2,3	100%	102%	96%	96%	105%
2,4	100%	102%	96%	97%	105%
2,5	100%	102%	97%	97%	105%
2,6	100%	102%	97%	97%	105%
2,7	100%	102%	97%	97%	105%
2,8	100%	102%	97%	98%	104%
2,9	100%	101%	97%	98%	104%
3,0	100%	101%	97%	98%	104%
3,1	100%	101%	98%	99%	104%
3,2	100%	101%	98%	99%	104%

Die Betrachtung der Durchbiegungen, die aus der Zugstab analogie und dem vereinfachten Berechnungsverfahren mittels Verteilungsbeiwerten resultieren, zeigt, dass beide Ansätze einen annähernd identischen Verlauf aufweisen.

Das vereinfachte Verfahren mittels Verteilungsbeiwerten liefert insbesondere im Rissbildungsbereich etwas größere Verformungen. Dies liegt unter anderem daran, dass die höhere Druckzone infolge Zugversteifung vernachlässigt wird. Wird die Verformungsberechnung nach der Zugstab analogie als Referenz betrachtet, zeigt sich, dass das vereinfachte Verfahren mittels Verteilungsbeiwerten gute Ergebnisse liefert. Die prozentuale Gegenüberstellung der Ergebnisse kann dabei aus Tabelle 3.4 entnommen werden.

Die Durchbiegungen gemäß DIN EN 1992-1-1 weichen nicht allzu sehr von den oben genannten Berechnungsverfahren ab. Bis etwa zum Faktor  $a = 1,3$  resultieren aus diesem Verfahren – im Vergleich zum Verfahren nach der Zugstab analogie – etwas größere Verformungen. Ab diesem Faktor sind die Durchbiegungen aus DIN EN 1992-1-1 wiederum kleiner.

Für die vereinfachten Berechnungsverfahren – sowohl mittels konstanter als auch abschnittsweiser Biegesteifigkeiten – wird der Verteilungsbeiwert gemäß DIN EN 1992-1-1 zur Ermittlung der mittleren Krümmung in Feldmitte verwendet.

Im Gegensatz zu den anderen Berechnungsverfahren zeigt die vereinfachte Berechnungsvariante mit abschnittsweise konstanten Biegesteifigkeiten nach Erreichen des Rissmomentes weiterhin einen linearen Verlauf, obwohl der Querschnitt bereits gerissen ist. Dies liegt daran, dass bei diesem Verfahren die Abschnittsgrenze für  $1,15 \cdot M_{cr}$  bestimmt wurde. In diesem Beanspruchungsniveau werden die Verformungen mit dem vereinfachten Verfahren deutlich unterschätzt. Eine mögliche Verbesserung könnte darin bestehen, die Abschnittsgrenze für  $1,0 \cdot M_{cr}$  zu bestimmen. Dieses Verfahren liefert im Vergleich größtenteils – bedingt durch den letztgenannten Grund – deutlich kleinere Verformungen. Erst ab dem Faktor von etwa  $\alpha = 2,0$  sind die Durchbiegungen annähernd identisch mit denen nach DIN EN 1992-1-1.

Die Momenten-Krümmungs-Beziehungen (ohne Berücksichtigung der zeitabhängigen Effekte) sind exemplarisch für eine Belastung mit einem Faktor von  $\alpha = 3,2$  in Abbildung 3.23 dargestellt. Damit können zusätzlich die quasi lastabhängigen Momenten-Krümmungs-Beziehungen der vereinfachten Berechnungsverfahren dargestellt werden. Aus Abbildung 3.24 kann zudem der Verlauf des Momentes, der Krümmung und der Biegesteifigkeit entnommen werden.

Anhand der Momenten-Krümmungs-Beziehung wird deutlich, dass nach dem Zugstabanalgieverfahren und nach dem vereinfachten Verfahren mittels Verteilungsbeiwerten die Rissbildungsphase berücksichtigt wird. Die  $M-\kappa$ -Linie nach dem Verfahren gemäß DIN EN 1992-1-1 ist in diesem Bereich mit einem Sprung gekennzeichnet, der Querschnitt geht mit dem Erreichen des Rissmomentes direkt in die abgeschlossene Rissbildungsphase über.

Insgesamt zeigt sich, dass die Unterschiede mit steigender Belastung kleiner werden. Je größer der gerissene Bereich des Bauteils, desto näher liegen die Verformungswerte an dem Durchbiegungswert, der sich aus dem vereinfachten Verfahren mittels konstanter Biegesteifigkeit über die Bauteillänge ergibt.

Ausgenommen vom vereinfachten Verfahren mittels einer konstanten Biegesteifigkeit, ist für die vorliegende Wohnhausdecke unter den entsprechenden Lasten (siehe Abbildung 3.20) die Verformung nach DIN EN 1992-1-1 im Vergleich zu den anderen Berechnungsverfahren größer.

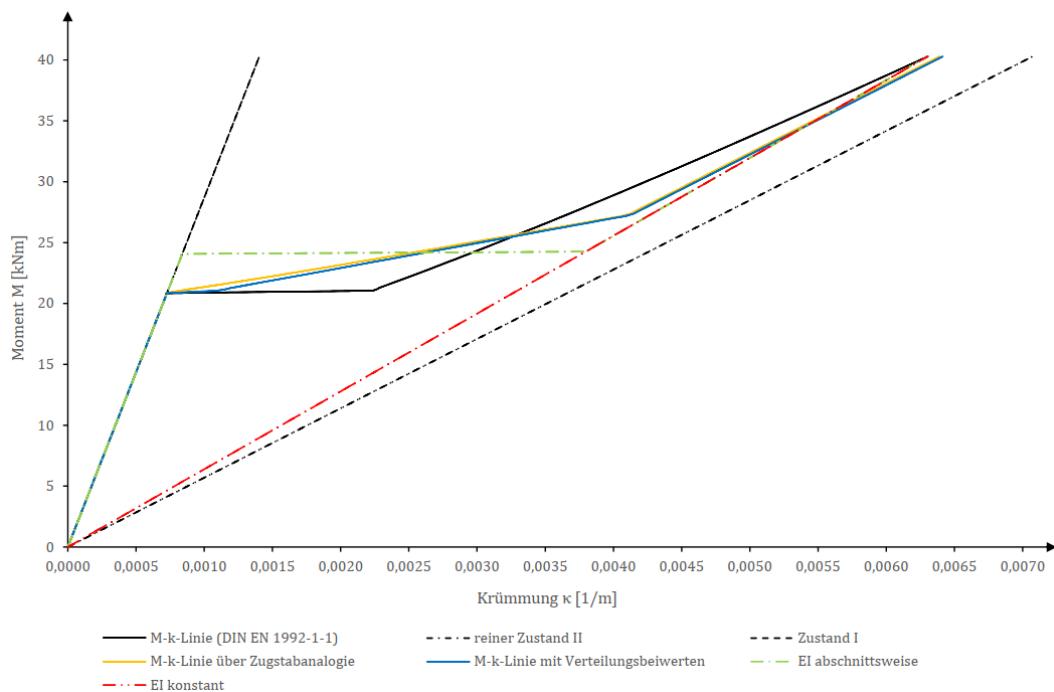


Abbildung 3.23: Vergleich der M- $\kappa$ -Linien (Faktor  $\alpha = 3,2$ )

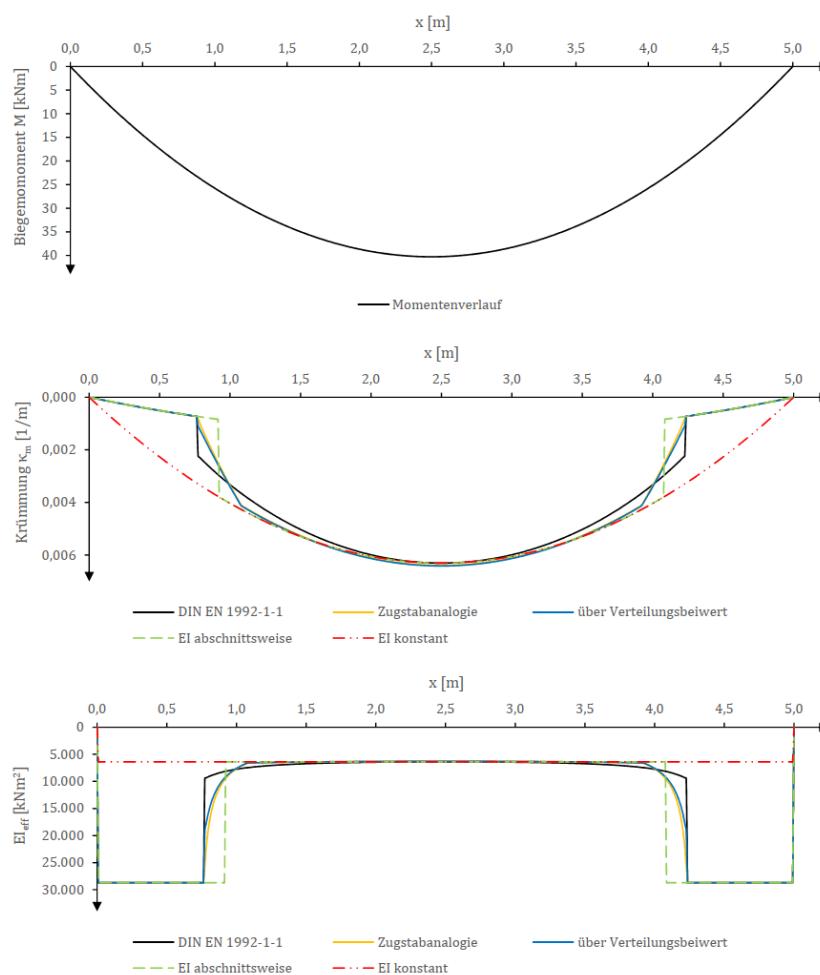


Abbildung 3.24: Momentenverlauf und Vergleich des Krümmungs- und Biegesteigkeitsverlaufs ohne Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden (Faktor  $\alpha = 3,2$ )

## Vergleich Balkendurchbiegungen

Dem Balken liegen folgende Kennwerte zugrunde:

Abmessungen:  $b/h = 30/57 \text{ cm}$  (inkl. Decke)

Betongüte: C25/30

Elastizitätsmodul:  $E_{cm} = 31.000 \text{ N/mm}^2$

Mittlere Zugfestigkeit:  $f_{ctm} = 2,6 \text{ N/mm}^2$

Längsbewehrung (unten):  $A_{s1,vorh} = 2 \times 3 \varnothing 20 \text{ (18,85 cm}^2\text{)}$

Abstand zur unteren Lage:  $d_1 = 6,0 \text{ cm}$

Endkriechzahl:  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$

Endschwindmaß:  $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5 \text{ \%}$

Das System und der Querschnitt des Balkens sind in Abbildung 3.25 dargestellt. Die Belastung setzt sich dabei aus dem Eigengewicht des Balkens und der Auflagerkraft der Deckenplatte zusammen. Die Verformung kann damit analog zur Deckenplatte in Abhängigkeit des Faktors  $a$  dargestellt werden (siehe Abbildung 3.26).

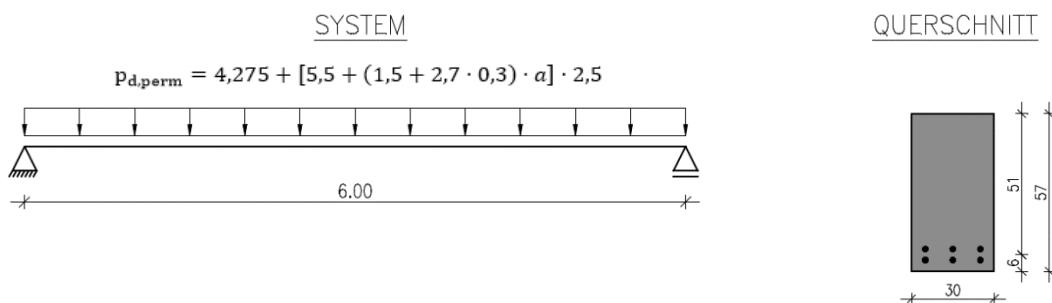
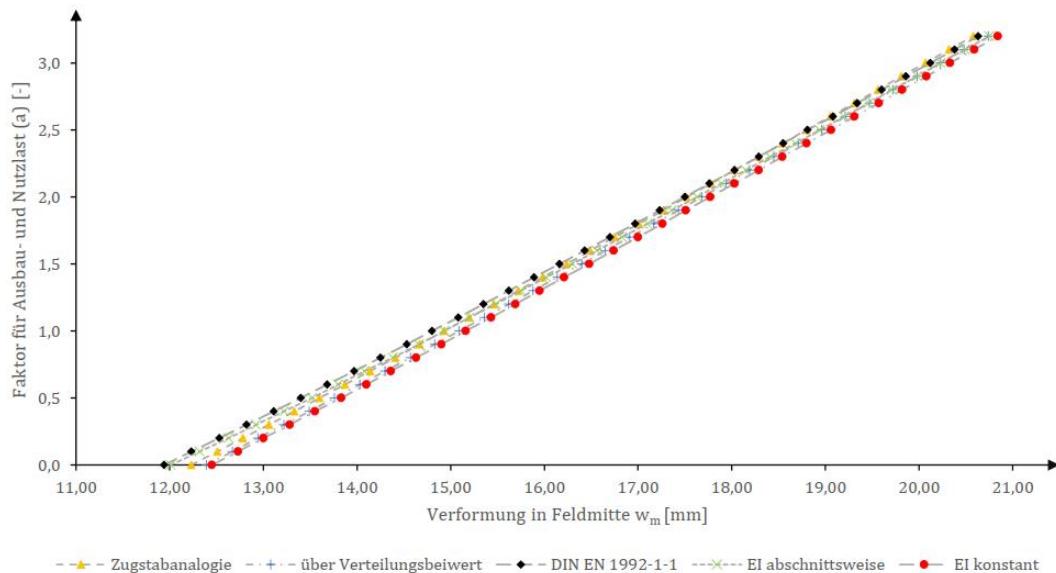


Abbildung 3.25: System, Belastung und Querschnitt des Balkens/Unterzugs

Die jeweiligen Durchbiegungswerte können dabei aus Tabelle 3.5 und die prozentuale Gegenüberstellung kann aus Tabelle 3.6 entnommen werden. Die Verformungsberechnung, die aus der Zugstabanalgie resultiert, wird hierbei wieder als Referenz betrachtet.



**Abbildung 3.26: Vergleich der Balkendurchbiegungen in Feldmitte in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$  für die Ausbau- und Nutzlast mit Berücksichtigung der zeitabhängigen Effekte**

**Tabelle 3.5: Verformungswerte des Balkens in Feldmitte in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$**

Faktor $\alpha$ [-]	Zugstabanalogie $w_m$ [mm]	über Verteilungsbeiwert $w_m$ [mm]	DIN EN 1992-1-1 $w_m$ [mm]	EI abschnittsweise $w_m$ [mm]	EI konstant $w_m$ [mm]
0,0	12,23	12,39	11,94	12,01	12,45
0,1	12,51	12,67	12,23	12,32	12,73
0,2	12,78	12,94	12,53	12,63	13,00
0,3	13,06	13,22	12,82	12,92	13,28
0,4	13,33	13,49	13,11	13,22	13,55
0,5	13,60	13,76	13,40	13,52	13,83
0,6	13,87	14,03	13,68	13,80	14,10
0,7	14,14	14,30	13,97	14,08	14,36
0,8	14,41	14,57	14,25	14,38	14,63
0,9	14,67	14,83	14,53	14,66	14,90
1,0	14,93	15,09	14,80	14,93	15,16
1,1	15,20	15,36	15,08	15,20	15,43
1,2	15,46	15,62	15,35	15,48	15,69
1,3	15,72	15,88	15,62	15,75	15,95
1,4	15,98	16,14	15,89	16,02	16,21
1,5	16,24	16,40	16,16	16,30	16,48
1,6	16,49	16,65	16,43	16,56	16,74
1,7	16,75	16,91	16,70	16,83	17,00
1,8	17,01	17,17	16,97	17,10	17,26
1,9	17,27	17,43	17,23	17,36	17,51
2,0	17,52	17,68	17,50	17,63	17,77
2,1	17,78	17,94	17,76	17,89	18,03
2,2	18,03	18,19	18,03	18,15	18,29
2,3	18,29	18,45	18,29	18,41	18,54
2,4	18,54	18,71	18,55	18,68	18,80
2,5	18,80	18,96	18,81	18,94	19,06
2,6	19,05	19,21	19,08	19,20	19,31
2,7	19,31	19,47	19,34	19,46	19,57
2,8	19,56	19,72	19,60	19,71	19,82
2,9	19,81	19,98	19,86	19,98	20,08
3,0	20,07	20,23	20,12	20,23	20,33
3,1	20,32	20,48	20,38	20,49	20,59
3,2	20,58	20,74	20,63	20,75	20,84

Tabelle 3.6: prozentuale Gegenüberstellung der Verformungswerte in Feldmitte des Balkens

Faktor $a$ [-]	Zugstabanalogie $w_m$ [mm]	über Verteilungsbeiwert $w_m$ [mm]	DIN EN 1992-1-1 $w_m$ [mm]	EI abschnittsweise $w_m$ [mm]	EI konstant $w_m$ [mm]
0,0	100%	101%	98%	98%	102%
0,1	100%	101%	98%	98%	102%
0,2	100%	101%	98%	99%	102%
0,3	100%	101%	98%	99%	102%
0,4	100%	101%	98%	99%	102%
0,5	100%	101%	99%	99%	102%
0,6	100%	101%	99%	99%	102%
0,7	100%	101%	99%	100%	102%
0,8	100%	101%	99%	100%	102%
0,9	100%	101%	99%	100%	102%
1,0	100%	101%	99%	100%	102%
1,1	100%	101%	99%	100%	102%
1,2	100%	101%	99%	100%	101%
1,3	100%	101%	99%	100%	101%
1,4	100%	101%	99%	100%	101%
1,5	100%	101%	100%	100%	101%
1,6	100%	101%	100%	100%	102%
1,7	100%	101%	100%	100%	101%
1,8	100%	101%	100%	101%	101%
1,9	100%	101%	100%	101%	101%
2,0	100%	101%	100%	101%	101%
2,1	100%	101%	100%	101%	101%
2,2	100%	101%	100%	101%	101%
2,3	100%	101%	100%	101%	101%
2,4	100%	101%	100%	101%	101%
2,5	100%	101%	100%	101%	101%
2,6	100%	101%	100%	101%	101%
2,7	100%	101%	100%	101%	101%
2,8	100%	101%	100%	101%	101%
2,9	100%	101%	100%	101%	101%
3,0	100%	101%	100%	101%	101%
3,1	100%	101%	100%	101%	101%
3,2	100%	101%	100%	101%	101%

Abbildung 3.26 zeigt, dass die Verformungswerte der verschiedenen Verfahren mit steigender Belastung immer weniger voneinander abweichen. Wird der jeweilige Verformungswert aus dem Verfahren nach der Zugstabanalogie als Referenz betrachtet und mit den übrigen Verformungswerten gegenübergestellt, so ist die Abweichung bei allen Berechnungsvarianten sehr gering (vgl. Tabelle 3.6).

Die geringen Unterschiede in den Verformungen zwischen den verschiedenen Berechnungsverfahren sind auf die Belastungshöhe bzw. das Rissbild des Balkens zurückzuführen. Bereits bei einer Belastung mit einem Faktor von  $a = 0$  ist der Balken bzw. Unterzug in weiten Bereichen aufgerissen (vgl. Abbildung 3.28).

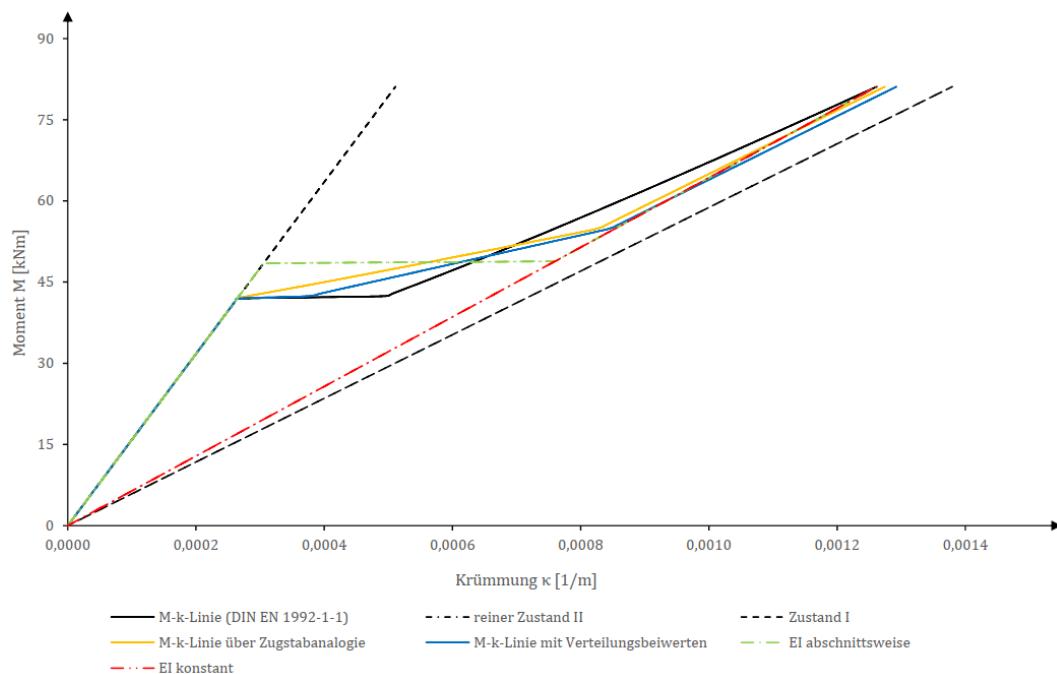


Abbildung 3.27: Vergleich der M- $\kappa$ -Linien (Faktor  $\alpha = 0$ )

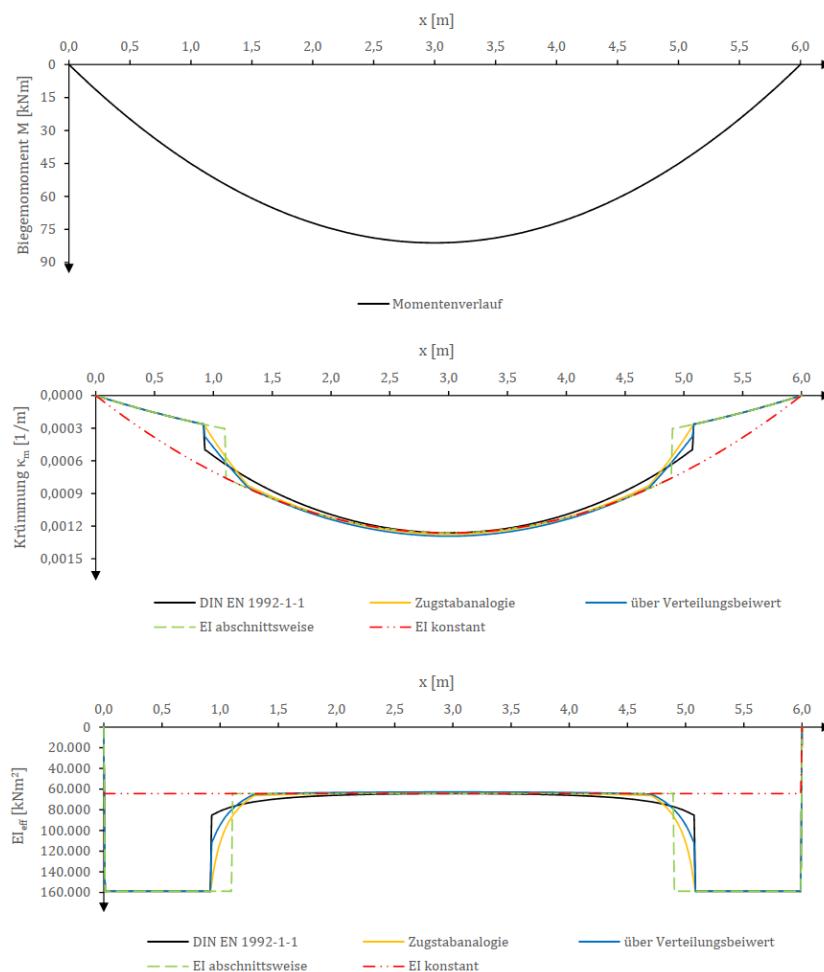


Abbildung 3.28: Momentenverlauf und Vergleich des Krümmungs- und Biegesteifigkeitsverlaufs ohne Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden (Faktor  $\alpha = 0$ )

### Einfluss einer höheren Zugbewehrung im Vergleich zur statisch erforderlichen

Die vorhandene Bewehrung wurde sowohl für die Verformungsauswertung der Deckenplatte als auch für den Balken/Unterzug aus der Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit für den Faktor von  $\alpha = 3,2$  bestimmt. Dies bedeutet, dass der Querschnitt für eine Belastung mit einem Faktor von  $\alpha < 3,2$  eine größere Bewehrung aufweist als die statisch erforderliche Stahlmenge.

Der Einfluss einer erhöhten Bewehrungsmenge auf die Verformung ist in Abbildung 3.29 dargestellt. Darin wurde exemplarisch die Verformung der Deckenplatte in Abhängigkeit des Faktors  $\alpha$  jeweils mit statisch erforderlicher und vorhandener Bewehrung nach dem Verfahren gemäß DIN EN 1992-1-1 bestimmt.

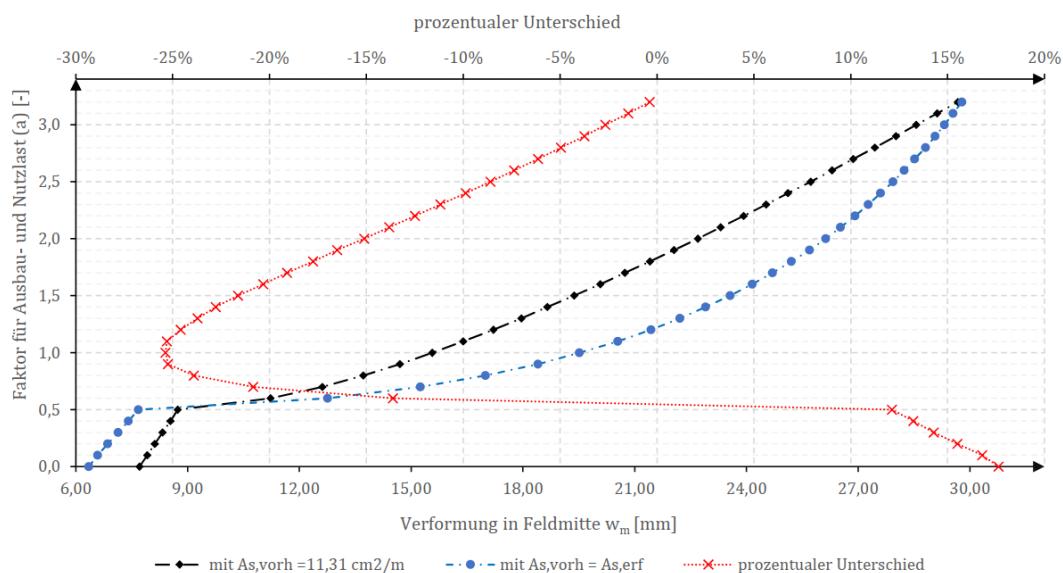


Abbildung 3.29: Einfluss einer höheren Zugbewehrung auf die Verformung der Deckenplatte mit Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden (berechnet nach DIN EN 1992-1-1)

Bemerkenswert ist, dass im ungerissenen Zustand die Verformungen trotz einer höheren Zugbewehrung größer werden. Dies mag zunächst merkwürdig erscheinen, ist jedoch auf das Schwinden zurückzuführen. Eine höhere Bewehrungsmenge hat in diesem Fall zur Folge, dass die Schwinddehnungen im Bewehrungsbereich stärker behindert werden, was insbesondere im Zustand I zu größeren Schwindkrümmungen führt.

Unmittelbar nach dem ersten Riss in der Platte bewirkt die statisch erforderliche Bewehrung im Vergleich zur vorhandenen Bewehrung eine deutlich größere Verformung. Der prozentuale Unterschied und dessen Verlauf sind in Abbildung 3.29 dargestellt.

### 3.3 Nachweis in FE-Softwareprodukten

#### 3.3.1 mb AEC Software

Im Modul Micro-FE der Software mb AEC (Version 2024) wird die Verformungsberechnung im Zustand II gemäß DIN EN 1992-1-1 durchgeführt. Dabei wird für jeden FE-Knoten der Platte die Krümmung im Zustand I und im reinen Zustand II ermittelt. Die Berechnung der mittleren Krümmung  $\kappa_m$  erfolgt dann über die Interpolationsformel gemäß Gleichung (3.43) mit dem Verteilungsbeiwert nach Gleichung (3.44) [46].

Das Kriechen wird mittels des effektiven Elastizitätsmoduls  $E_{c,eff}$  gemäß Gleichung (3.45) berücksichtigt [46].

Die Krümmung infolge Schwinden wird berücksichtigt, indem in jedem FE-Knoten die mittlere Schwindkrümmung  $\kappa_{cs,m}$  entsprechend Gleichung (3.46) berechnet und zur mittleren Krümmung  $\kappa_m$  aus äußerer Belastung addiert wird [46].

Für die Deckenplatte aus Abbildung 3.20 ergibt sich mit Micro-FE eine Verformung in Feldmitte von  $w_m = 15,76 \text{ mm}$  (quasi-ständige Kombination, mit Berücksichtigung zeitabhängiger Effekte, starre Lager). Dieses Ergebnis (siehe Abbildung 3.30) ist mit dem Verformungswert aus Tabelle 3.3 ( $w_m = 15,57 \text{ mm}$ ) für den entsprechenden Faktor von  $a = 1,0$  nahezu identisch. Die minimale Abweichung ist unter anderem auf die unterschiedliche Elementlänge zurückzuführen. Während für die Berechnung der Werte in Tabelle 3.3 eine Elementlänge von 1,0 cm angesetzt wurde, erfolgte die Verformungsberechnung mittels Micro-FE mit einer Elementlänge von 25,0 cm.

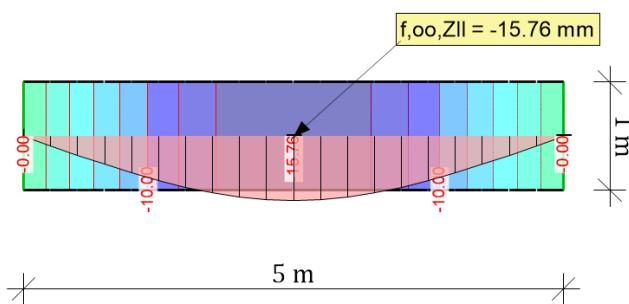


Abbildung 3.30: Verformung in Feldmitte der Deckenplatte aus Abbildung 3.20 (Micro-FE)

Die FE-Berechnung (Elementtyp, Ansatzfunktion, etc.) beeinflusst allgemein das Ergebnis, worauf hier nicht näher eingegangen wird. Näheres dazu kann z. B. aus [47] entnommen werden.

In Micro-FE ist standardmäßig die quasi-ständige Einwirkungskombination für die Verformungsberechnung voreingestellt. Bei Deckenplatten wird oftmals unter dieser Einwirkungskombination das Rissmoment nicht erreicht. Die Platte verbleibt demnach im ungerissenen Zustand, wobei unter der seltenen oder häufigen Kombination durch den höheren Nutzlastanteil das Rissmoment erreicht wird und die Platte in den gerissenen Zustand übergeht [46].

Beim Nachweis der Verformung sollte jedoch beachtet werden, dass ein einmal gerissener Querschnitt auch in dem Fall eine geringere Steifigkeit aufweist, wenn unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination rechnerisch das Rissmoment eigentlich nicht erreicht wird. Daher sollte die Belastungsgeschichte nicht außer Acht gelassen werden. In Micro-FE kann dies mit unterschiedlichen Ansätzen berücksichtigt werden [46]:

- **Variante 1: Verteilungsbeiwert mit einem Mindestwert von  $\zeta = 0,5$  ansetzen**

In [46] wird erwähnt, dass Litzner [48] beim Verformungsnachweis unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination empfiehlt, den Verteilungsbeiwert zur näherungsweise Berücksichtigung der bereits gerissenen Bereiche pauschal mit dem Mindestwert von  $\zeta = 0,5$  anzusetzen.

Mit diesem Ansatz wird für die Bereiche, die eigentlich unter der Belastung im Zustand I verbleiben, eine gewisse Rissbildung unterstellt.

- **Variante 2: Verteilungsbeiwert gemäß [2] aus seltener Kombination ermitteln**

Die Verformungsberechnung erfolgt unter der quasi-ständigen Kombination, wobei für die Ermittlung des Verteilungsbeiwertes  $\zeta$  die Biegemomente unter der seltenen Einwirkungskombination ermittelt werden.

### Vergleich der möglichen Varianten

Mit der in Abbildung 3.31 dargestellten zweiachsig gespannten Platte sollen im Rahmen dieses Abschnittes die Unterschiede zwischen dem Standardfall (Verformungsberechnung unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination) und den Varianten 1 und 2 aufgezeigt werden.

Um den Einfluss der Belastungshöhe bzw. den Nutzlastanteil zu verdeutlichen, wird die Verformung in Abhängigkeit eines Faktors  $b$  für die veränderliche Last dargestellt (siehe Abbildung 3.32).

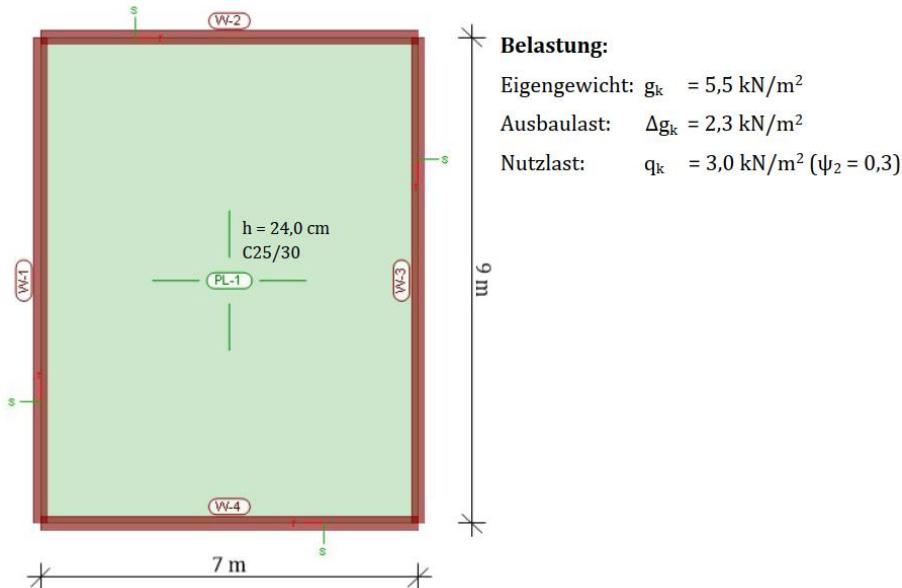


Abbildung 3.31: zweiachsig gespannte Platte

Der Deckenplatte liegen folgende Kennwerte zugrunde:

Plattendicke:  $h = 24,0 \text{ cm}$

Betongüte: C25/30

Elastizitätsmodul:  $E_{cm} = 31.000 \text{ N/mm}^2$

Mittlere Zugfestigkeit:  $f_{ctm} = 2,6 \text{ N/mm}^2$

Längsbewehrung (unten):  $a_{s1,x,vorh} = a_{s1,y,vorh} = \varnothing 12/15 (7,54 \text{ cm}^2/\text{m})$

Längsbewehrung (oben):  $a_{s2,x,vorh} = a_{s2,y,vorh} = \varnothing 10/15 (5,24 \text{ cm}^2/\text{m})$

Bewehrungsabstand:  $d_{1,x/y} = d_{2,x/y} = 3,0 \text{ cm} (\text{vereinfacht})$

Querdehnzahl:  $\mu = 0,2$

Endkriechzahl:  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$

Endschwindmaß:  $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5 \text{ \%}$

Auflager: KS-XL 20 DM ( $d = 24,0 \text{ cm}, h = 2,75 \text{ m}$ )

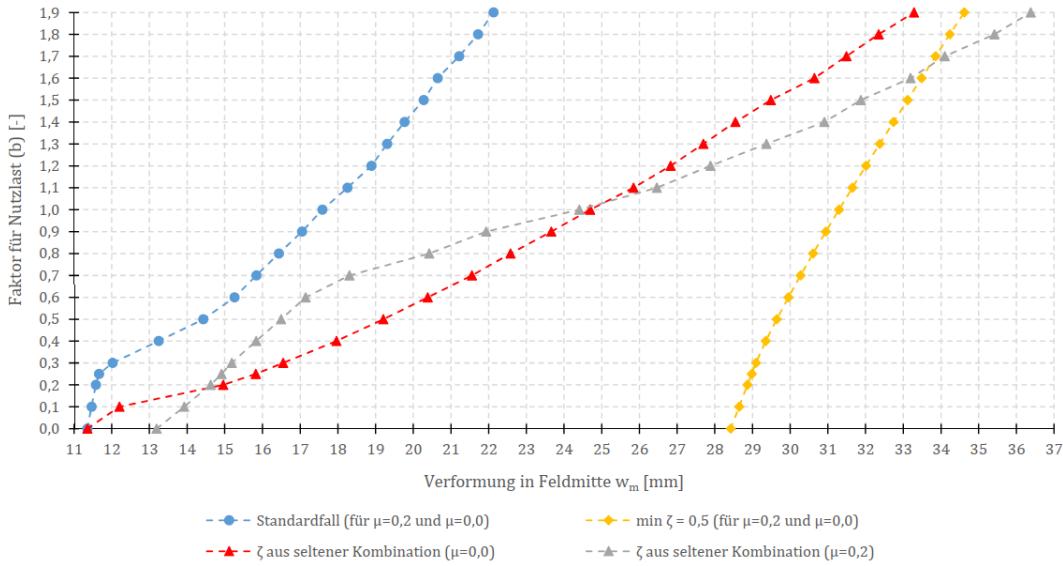


Abbildung 3.32: Vergleich der Verformungen mit den möglichen Varianten

Bemerkenswert ist, dass bei der Verformungsberechnung mit dem Standardfall und mit Variante 1 ( $\zeta_{\min} = 0,5$ ) die Querdehnzahl von Micro-FE automatisch auf Null gesetzt wird, obwohl dies bei der Voreinstellung für die Platte nicht vorgenommen wurde. Die Verformungsberechnung wird also unter der quasi-ständigen Kombination mit den Schnittgrößen für eine Querdehnzahl von  $\mu = 0,0$  durchgeführt.

Bei Variante 2 hingegen erfolgt die Ermittlung des Verteilungsbeiwertes mit den Schnittgrößen unter der seltenen Kombination für die eingegebene Querdehnzahl, während jedoch die Schnittgrößen für die Verformungsberechnung unter der quasi-ständigen Kombination weiterhin mit einer Querdehnzahl von  $\mu = 0,0$  ermittelt werden.

Bei einem Faktor von  $b = 0,0$  wird die Platte ausschließlich durch den ständigen Anteil belastet. Die Schnittgrößen sind demzufolge unter der quasi-ständigen und seltenen Einwirkungskombination identisch. Hinsichtlich der Verformungsgröße dürfte es dabei keine Unterschiede zwischen dem Standardfall und der Variante 2 existieren. Während dies für eine Querdehnzahl von  $\mu = 0,0$  zutrifft, ist es für eine Querdehnzahl von  $\mu = 0,2$  nicht der Fall, da eben für den Standardfall die Querdehnzahl programmintern trotzdem auf Null gesetzt wird.

Diese Herangehensweise erscheint jedoch wenig plausibel und wird in der Literatur nicht behandelt. Die Querdehnzahl hat einen Einfluss auf die Schnittgrößen und somit auch auf die Größe der Verformung. Der Unterschied wird in Abbildung 3.32 deutlich.

Für den eigentlichen Vergleich wird ausschließlich die Verformungsberechnung mit der Querdehnzahl von 0,0 betrachtet.

Bei der Verformungsberechnung mit dem Standardfall wächst die Verformung mit steigendem Anteil der veränderlichen Last bis etwa zum Faktor  $b = 0,25$  linear an. Die Platte verbleibt bis zu diesem Belastungsniveau im ungerissen Zustand. Bei Steigerung des Nutzlastanteils wird das Rissmoment erreicht und die Platte geht bereichsweise in den gerissenen Zustand über (Abbildung 3.33). Mit zunehmender Belastung wird der gerissene Bereich immer größer, die Verformung nimmt nichtlinear zu.

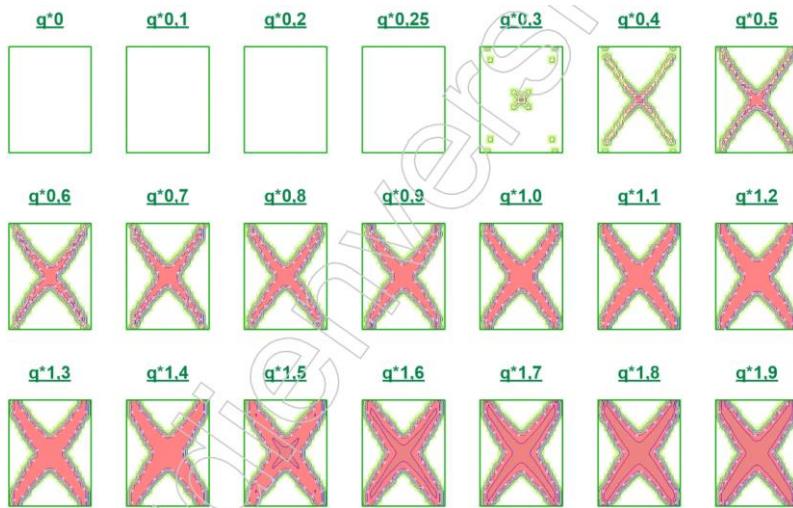


Abbildung 3.33: gerissene Bereiche (x-Richtung) in Abhängigkeit des Nutzlastanteils für den Standardfall

Die Verformungsberechnung unter Ansatz des Mindestwertes von  $\zeta = 0,5$  (Variante 1) hat zur Folge, dass die Platte unabhängig von der Belastungshöhe in jedem Bereich mindestens zur Hälfte als gerissen angesetzt wird (Abbildung 3.34). Die Verformung nimmt dabei mit steigendem Nutzlastanteil nichtlinear zu. Zwischen dieser Variante und dem Standardfall sind große Verformungsunterschiede zu beobachten.

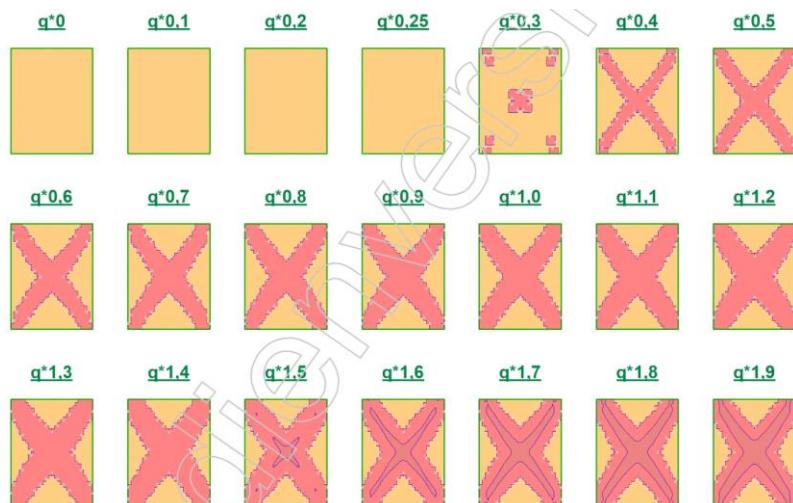


Abbildung 3.34: gerissene Bereiche (x-Richtung) in Abhängigkeit des Nutzlastanteils für Variante 1

Die Bestimmung des gerissenen Bereiches unter der seltenen Kombination führt dazu, dass die Platte im Vergleich zum Standardfall bei einem kleineren Nutzlastanteil aufreißt (Abbildung 3.35). Während der Verformungsunterschied zwischen dieser Variante und dem Standardfall mit zunehmendem Nutzlastanteil größer wird, nähert sich die Verformung mit zunehmendem Nutzlastanteil der Variante 1 an. Ab einem gewissen Belastungsniveau würde sogar die Verformung aus Variante 2 die Verformung aus Variante 1 übersteigen.

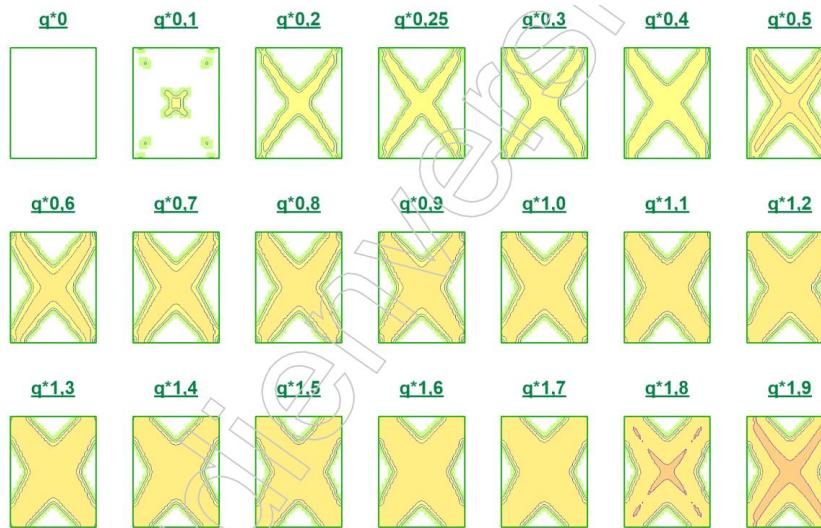


Abbildung 3.35: gerissene Bereiche (x-Richtung) in Abhängigkeit des Nutzlastanteils für Variante 2

Es wird deutlich, dass für den vorliegenden Fall zwischen den möglichen Berechnungsvarianten große Unterschiede existieren und die Festlegung des gerissenen Bereiches einen signifikanten Einfluss auf die Verformung in Feldmitte hat.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass sich alle Berechnungsvarianten mit steigendem Nutzlastanteil dem Verformungswert annähern, der sich für die Platte im nackten Zustand II ( $\zeta = 1,0$ ), ohne Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen, ergeben würde. Dementsprechend würden auch die Verformungsunterschiede zwischen den möglichen Varianten ab einem gewissen (unrealistischen) Belastungsniveau immer kleiner werden.

Für eine Begrenzung der Verformung auf den Wert  $l/500$  wäre der Nachweis mit dem Standardfall bis knapp unter dem Faktor  $b = 0,5$  und mit der Variante 2 bis knapp unter dem Faktor  $b = 0,2$  eingehalten. Bei der Variante 1 wäre der Nachweis bereits ohne einen Nutzlastanteil nicht eingehalten.

Die Verformungsberechnung eines Balkens erfolgt im Durchlaufträgermodul S340.de nach demselben Verfahren. Obwohl dies nicht explizit aus der Literatur hervorgeht, ist dies durch die Anwendung und die Ergebnisse des Programms eindeutig ersichtlich.

### 3.3.2 Dlubal Software

In RFEM 5 wird die Verformungsberechnung mittels des Zusatzmoduls RF-BETON Flächen durchgeführt. Hierzu ist ein analytisches Verfahren nach DIN EN 1992-1-1 und ein physikalisch-nichtlineares Verfahren implementiert, wobei auf letzteres nicht eingegangen wird [49].

Beim analytischen Verfahren wird für jeden FE-Knoten zunächst infolge der einwirkenden Schnittgrößen unter Gebrauchslasten eine effektive Steifigkeit ermittelt, mit denen anschließend die Verformungen mittels einer nochmaligen FE-Berechnung bestimmt werden [50].

Die Berücksichtigung des Kriechens erfolgt direkt über den effektiven Elastizitätsmodul  $E_{c,eff}$  gemäß Gleichung (3.45), während das Schwinden über eine zusätzliche Krümmung beachtet wird [51]. Die formelmäßigen Zusammenhänge für die Verformungsberechnung können direkt aus dem Handbuch [51] entnommen werden.

Der wesentliche Unterschied bei RFEM 5 liegt im Vergleich zum bisher beschriebenen Ablauf zur Verformungsberechnung nach DIN EN 1992-1-1 und damit auch zum Modul Micro-FE der Software mb AEC in der Berücksichtigung der Eigenspannungen infolge Schwindens. Genauer gesagt werden in RFEM 5 für die Festlegung des gerissenen und ungerissenen Bereiches sowie für die Ermittlung des Verteilungsbeiwertes die Spannungen aus den „fiktiven“ Schwindkräften in die Berechnung miteinbezogen.

Der Verteilungsbeiwert berechnet sich für gerissene Bereiche ( $\sigma_{max,\phi} > f_{ctm}$ ) mit [51]:

$$\zeta_\phi = 1 - \beta \cdot \left( \frac{f_{ctm}}{\sigma_{max,\phi}} \right)^2 \quad (3.50)$$

Dabei ist:

$\beta$  der Parameter für die Belastungsdauer,

$f_{ctm}$  die mittlere Betonzugfestigkeit.

Die maximale Betonzugspannung  $\sigma_{\max,\phi}$  unter der Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens berechnet sich mit [51]:

$$\sigma_{\max,\phi} = \frac{n_\phi + n_{sh,\phi}}{A_{\phi,I}} + \frac{m_\phi - n_\phi \cdot \left(x_{\phi,I} - \frac{h}{2}\right) + m_{sh,\phi,I}}{I_{\phi,I}} \cdot (h - x_{\phi,I}) \quad (3.51)$$

Hierbei ist:

$n_\phi$  Normalkraft in Bewehrungsrichtung  $\phi$  (aus Schnittgrößen),

$m_\phi$  Biegemoment in Bewehrungsrichtung  $\phi$  (aus Schnittgrößen),

$n_{sh,\phi}$  „fiktive“ Normalkraft infolge Schwinden gemäß Gleichung (3.24) in Bewehrungsrichtung  $\phi$ ,

$m_{sh,\phi,I}$  „fiktives“ Biegemoment infolge Schwinden gemäß Gleichung (3.25) in Bewehrungsrichtung  $\phi$  bezogen auf den ideellen Schwerpunkt im Zustand I ohne Kriecheinfluss,

$h$  Bauteilhöhe,

$x_{\phi,I}$  Druckzonenhöhe im Zustand I in Bewehrungsrichtung  $\phi$  ohne Einfluss des Kriechens,

$A_{\phi,I}$  Ideelle Querschnittsfläche im Zustand I in Bewehrungsrichtung  $\phi$  ohne Einfluss des Kriechens,

$I_{\phi,I}$  Ideelles Trägheitsmoment im Zustand I in Bewehrungsrichtung  $\phi$  ohne Einfluss des Kriechens,

Gleichung (3.51) zeigt, dass die „fiktiven“ Schwindkräfte und somit die Eigenspannungen bei der Ermittlung der maximalen Betonzugspannungen berücksichtigt werden. Diese blieben in den bisher erläuterten Ansätzen zur Verformungsberechnung unberücksichtigt.

Tatsache ist jedoch, dass unabhängig vom statischen System ein innerer Zwang im Bauteil durch die Behinderung der Betonverformung in der Umgebung der Bewehrung entsteht. Bei statisch bestimmten Systemen erzeugt das Schwinden einen reinen Eigenspannungszustand. Dies führt im Stahl zu einer Druckkraft, die im Gleichgewicht mit der Betonzugkraft steht (vgl. Abbildung 3.9) [6].

Durch die Eigenspannungen kann die aufnehmbare Betonzugfestigkeit und damit der ungerissene Bereich im Bauteil erheblich reduziert werden. Bei ungünstigen Randbedingungen ist es durchaus möglich, dass die Betonzugspannungen bereits beim unbelasteten Querschnitt die Rissbildung einleiten [6].

Der gerissene Bereich entlang der Bauteillänge hat einen entscheidenden Einfluss auf die Größe der Verformungen. Daher erscheint es plausibel, bei der Berechnung der Verformungen die Eigenspannungen im Bauteil infolge des Zwangs zu berücksichtigen.

Das Zusatzmodul RF-BETON Flächen bietet zudem die Option, die Verformungen ohne Berücksichtigung der Zugversteifung zu bestimmen. Für den gerissenen Querschnitt wird dann der Verteilungsbeiwert auf  $\zeta_{\phi} = 1,0$  gesetzt, wodurch die Berechnung auf der sicheren Seite liegt. Auf einen Vergleich der Verformungen mit und ohne Berücksichtigung der Zugversteifung wird an dieser Stelle verzichtet, da die Mitwirkung des Betons in der Regel für eine realistische Verformungsberechnung beachtet werden sollte.

### 3.3.3 Vergleich

Für den Vergleich zwischen der Software mb AEC und Dlubal wird die zweiachsrig gespannte Deckenplatte aus Abbildung 3.31 mit zugehöriger Belastung herangezogen.

Außerdem wird bei beiden Programmen nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie (ohne Berücksichtigung der Schubverformungen) gerechnet. Zudem wird die Querdehnzahl zu Null gesetzt.

In Abbildung 3.36 sind die Verformungen ohne Berücksichtigung der Schwindverformungen in Abhängigkeit des Faktors  $b$  für den Nutzlastanteil dargestellt. Zu erkennen ist, dass die Verformungen aus RFEM 5 bis etwa zum Faktor  $b = 0,7$  linear anwachsen, während die Verformungen aus mb AEC bereits ab einem Faktor von  $b = 0,25$  nichtlinear ansteigen. Der Grund hierfür ist vor allem, dass in Micro-FE das Rissmoment mit Bruttoquerschnittswerten ermittelt wird. Ist die Schnittgröße größer als dieses Rissmoment, geht der Querschnitt in den gerissenen Bereich über. In RFEM 5 reißt der Querschnitt erst auf, wenn die Zugspannung  $\sigma_{\max,\phi}$  gemäß Gleichung (3.51) die mittlere Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  überschreitet. Aus Gleichung (3.51) geht hervor, dass die maximale Betonzugspannung mit ideellen Querschnittswerten (ohne Kriecheinfluss) berechnet wird. Somit wird die Risschnittgröße in RFEM 5 von der Bewehrung beeinflusst, wobei die Bewehrungsmenge in Micro-FE keinen Einfluss auf das Rissmoment hat.

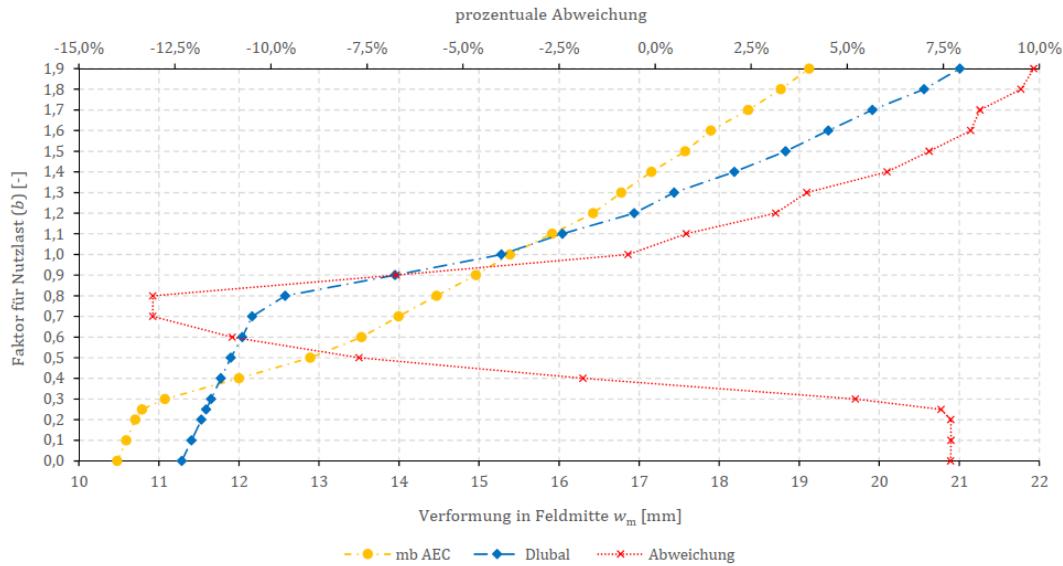


Abbildung 3.36: Vergleich der Verformungen zwischen der Software mb AEC und Dlubal (ohne Schwinden)

Der Grund für die größere Verformung aus RFEM 5 bereits ohne einen Nutzlastanteil ist unter anderem, dass in Micro-FE das Trägheitsmoment im Zustand I mit Berücksichtigung des Kriecheinflusses (Verhältnis der E-Moduln wird größer) berechnet wird. In RFEM 5 ergibt sich die Biegesteifigkeit im Zustand I durch die Multiplikation des effektiven Elastizitätsmoduls und des Trägheitsmoments ohne Kriecheinfluss. Die Biegesteifigkeit mit Berücksichtigung der Kriechverformung ist damit in RFEM 5 im Zustand I kleiner als in Micro-FE. Ohne Berücksichtigung des Kriechens sind die Verformungen aus RFEM 5 kleiner (vgl. Abbildung 3.37).

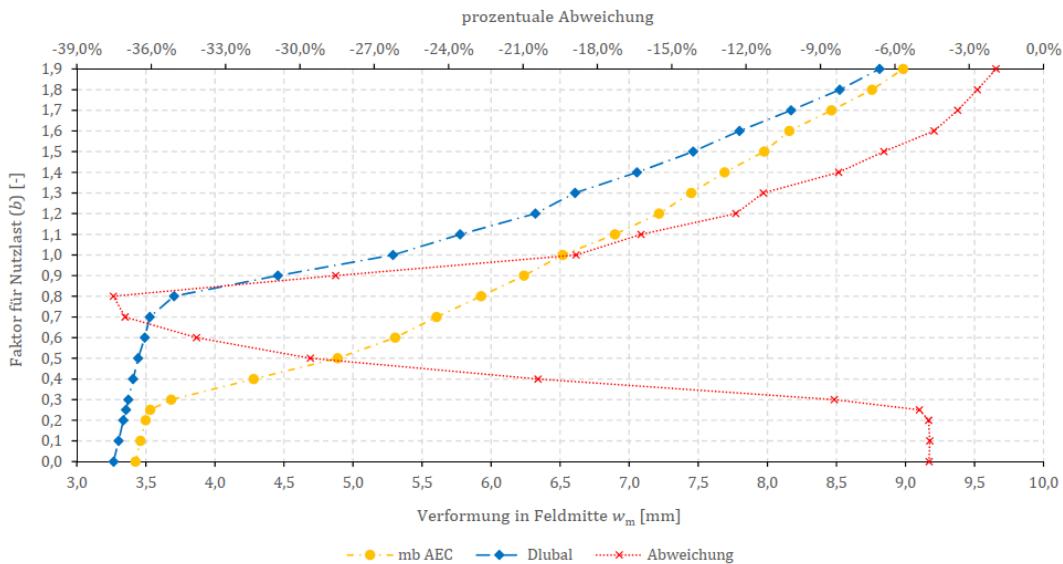


Abbildung 3.37: Vergleich der Verformungen zwischen der Software mb AEC und Dlubal (ohne Schwinden und Kriechen)

Der Unterschied zwischen den Verformungen unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens ist in Abbildung 3.38 dargestellt. Es wird deutlich, dass die Berücksichtigung der Eigenspannungen einen signifikanten Einfluss auf die Verformungen haben. Bereits ohne Nutzlastanteil ist die Platte in RFEM 5 gerissen. Zudem führt die Berücksichtigung der Eigenspannung zu einer geringeren Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen, wodurch der Verteilungsbeiwert bei gerissenen Querschnitten größer wird.

Im Gegensatz dazu verbleibt die Platte in Micro-FE bis zu einem Faktor von  $b = 0,25$  weiterhin im ungerissenen Zustand. Die Auswirkungen des Schwindens werden ausschließlich durch eine zusätzliche mittlere Krümmung berücksichtigt, die mittels des entsprechenden Verteilungsbeiwerts durch Interpolation zwischen der Schwindkrümmung im Zustand I und im Zustand II ermittelt wird. Der Einfluss der Eigenspannungen auf die Rissbildung und auf die Zugversteifung bleibt in Micro-FE demnach unberücksichtigt.

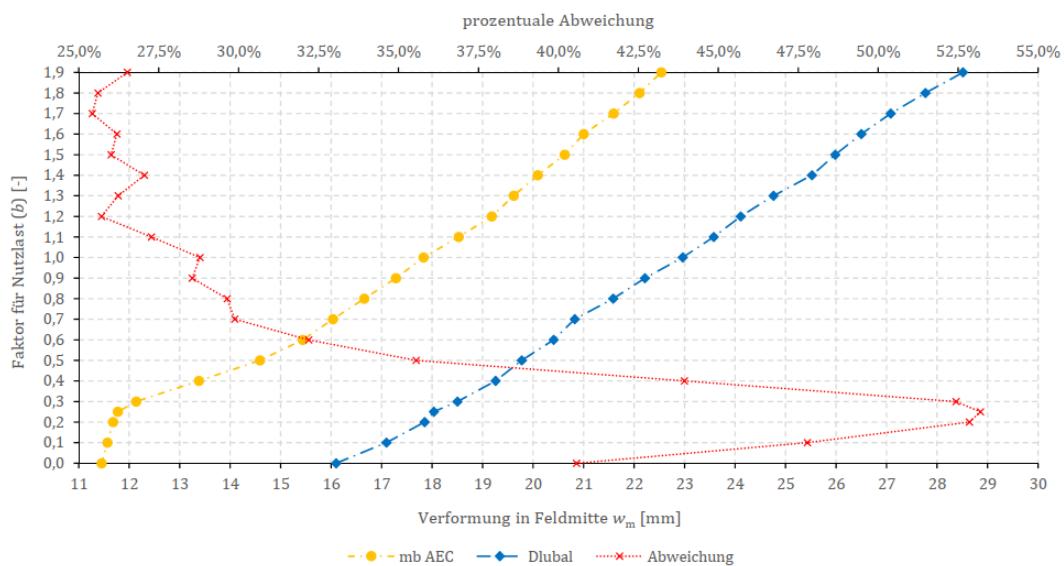


Abbildung 3.38: Vergleich der Verformungen zwischen der Software mb AEC und Dlubal (mit Schwinden und Kriechen)

### 3.4 Vereinfachter Nachweis über Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse

Eine übliche Methode in der Praxis besteht darin, die Verformungen im Endzustand vereinfacht durch eine Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse zu bestimmen, um die Durchbiegungszunahme infolge der Rissbildung und der zeitabhängigen Effekte pauschal zu berücksichtigen. Allerdings sind diese Faktoren in keiner Norm festgelegt, sodass jedes Ingenieurbüro in der Regel mit unterschiedlichen Werten arbeitet [52].

Eine bekannte Herangehensweise in der Praxis ist es, die elastischen Verformungen unter der quasi-ständigen Kombination zu berechnen und anschließend mit dem Faktor von 4,0 zu multiplizieren.

Dieser Ansatz wird im Folgenden sowohl für eine einachsige als auch für eine zweiachsige gespannte Deckenplatte untersucht. Die Verformungen sollen dabei auf den Wert  $l/500$  begrenzt werden. Für unterschiedliche Spannweiten und Plattengeometrien werden die erforderlichen Deckenstärken, die sich mit der Methode der Faktorisierung ergeben, mit denen verglichen, die aus dem Ansatz nach DIN EN 1992-1-1 (Schnittgrößen und Verteilungsbeiwert unter der quasi-ständigen Kombination) resultieren.

Die Deckenstärken werden in 1,0 cm Schritten gewählt, um den Nachweis der Verformungen zu erfüllen. Die Mindestdeckenstärke wird auf 16,0 cm festgelegt.

#### Einachsige gespannte Platte (Einfeldträger)

Es wird mit folgenden Kennwerten gerechnet:

Betongüte: C25/30

Elastizitätsmodul:  $E_{cm} = 31.000 \text{ N/mm}^2$

Mittlere Zugfestigkeit:  $f_{ctm} = 2,6 \text{ N/mm}^2$

Bewehrungsabstand:  $d_{1,x/y} = d_{2,x/y} = 3,0 \text{ cm}$  (vereinfacht)

Querdehnzahl:  $\mu = 0,0$

Endkriechzahl:  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$

Endschwindmaß:  $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5 \text{ \%}$

Die Belastung berechnet sich aus dem Eigengewicht der Deckenplatte  $g_{k,EG}$ , der Ausbaulast von  $\Delta g_k = 1,5 \text{ kN/m}^2$  und der veränderlichen Last von  $q_k = 2,7 \text{ kN/m}^2$ .

Unter der quasi-ständigen Kombination ergibt sich dann mit  $\psi_2 = 0,3$  die folgende Belastung:

$$p_{\text{perm}} = g_{k,\text{EG}} + \Delta g_k + q_k \cdot \psi_2$$

$$p_{\text{perm}} = g_{k,\text{EG}} + 1,5 \text{ kN/m}^2 + 0,3 \cdot 2,7 \text{ kN/m}^2$$

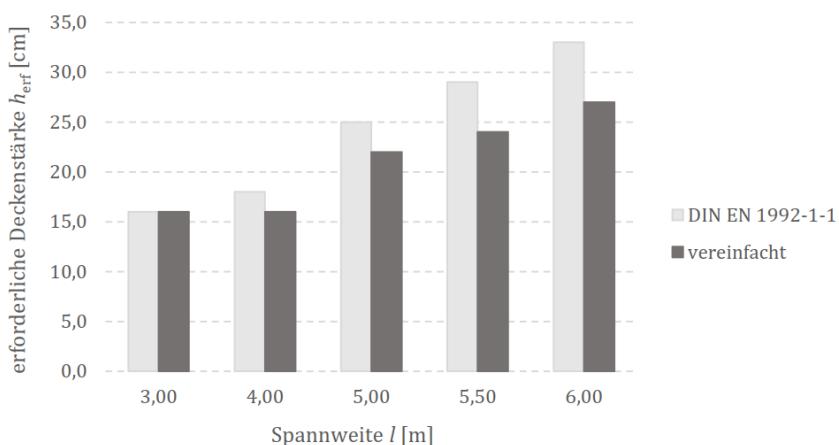
$$p_{\text{perm}} = g_{k,\text{EG}} + 2,31 \text{ kN/m}^2$$

Die Grundbewehrung wird auf der Ober- und Unterseite auf  $a_{s,o/u} = 3,35 \text{ cm}^2/\text{m}$  festgelegt. Bei einer erforderlichen Zulagebewehrung aus der Bemessung im GZT wird die untere Grundbewehrung erhöht, sodass die statisch erforderliche Bewehrung gerade noch abgedeckt wird.

**Tabelle 3.7: Vergleich der zur Einhaltung des Verformungsnachweises erforderlichen Deckenstärken (einachsiger Lastabtrag)**

	$l = 3,0 \text{ m}$	$l = 4,0 \text{ m}$	$l = 5,0 \text{ m}$	$l = 5,5 \text{ m}$	$l = 6,0 \text{ m}$
$h_{\text{erf}}$ (DIN EN 1992-1-1)	16,0 cm	18,0 cm	25,0 cm	29,0 cm	33,0 cm
$h_{\text{erf}}$ (mit Faktorisierung)	16,0 cm	16,0 cm	22,0 cm	24,0 cm	27,0 cm

Aus Tabelle 3.7 ist zu erkennen, dass bereits bei einer Spannweite von  $l = 4,0 \text{ m}$  die erforderliche Deckenstärke, die durch die Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse unter der quasi-ständigen Kombination ermittelt wurde, von der Deckenstärke abweicht, die durch die direkte Verformungsberechnung nach DIN EN 1992-1-1 bestimmt wurde. Während die erforderliche Deckenstärke nach DIN EN 1992-1-1 mit zunehmender Spannweite signifikant ansteigt, ergeben sich aus der Faktorisierungsmethode insgesamt geringere Deckenstärken.



**Abbildung 3.39: Vergleich der erforderlichen Deckenstärken**

Die deutlichen Unterschiede bezüglich der erforderlichen Deckenstärken sind auf die Rissbildung zurückzuführen. In Abbildung 3.40 sind die gerissenen Bereiche der Platten dargestellt, deren Auswirkungen (Steifigkeitsminderung) auf die Verformungen durch die pauschale Faktorisierung nicht erfasst werden können.

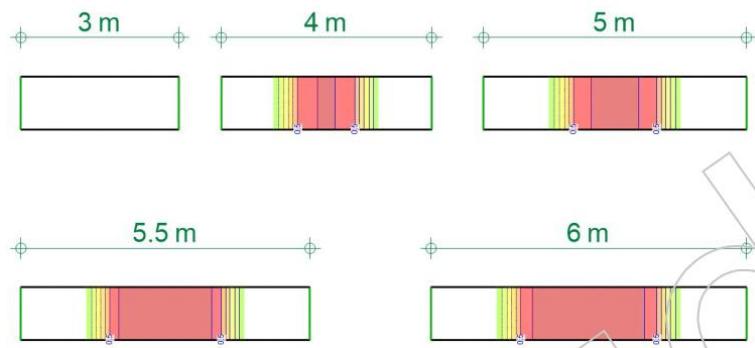


Abbildung 3.40: gerissene Bereiche für die mit dem vereinfachten Verfahren festgelegten Deckenstärken

Mit dem Faktor von 4,0 können pauschal die Verformungen im ungerissenen Zustand mit Berücksichtigung der vorliegenden (üblichen) zeitabhängigen Kennwerte erfasst werden. Alleine eine Kriechzahl von 2,5 führt dazu, dass die elastischen Verformungen im Zustand I um den Faktor von 3,5 im Endzustand vergrößert werden.

Verbleibt die Platte demnach im ungerissenen Zustand und weist etwa die gleiche Bewehrungsmenge an der Ober- und Unterseite auf, so führt die vereinfachte Methode zu Verformungsergebnissen im Endzustand, die in etwa mit denen der direkten Verformungsberechnung übereinstimmen, wobei jedoch die Belastungsgeschichte berücksichtigt werden sollte.

#### **zweiachsig gespannte Platte (gelenkig gelagert)**

Für die zweiachsig gespannte Platte, die an vier Rändern gelenkig gelagert ist, liegen dieselben Kennwerte zugrunde, wie bei der einachsigen gespannten Platte. Für die Plattengeometrie wird ein Verhältnis von Länge zu Breite von  $l/b = 1,2$  gewählt.

In Tabelle 3.8 sind in Abhängigkeit von der Plattengeometrie die erforderlichen Deckenstärken dargestellt. Anders als beim einachsigen Lastabtrag, liegt die vereinfachte Variante im Vergleich zur direkten Berechnung nach DIN EN 1992-1-1 auf der sicheren Seite. Dies ist zum einen darauf zurückzuführen, dass die Platte auch bei größeren Systemabmessungen vollständig im Zustand I verbleibt.

Zum anderen rechnet das Programm Micro-FE die elastischen Verformungen unter Ansatz von Bruttoquerschnittswerten. Die direkte Verformungsberechnung im Zustand II hingegen wird mit ideellen Querschnittswerten durchgeführt, wodurch die Verformungen im Vergleich kleiner/günstiger sind.

**Tabelle 3.8: Vergleich der zur Einhaltung des Verformungsnachweises erforderlichen Deckenstärken (zweiachsiger Lastabtrag)**

$b/l =$	<b>5,0 m/6 m</b>	<b>6,0 m/7,2 m</b>	<b>7,0 m/8,4 m</b>	<b>8,0 m/9,6 m</b>
<b><math>h_{\text{erf}}</math> (DIN EN 1992-1-1)</b>	16,0 cm	18,0 cm	22,0 cm	27,0 cm
<b><math>h_{\text{erf}}</math> (mit Faktorisierung)</b>	16,0 cm	19,0 cm	23,0 cm	28,0 cm

Es ist jedoch ausdrücklich zu erwähnen, dass für den Vergleich der Verteilungsbeiwert unter der quasi-ständigen Kombination bestimmt wurde. Wird dieser unter der seltenen Einwirkungskombination berechnet, reißt die Platte auf, die Verformungen nehmen deutlich zu und im Vergleich zur vereinfachten Methode sind größere Deckenstärken erforderlich.



## 4 Experimentelle Untersuchungen

Für einen einachsigen Lastabtrag sollen Bauteilversuche durchgeführt und mit den aufgeführten Berechnungsansätzen aus Kapitel 3 verglichen werden.

Hierzu werden mehrere Balken betoniert, die nach ihrer Erhärtung als Einfeldträger aufgelagert und in Feldmitte mit einer Punktlast beansprucht werden. Die zeitabhängige Verformung infolge des Eigengewichts und der aufgebrachten Last wird mithilfe von Sensoren erfasst.

Zur Bestimmung der tatsächlichen Kennwerte des Betons werden beim Betonieren der Balken Probekörper hergestellt. Zudem werden aus einem der (unbelasteten) Balken Bohrkerne entnommen, um die Druckfestigkeit zu bestimmen.

Der Versuch findet in der Wasserbauhalle statt, während die Materialprüfung im Baustoff-Labor der Hochschule Darmstadt durchgeführt wird.

### 4.1 Beschreibung und Aufbau des Versuches

Im ersten Schritt wird eine Variantenuntersuchung durchgeführt, um die Abmessungen der Balken festzulegen.

Die berechnete Endverformung soll den Durchbiegungsgrenzwert von  $L/250$  überschreiten, um sichtbare Verformungen an den Balken zu erhalten. Dabei wird ein kleinerer Querschnitt gewählt, um den Transport zu erleichtern und die erforderliche Einzellast zu minimieren, die notwendig ist, um den gewünschten Durchbiegungsgrenzwert zu überschreiten.

Alle Balken werden mit identischen Abmessungen hergestellt und so ausgelegt, dass der Querschnitt unter der Gebrauchslast reißt. Dadurch wird der eingelegte Betonstahl nach der Rissbildung aktiviert, was dazu führt, dass sich der Balken Bereichsweise im Zustand II befindet. Es wird ausschließlich eine untere Längsbewehrung verwendet, während auf eine Querkraftbewehrung verzichtet wird, da diese die Verformung des Bauteils nicht beeinflusst und die Herstellung der Balken dadurch erheblich vereinfacht wird.

Für die Endkriechzahl und das Endschwindmaß werden standartmäßige Werte angesetzt. Die nachfolgend aufgeführten Werte dienen daher ausschließlich der Dimensionierung der Balken.

Bei allen Varianten werden folgende Kennwerte angesetzt:

Betongüte: C25/30

Längsbewehrung:  $A_s = 2 \varnothing 10$

Betondeckung:  $c_{\text{nom}} = 3,0 \text{ cm}$

Endkriechzahl:  $\varphi(\infty, t_0) = 2,5$

Endschwindmaß:  $\varepsilon_{\text{cs}}(\infty) = -0,5 \text{ \%}$

Tabelle 4.1 zeigt die verschiedenen Varianten, die sich hinsichtlich ihrer Abmessungen und Belastungen unterscheiden. Die Varianten wurden mithilfe des Durchlaufträgermoduls S340.de der Software mb AEC berechnet. Bei der Auswahl der geeigneten Variante waren insbesondere die Größe der Belastung und die Spannweite ausschlaggebend.

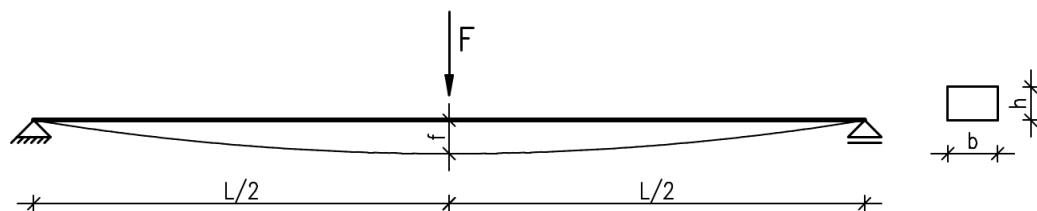


Abbildung 4.1: statisches System und Querschnitt

Tabelle 4.1: Variantenuntersuchung mit der Software mb AEC

Variante [-]	Quer- schnitt $b/h$ [cm]	Spann- weite $L$ [m]	Belastung in Feld- mitte $F$ [kN]	vorh. Endverfor- mung im Zustand II $f_{\text{II},\infty}$ [mm]	zul. Endverformung im Zustand II $L/250$ [mm]
1	10/8	1,50	1,25	8,34	6,00
2	10/8	1,75	1,00	11,23	7,00
3	12/8	2,00	0,75	11,10	8,00
4	12/8	2,25	0,60	14,11	9,00
5	12/10	2,50	1,00	13,66	10,00
6	12/10	2,75	0,75	15,24	11,00
7	15/8	2,50	0,50	15,29	10,00
8	15/8	2,75	0,30	14,90	11,00

Variante 7 zeichnet sich durch eine moderate Spannweite und eine geringe Belastung aus. Im Vergleich zu den anderen Varianten weist sie zudem die größte Verformung auf. Aufgrund dieser Eigenschaften wird Variante 7 als die geeignete für den Versuch ausgewählt.

Um eine ausreichende Auflagerfläche zu gewährleisten, werden die Balken 25 cm länger hergestellt. Daraus ergeben sich die folgende Abmessungen:

Querschnitt:  $b/h = 15/8 \text{ cm}$

Länge:  $L = 2,5 + 0,25 = 2,75 \text{ m}$

Zur Erzeugung der Einzellast werden die unten dargestellten Gewichtsscheiben verwendet, die in Balkenmitte übereinander gestapelt positioniert werden.



Abbildung 4.2: Gewichtsscheiben für die Belastung der Balken

Zur Positionierung der Balken als Einfeldträger werden zwei Arbeitsgerüste verwendet. Das seitliche L-Profil des Arbeitsgerüstes soll hierbei als Auflagerfläche dienen (siehe Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4).



Abbildung 4.3: Arbeitsgerüst

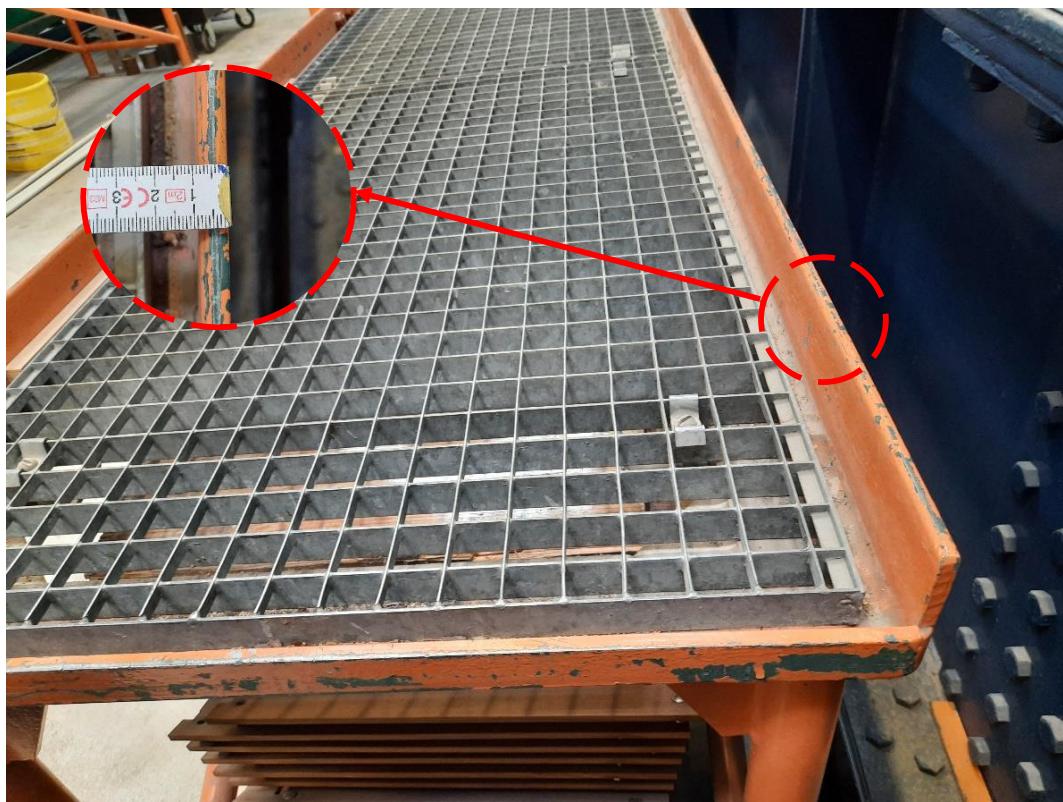


Abbildung 4.4: L-Profil des Arbeitsgerüstes als Auflager für die Balken

Die Durchbiegungen der Stahlbetonbalken werden mittels Sensoren (Wegaufnehmer) erfasst. Dazu wird eine Messbasis in Feldmitte aufgebaut, auf der anschließend die Messtechnik angebracht wird.

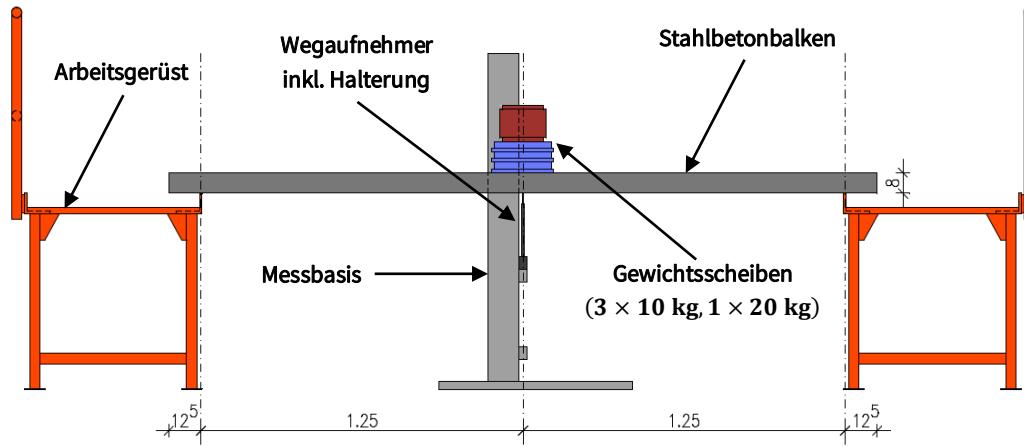


Abbildung 4.5: Skizze vom Versuchsaufbau

#### 4.1.1 Herstellung der Balken und Probekörper

Im Folgenden wird der Ablauf zur Herstellung der Balken und Probekörper beschrieben, einschließlich der Anfertigung der Schalung, des Bewehrens der Balken, des Einbaus und der Nachbehandlung des Betons. Insgesamt werden fünf Stahlbetonbalken und sechs Probekörper hergestellt.

Die Herstellung des Betons darf als Baustellenbeton, Transportbeton oder Beton im Fertigteilwerk erfolgen [10]. In der Praxis wird häufig Transportbeton gewählt, da er zahlreiche Vorteile bietet. Das Transportbetonwerk benötigt dafür grundlegende Informationen, wie die gewünschte Festigkeits- und Expositionsklasse des Bauteils.

In dieser Arbeit wird Transportbeton gewählt, um die Eigenschaften des Betons möglichst praxisnah zu gestalten.

Mit Unterstützung des Bauunternehmens Tüfek Bau GmbH wurde am 05.12.2023 die Schalung für die Balken angefertigt. Die Schalung bestand aus Holzbrettern, die als Unterkante dienten, während Jochträger mit einer Gurtbreite von 80 mm die seitlichen Schalungsflächen bildeten und somit der Querschnittshöhe der Balken entsprachen. Um die gewünschte Schalungslänge von 2,75 m zu erreichen, wurden zugesägte Kantholzstücke verwendet. Anschließend wurde die Bewehrung (jeweils 2 ø 10) an den Abstandshaltern (3,0 cm) mithilfe von Bindedraht fixiert und in die Schalung eingelegt.



**Abbildung 4.6: Schalung mit eingelegter Bewehrung**

Aufgrund der Nähe des Betonwerks zur Einbaustelle (etwa 10 Minuten Autofahrt) wurde beschlossen, den Beton mit einem Anhänger abzuholen. Bei der Ankunft wurde der im Werk hergestellte Beton direkt vom Mischeturm in den Fahrmischer gefüllt. Anschließend konnte der Beton in die Kübel entladen werden, um diese zur Einbaustelle zu transportieren (siehe Abbildung 4.7).



**Abbildung 4.7: Einbringen des Betons vom Fahrnischer in Betonkübel**

**Tabelle 4.2: Kennwerte des Betons**

Festigkeitsklasse	C25/30
Expositionsklasse	X0
Konsistenz	C1 (steif)
Größtkorn	16 mm
w/z – Wert	0,45
Zementart	CEM III/A 32,5 N CEM II/A-LL 42,5 N
Gesteinskörnung	Gabbro

Wie in Tabelle 4.2 dargestellt, weist der Beton eine steife Konsistenz (C1) auf. Dies liegt daran, dass der Transport ohne Mischer oder Rührwerk erfolgte. Nur Frischbetone mit steifer Konsistenz dürfen auf eine abweichende Art transportiert werden [53].

Nachdem der Beton in die Kübel eingebracht wurde, erfolgte der Transport mit einem Anhänger zur Einbaustelle. Vor Ort stellte sich heraus, dass die Konsistenz des Betons für die weitere Verarbeitung ungeeignet war. Daher fand eine Wasserzugabe und ein erneutes Mischen des Betons statt. Dieses Vorgehen erhöht den Wasserzementwert und wirkt sich, wie bereits in Kapitel 2.2.1 beschrieben, nachteilig auf die mechanischen Eigenschaften des Betons aus. Die Wasserzugabe und das Mischen erfolgten dabei nicht einheitlich für die gesamte Betonmenge, sondern in mehreren Teilschritten: Nach jeder Wasserzugabe wurde ein Teil des Betons gemischt, in kleine Betoneimer gefüllt und in die Schalung gegossen. Dadurch kann nicht pauschal von einer gleichmäßigen Erhöhung des Wasserzementwertes ausgegangen werden. Während der Betonage wurden die Probekörper erst nach der Herstellung der Balken betoniert. Dabei wurde eine etwas fließfähiger Konsistenz des Betons bei den Probekörpern im Vergleich zu den Balken wahrgenommen.

Nachdem der Beton in die Schalung gegossen wurde, erfolgte das Verdichten mittels einer Rüttelflasche.

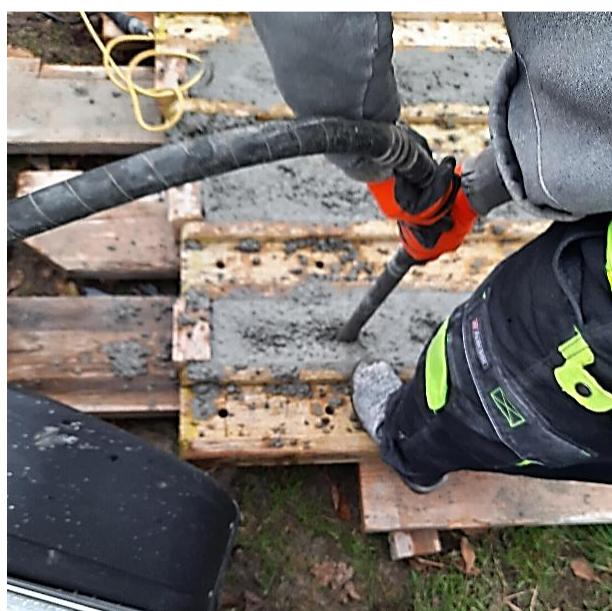


Abbildung 4.8: Verdichten des Betons

Das sorgfältige Verdichten des Frischbetons ermöglicht eine dichte Lagerung der einzelnen Betonbestandteile und beeinflusst demnach die Festbetoneigenschaften, wie z. B. die Druckfestigkeit. Beim Verdichten des Frischbetons wurde die Rüttelflasche zügig abgesenkt, um zu vermeiden, dass die obere Betonlage zuerst verdichtet wird. Denn dieser Vorgang würde das Entweichen von Luft und Wasser aus der unteren Lage erschweren. Ebenfalls wurde ein zu schnelles Herausziehen des Rüttlers vermieden, um eine ausreichende Verdichtung des frischen Betons zu gewährleisten [16].

Im nächsten Schritt wurde die Betonoberfläche mit einer Kelle glattgezogen.



Abbildung 4.9: Stahlbetonbalken und Probekörper nach dem Verdichten und Glattziehen

Abschließend wurden die Oberflächen der betonierten Balken und Probekörper mit einer Folie abgedeckt, um sie vor Witterungseinflüssen zu schützen und die erforderliche Nachbehandlung des Betons zu gewährleisten.



Abbildung 4.10: Abdecken der Balken und Probekörper mit einer Folie

### 4.1.2 Vorbereitung des Versuchsaufbaus

Vor dem Transport der Stahlbetonbalken in die Wasserbauhalle wurden die einzelnen Komponenten des Versuchsaufbaus vorbereitet. Dazu gehörten sowohl das Positionieren und Justieren der Arbeitsgerüste, die als Auflager für die Balken dienen sollten, als auch der Aufbau der Messtechnik.

Zunächst wurden die Arbeitsgerüste mithilfe eines Laser-Entfernungsmessers so platziert, dass der Abstand zwischen den Auflagerkanten (seitliches L-Profil) 2,50 m betrug. Anschließend wurden die Gerüste sorgfältig ausgerichtet, um jegliches Spiel zu vermeiden. Dazu kamen dünne Stahlbleche zur Verwendung, die unter den Arbeitsgerüsten platziert wurden.

Im nächsten Schritt erfolgte der Aufbau der Messbasis. Um die Höhe des Riegels zu bestimmen, auf dem die Sensoren montiert wurden, wurde die Auflagerhöhe und die Höhe der Sensoren einschließlich ihrer Halterungen abgemessen. Die Differenz dieser beiden Werte ergibt die benötigte Riegelhöhe. Um sicherzustellen, dass sich die Sensoren beim Auflagern der Balken leicht eindrücken, wurde der Differenz 5 mm dazu addiert.

Die Riegelhöhe wurde demnach wie folgt bestimmt:

$$h_{\text{Riegel}} = h_{\text{Auflager}} - h_{\text{Sensor}} + 0,005 \text{ m} \quad (4.1)$$

$$h_{\text{Riegel}} = 0,74 \text{ m} - 0,38 \text{ m} + 0,005 \text{ m} = 0,365 \text{ m}$$

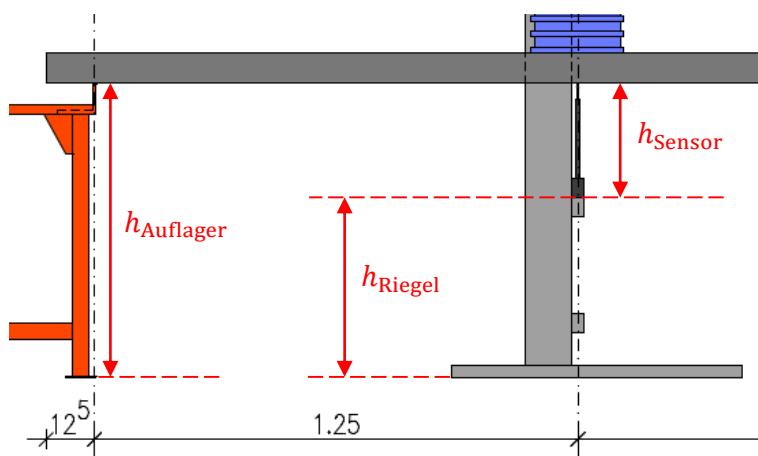


Abbildung 4.11: Skizze zur Berechnung der Riegelhöhe

Nach der Einstellung der Messbasis auf die korrekte Höhe, wurde sie unter Verwendung eines Lasermessgeräts so platziert, dass die Sensoren exakt in Feldmitte positioniert sind.

Anschließend wurden die Auflagerstellen mit einem Isolierband markiert, um eine exakte Positionierung der Balken zu gewährleisten. Die Abstände zwischen den Stahlbetonbalken von Kante zu Kante wurden auf 30 cm festgelegt. Dies sollte sowohl einen ausreichenden Arbeitsbereich sicherstellen als auch die gegenseitige Beeinflussung der Balken bei der Lastanbringung hinsichtlich der Verformung minimieren.



Abbildung 4.12: Versuchsaufbau

#### 4.1.3 Transport, Positionierung und Belastung der Balken

Am 08.01.2024 erfolgte der Transport der Balken zur Wasserbauhalle. Die Probekörper wurden bereits drei Wochen zuvor zur Hochschule gebracht und unter gleichen Bedingungen – d.h. im Freien und mit einer Folie abgedeckt – gelagert. Das Bauunternehmen übernahm die Aufgabe, die Stahlbetonbalken mit einem Anhänger zur Hochschule zu transportieren. Nach der Ankunft auf dem Campus wurden die Balken sorgfältig vom Anhänger entladen und zunächst auf dem Gelände vor der Wasserbauhalle abgelegt. Um eine ungewollte Rissbildung beim Tragen zu verhindern, wurden die Balken quer getragen, da das Widerstands- und somit das Rissmoment um diese Achse deutlich größer ist. Dieser Schritt erforderte die koordinierte Anstrengung von 3 Personen, die gemeinsam die einzelnen Balken trugen und sicher abstellten.



Abbildung 4.13: Abstellen der Balken vor der Wasserbauhalle

Im Anschluss wurden die Balken in die Wasserbauhalle getragen und unmittelbar in der Nähe des Versuchsorts abgelegt. Im weiteren Verlauf wurden die Balken an den Auflagerstellen und in einem Abstand von jeweils 25 cm markiert.

Nach der magnetischen Befestigung der Sensoren am Riegel der Messbasis und deren Verbindung zum Datenlogger wurden die Stahlbetonbalken auf den Auflagern positioniert. Dieser Vorgang erforderte den sorgfältigen und koordinierten Einsatz von drei Personen, die jeden Balken einzeln – zunächst quer entlang der starken Achse – an der markierten Stelle des Arbeitsgerüstes absetzten.

Im nächsten Schritt wurde der Balken vorsichtig in die korrekte Achse gedreht. Jegliches Spiel aufgrund von Unebenheiten wurde dabei durch den Einsatz von dünnen Kunststoff-Unterlegplatten ausgeglichen. Unmittelbar nach dem Start der Verformungsmessung erfolgte die Platzierung der einzelnen Gewichtsscheiben in der Mitte des Balkens.

Bevor sich dieser Vorgang mit dem nächsten Balken wiederholte, wurden zunächst die Messwerte des bereits abgelegten Balkens beobachtet und eine gewisse Zeit abgewartet, bis die Verformungszunahme insbesondere infolge Kriechen deutlich nachließ.

Der Datenlogger erfasste dabei alle 10 Minuten die Messwerte. Um eine genauere Erfassung der Verformungsänderungen zu gewährleisten, wurden die vom Datenlogger angezeigten Werte direkt nach dem Auflegen der Gewichtsscheiben fotografisch dokumentiert. Besonders wichtig war es, die Messwerte vor dem Auflegen des nächsten Balkens zu erfassen, um die Änderungen durch mögliche Bewegungen festzuhalten.

Nach dem Auflegen und Ausrichten des zweiten Balkens, wurde zunächst dessen Messwert im Datenlogger, der keine Aussage infolge Bewegungen besaß, gelöscht und auf den Ausgangsmesswert Null zurückgesetzt. Direkt im Anschluss erfolgte die Belastung mit den Gewichtsscheiben. Dieser Vorgang wiederholte sich bei jedem Balken.



Abbildung 4.14: Auflegen und Belastung der Balken

Nachdem der Prozess für alle Balken abgeschlossen war, wurden die bisherigen Messwerte gelöscht und auf den Messwert Null zurückgesetzt. Ab diesem Zeitpunkt erfolgte die Speicherung der Verformungsmesswerte alle 10 Minuten im Datenlogger.



**Abbildung 4.15: belastete Stahlbetonbalken aus verschiedenen Perspektiven**

Hierbei ist wichtig zu erwähnen, dass bei jedem Balken die Verformung infolge des Eigengewichtes – einschließlich der daraus resultierenden Kriechverformung – bis zur Messwertaufzeichnung im Datenlogger nicht erfasst werden konnte. Die Verformungen wurden erst nach dem Auflegen der Gewichtsscheiben gemessen.

## 4.2 Ermittlung der Kennwerte im Labor

Die Ermittlung der Kennwerte erfolgte im Baustoff-Labor der Hochschule Darmstadt. Dies beinhaltete die Prüfung der Druckfestigkeit und des Elastizitätsmoduls der hergestellten Probekörper. Zusätzlich wurden Bohrkerne aus dem unbelasteten Balken entnommen, um die Druckfestigkeit des Bauteils zu bestimmen.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Kennwerte der Probekörper und Bohrkerne nicht gleichzeitig bestimmt wurden. Eine ausgewählte Anzahl von Probekörpern wurde entsprechend dem Alter der Balkenbelastung parallel geprüft. Die Untersuchung der restlichen, zerstörungsfreien Probekörper sowie der Bohrkerne erfolgte zu einem späteren Zeitpunkt.

Die Prüfung der Druckfestigkeit und des Elastizitätsmoduls erfordert eine ebene Oberfläche der Prüfkörper. Daher wurden die Oberflächen der Probekörper vor der Prüfung mit einer speziellen Maschine geschliffen. Dies galt auch für die Bohrkerne, deren Druckfestigkeit anschließend bestimmt wurde. Darüber hinaus wurden die einzelnen Versuchskörper nummeriert, ihre Abmessungen nach dem Schleifen bestimmt und abgewogen.

In den folgenden Kapiteln werden die geprüfte Druckfestigkeit und der Elastizitätsmodul der einzelnen Prüfkörper dargestellt und mit den in der Norm festgelegten Kennwerten verglichen. Darüber hinaus werden weitere wichtige Informationen beschrieben, die für die Bestimmung und den Vergleich der Kennwerte relevant sind.

#### 4.2.1 Druckfestigkeit-Probekörper

Die Untersuchung der Probekörper erfolgte parallel zur Belastung der Balken. Die Zylinderproben hatten einen Durchmesser von 15 cm und eine Länge von 30 cm. Da das Schleifen der Oberflächen zu geringfügigen Längenveränderungen führte, war es notwendig, die Abmessungen erneut zu messen, um die Rohdichte zu ermitteln.



Abbildung 4.16: Abmessen der Probekörper

Der Druckversuch wurde an drei Probekörpern durchgeführt. Ein Probekörper wurde direkt bis zur Zerstörung belastet, während die anderen beiden zunächst zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls verwendet und anschließend auf Druckfestigkeit geprüft wurden. Tabelle 4.3 zeigt die Abmessungen, Massen und Rohdichten der Proben, die der Druckprüfung unterzogen wurden. Es wird deutlich, dass die Rohdichten nur geringfügige Unterschiede aufweisen

Tabelle 4.3: Abmessung, Masse und Rohdichte der ersten drei Probekörper

Probekörpername	Abmessung $D/L$ [mm]	Masse [kg]	Rohdichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Z1	150,0 / 295,0	12,403	2379,2
Z2	150,0 / 297,0	12,413	2365,1
Z3	150,0 / 296,0	12,493	2388,4

Im nächsten Schritt wurde der erste Probekörper zentrisch auf der unteren Druckplatte der Prüfmaschine des Herstellers Form+Test platziert, um die Druckfestigkeit zu bestimmen. Die Belastungsgeschwindigkeit betrug  $0,6 \text{ N}/(\text{mm}^2 \cdot \text{s})$ .



Abbildung 4.17: Platzierung des ersten Probekörpers

Nach der Ermittlung der Druckfestigkeit des ersten Probekörpers Z1 wurden die Zylinder Z2 und Z3 zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls herangezogen, worauf im Kapitel 4.2.3 eingegangen wird. Anschließend wurde auch bei diesen Probekörpern die Druckfestigkeit geprüft.

Die Druckfestigkeit  $f_c$  ergibt sich aus folgender Gleichung [10]:

$$f_c = \frac{F}{A_c} \quad (4.2)$$

Dabei ist:

$F$  die Maximalkraft beim Bruch,

$A_c$  die Fläche des Probekörpers.

**Prüfung:** Druckversuch  
**Norm:** Ohne Norm  
**Prüfkörper:** Zylinder 150x300

Herstellidatum: 05.12.2023 11:02  
Probenalter: 35 01:23  
Prüfdatum: 09.01.2024 12:25  
Prüfer:

Name	Durchmesser [mm]	Höhe [mm]	Bruchlast [kN]	Festigkeit [MPa]
Z1	150,0	295,0	374,1	21,2
Z2	150,0	297,0	347,5	19,7
Z3	150,0	296,0	382,5	21,6
Mittelwert			20,8	
Std. Abw.			1,03	

**Abbildung 4.18: Auszug aus dem Prüfprotokoll (09.01.2024)**

Aus der obenstehenden Abbildung wird deutlich, dass die Ergebnisse weder die charakteristische Zylinderdruckfestigkeit von  $25 \text{ N/mm}^2$  noch die mittlere Betondruckfestigkeit von  $33 \text{ N/mm}^2$  (Druckfestigkeitsklasse C25/30) erreichen. Dies ist unter anderem auf die abweichende Lagerungsart zurückzuführen, da die Probekörper nicht gemäß den Lagerungsbedingungen nach DIN EN 12390-2 aufbewahrt wurden. Um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, müssen die Lagerungsbedingungen selbstverständlich identisch sein.

Die in Tabelle 2.1 dargestellten 5 %-Fraktilwerte der Zylinder- und Würfeldruckfestigkeiten beziehen sich auf Probekörper im Alter von 28 Tagen nach einer Lagerung unter Wasser bei einer Temperatur von  $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$  oder in einem Feuchter Raum bei  $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$  und einer relativen Luftfeuchte von  $\geq 95\%$  (Referenzverfahren) [10], [15], [54].

Gemäß dem nationalen Anhang zu DIN EN 12390-2 sind die Lagerungsbedingungen für die Prüfung der Druckfestigkeit und des Elastizitätsmoduls wie folgt geregelt [10], [54]:

- Probekörper für  $(24 \pm 2) \text{ h}$  nach ihrer Herstellung in den Formen bei einer Temperatur von  $15^\circ\text{C}$  bis  $22^\circ\text{C}$  in einem geschlossenen Raum vor Zugluft geschützt lagern und das Austrocknen durch beispielsweise das Abdecken mit einer PE-Folie verhindern.
- Probekörper nach  $(24 \pm 2) \text{ h}$  aus den Formen entnehmen und mindestens 6 Tage auf Rosten in einem Wasserbad mit Leitungswasser von  $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$  lagern (alternativ auf einem Lattenrost in einer Feuchtekammer mit  $(20 \pm 2)^\circ\text{C}$  und  $\geq 95\%$  relativer Luftfeuchte).

- Mindestens 21 Tage vor der Prüfung die Probekörper aus dem Wasserbad bzw. der Feuchtekammer entnehmen und auf einem Lattenrost in einem geschlossenen Raum bei einer Temperatur von 15 °C bis 22 °C und einer relativen Luftfeuchte von 65 ± 5 % lagern.

Erfolgt die Lagerung nach dem nationalen Anhang der DIN EN 12390-2 („Trockenlagerung“), muss bei Normalbeton die geprüfte Druckfestigkeit  $f_{c,dry}$  auf die Referenzlagerung („Wasserbadlagerung“) wie folgt umgerechnet werden [10]:

$$f_{c,cube} = 0,92 \cdot f_{c,dry} \quad (4.3)$$

Neben der Zusammensetzung (vor allem Wasserzementwert und Zementart) beeinflussen die Erhärtungsbedingungen die Druckfestigkeit des Betons. Der Erhärtungsverlauf hängt im Wesentlichen vom Alter, von der Feuchtigkeit und der Temperatur des Betons ab. Wie in Kapitel 2.2.2 bereits erwähnt, kann die zeitliche Entwicklung der Betondruckfestigkeit bei einer Lagerung gemäß DIN EN 12390-2 und bei einer mittleren Temperatur von 20 °C unter Berücksichtigung des Zementtyps mithilfe der Gleichung (2.11) bestimmt werden [15].

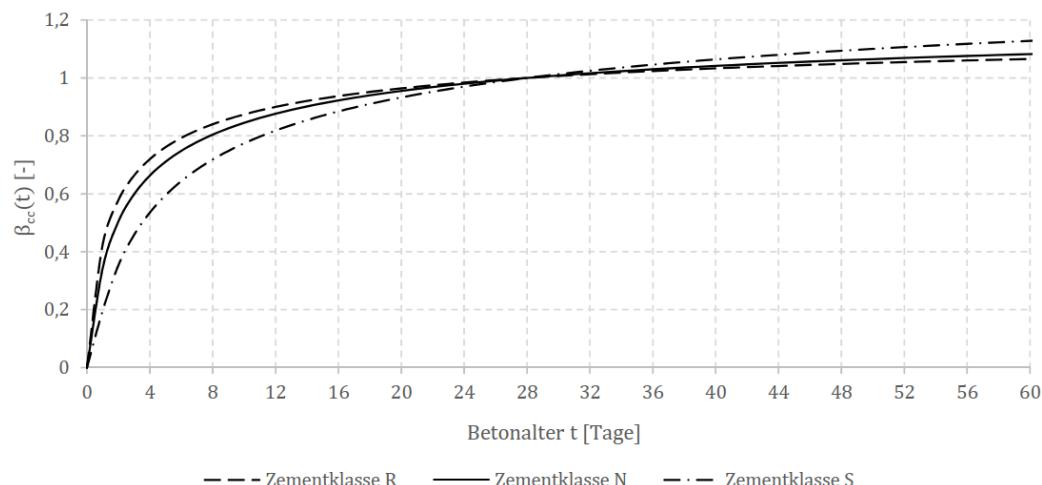


Abbildung 4.19: zeitliche Entwicklung der Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Zementklasse nach [3]

Die Lagerungstemperatur spielt eine wichtige Rolle bei der Festigkeitsentwicklung des Betons. Niedrige Temperaturen führen zu einer Verzögerung und hohe Temperaturen zu einer Beschleunigung der Hydratationsgeschwindigkeit des Zements [15].

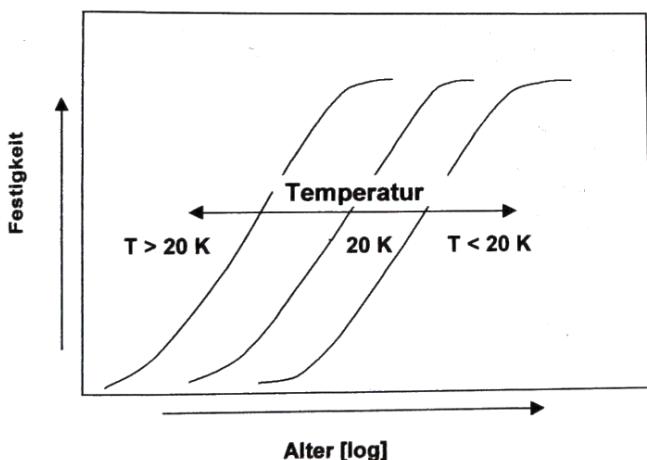


Abbildung 4.20: Einfluss der Temperatur auf die Festigkeitsentwicklung des Betons [16]

Um den Einfluss der Lagerungstemperatur auf die zeitliche Entwicklung der mechanischen Eigenschaften des Betons zu berücksichtigen, wurde in der Beton-technologie der Begriff des Reifegrades  $R_s$  (nach *Saul-Nurse*) eingeführt [15]:

$$R_s = \sum (T_i + 10 \text{ } ^\circ\text{C}) \cdot \Delta t_i \quad (4.4)$$

Hierbei ist:

$T_i$  die mittlere Temperatur in  $^\circ\text{C}$ , welche während des Zeitintervalls  $\Delta t_i$  in Tagen wirkt.

Wird für den Reifegrad eine Temperatur von  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$  als Referenzwert gesetzt, so kann stattdessen der Begriff des wirksamen Betonalters entsprechend Gleichung (4.5) eingeführt werden. Das wirksame Betonalter bezeichnet jenes Zeitintervall, nach dem der Beton dieselbe Reife bei einer Temperatur von  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$  erreicht hat [15].

$$t_w = \frac{\sum (T_i + 10 \text{ } ^\circ\text{C}) \cdot \Delta t_i}{30 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (4.5)$$

Aus Gleichung (4.5) wird deutlich, dass die Hydratation, also die Festigkeitsentwicklung des Betons bei einer Temperatur von  $-10 \text{ } ^\circ\text{C}$  zum Stillstand kommt. Für eine mittlere Temperatur von  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$  stimmt das wirksame Betonalter mit dem tatsächlichen Betonalter überein [15].

Der Reifegrad  $R_s$  stellt eine empirische Größe dar. Die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Erhärtung und Temperatur steht im Widerspruch zu den physikalischen Gesetzmäßigkeiten [15]. Nach [16] ist die Gleichung (4.5) für einen begrenzten Temperaturbereich (etwa zwischen  $10^\circ\text{C} \leq T_i \leq 35^\circ\text{C}$ ) gültig.

In der Literatur finden sich weitere Reifegradformeln. In CEB (1990) wird z. B. für das wirksame Betonalter die Gleichung (4.6) angegeben, die auf der Arrhenius-Gleichung aufbaut und Gültigkeit für einen Temperaturbereich von  $0^\circ\text{C} \leq T_i \leq 80^\circ\text{C}$  besitzt [17], [55].

$$t_w = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \exp \left( 13,65 - \frac{4000}{273 + T_i} \right) \quad (4.6)$$

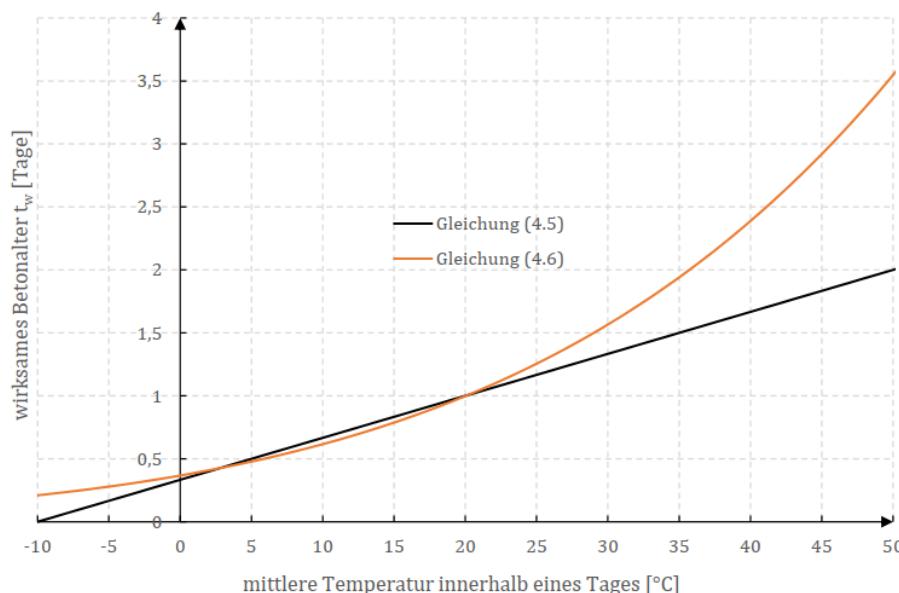


Abbildung 4.21: Vergleich des wirksamen Betonalters nach den Gleichungen (4.5) und (4.6) für ein tatsächliches Betonalter von einem Tag nach [55]

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Probekörper zwei Tage nach ihrer Herstellung aus den Formen entnommen. Die Probekörper Z1, Z2 und Z3 wurden anschließend 33,5 Tage lang im Freien – geschützt vor Witterungseinflüssen – bei den vorherrschenden Lufttemperaturen bis zum Prüfdatum gelagert.

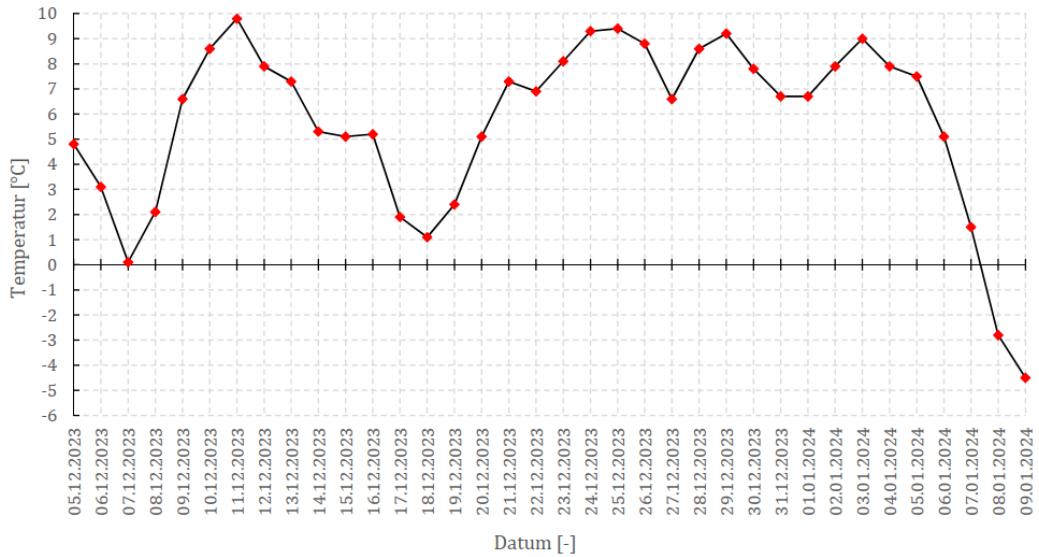


Abbildung 4.22: Temperaturverlauf in Darmstadt während des Lagerungszeitraums vom 05.12.2023 bis 09.01.2023 [56]

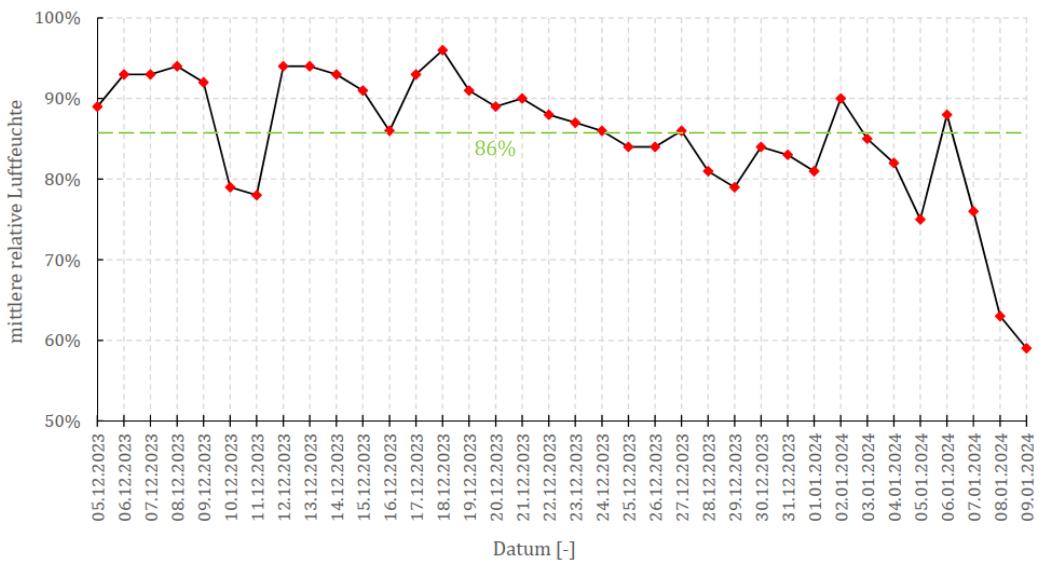


Abbildung 4.23: Verlauf der relativen Luftfeuchtigkeit in Darmstadt während des Lagerungszeitraums vom 05.12.2023 bis 09.01.2024 [57]

Abbildung 4.22 zeigt, dass die Temperaturen während des Lagerungszeitraums durchgehend im positiven Bereich lagen, mit Ausnahme der letzten zwei Tage. Die maximale Temperatur erreichte ca. 10 °C, während die minimale bei etwa –5 °C lag.

In Abbildung 4.23 ist der Verlauf der relativen Luftfeuchtigkeit während des Lagerungszeitraums dargestellt. Innerhalb dieses Zeitraums erreichte die relative Luftfeuchtigkeit einen Höchstwert von nahezu 95 % und einen Tiefstwert von etwa 60 %. Im Durchschnitt betrug die relative Luftfeuchtigkeit über den Lagerungszeitraum 86 %.

Für die Berechnung des wirksamen Betonalters wird die Gleichung (4.6) herangezogen. Die Anwendung der Gleichung (4.5) würde zu einem ähnlichen Ergebnis führen, da der Unterschied zwischen den beiden Funktionen in diesem Temperaturbereich gering ist (siehe Abbildung 4.21).

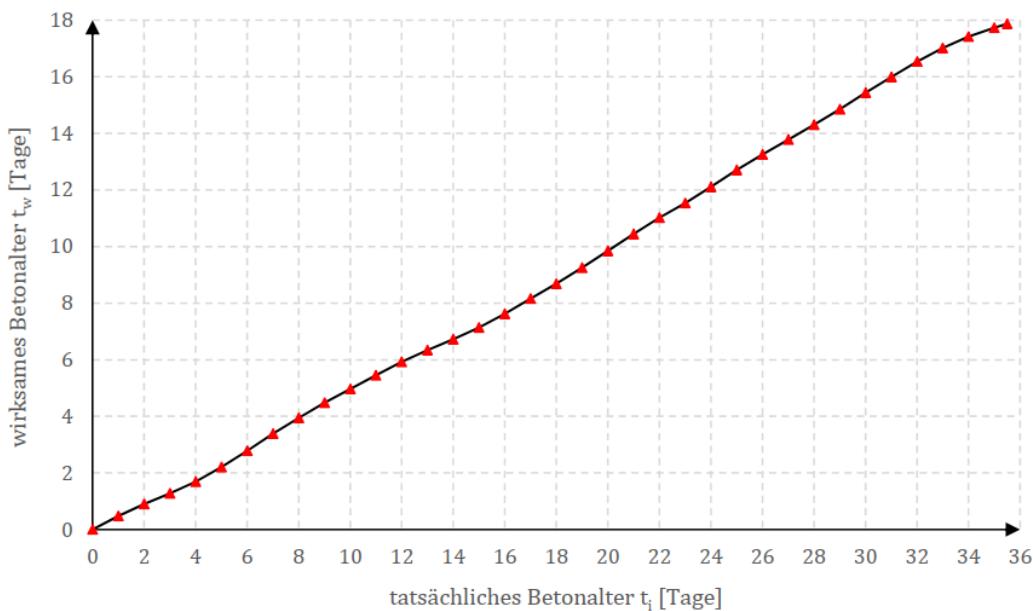


Abbildung 4.24: wirksames Betonalter nach Gleichung (4.6) während des Lagerungszeitraums

Die Entwicklung des wirksamen Betonalters über den Lagerungszeitraum ist in Abbildung 4.24 grafisch dargestellt. Die durchschnittlichen Temperaturen je Lagerungstag und das zugehörige effektive Betonalter können aus Tabelle 4.4 entnommen werden.

Für einen Lagerungszeitraum von 35,5 Tagen ergibt sich nach Gleichung (4.6) ein wirksames Betonalter von 17,87 Tagen (vgl. Tabelle 4.4). Wie bereits erwähnt, beziehen sich die Festigkeiten in der Norm auf ein Prüfalter von 28 Tagen. Um nun die geprüften Werte aus Abbildung 4.18 mit den Druckfestigkeiten aus der Norm zu vergleichen, muss zunächst ein Zielwert für die Festigkeitsklasse C25/30 im Alter von 17,87 Tagen ermittelt werden.

In Abbildung 4.25 ist die Entwicklung der mittleren Betondruckfestigkeit über den Lagerungszeitraum dargestellt. Hierbei wurde für den Zementtyp ein Faktor von  $s = 0,315$  angesetzt (Mittelwert der Faktoren für CEM 32,5 N und CEM 42,5 N).

Tabelle 4.4: wirksames Betonalter nach Gleichung (4.6) während des Lagerungszeitraums

Datum	tatsächliches Betonalter $t_i$ in Tagen	mittlere Temperatur $T_i$ [°C]	wirksames Betonalter $t_w$ in Tagen nach Gleichung (4.6)
05.12.2023	1	4,8	0,47
06.12.2023	2	3,1	0,91
07.12.2023	3	0,1	1,27
08.12.2023	4	2,1	1,69
09.12.2023	5	6,6	2,20
10.12.2023	6	8,6	2,78
11.12.2023	7	9,8	3,39
12.12.2023	8	7,9	3,94
13.12.2023	9	7,3	4,48
14.12.2023	10	5,3	4,97
15.12.2023	11	5,1	5,45
16.12.2023	12	5,2	5,93
17.12.2023	13	1,9	6,34
18.12.2023	14	1,1	6,72
19.12.2023	15	2,4	7,14
20.12.2023	16	5,1	7,62
21.12.2023	17	7,3	8,16
22.12.2023	18	6,9	8,69
23.12.2023	19	8,1	9,25
24.12.2023	20	9,3	9,84
25.12.2023	21	9,4	10,44
26.12.2023	22	8,8	11,02
27.12.2023	23	6,6	11,54
28.12.2023	24	8,6	12,11
29.12.2023	25	9,2	12,70
30.12.2023	26	7,8	13,26
31.12.2023	27	6,7	13,78
01.01.2024	28	6,7	14,30
02.01.2024	29	7,9	14,85
03.01.2024	30	9	15,44
04.01.2024	31	7,9	15,99
05.01.2024	32	7,5	16,54
06.01.2024	33	5,1	17,02
07.01.2024	34	1,5	17,42
08.01.2024	35	-2,8	17,73
09.01.2024	35,5 (12 Std)	-4,5	<b>17,87</b>

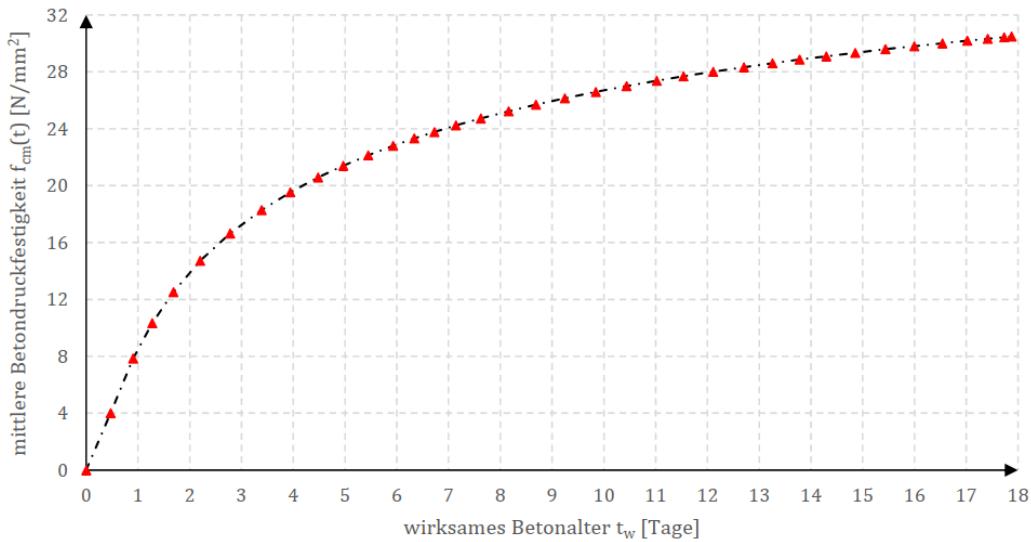


Abbildung 4.25: Entwicklung der mittleren Druckfestigkeit (Festigkeitsklasse C25/30) nach Gleichung (2.11) während des Lagerungszeitraums (Faktor für Zementtyp s = 0,315)

Für ein wirksames Betonalter von 17,87 Tagen ergibt sich nach Gleichung (2.11) eine mittlere Betondruckfestigkeit von:

$$f_{cm}(t = 17,87) = \beta_{cc}(t = 17,87) \cdot f_{cm}$$

$$\beta_{cc}(t = 17,87) = e^{0,315 \cdot (1 - \sqrt{28/17,87})} = 0,924$$

$$f_{cm} = 25 + 8 = 33 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cm}(t = 17,87) = 0,924 \cdot 33 = \mathbf{30,49 \text{ N/mm}^2} \quad (4.7)$$

Nach Gleichung (2.9) beträgt die charakteristische Druckfestigkeit für einen Beton der Festigkeitsklasse C25/30 im Alter von 17,87 Tagen:

$$f_{ck}(t = 17,87) = f_{cm}(t = 17,87) - 8 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ck}(t = 17,87) = 30,49 - 8 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{22,49 \text{ N/mm}^2} \quad (4.8)$$

Wie zuvor beschrieben, kann eine Wasserbadlagerung angenommen werden, wenn während der Lagerungsperiode eine Temperatur von 20 °C und eine relative Luftfeuchtigkeit von mindestens 95 % vorherrschen. Die vorliegende Lagerungsmethode unterscheidet sich jedoch sowohl von der Wasserbadlagerung als auch von der Trockenlagerung gemäß nationalem Anhang.

Der Einfluss der Temperatur auf die Festigkeitsentwicklung wurde bereits durch die Berücksichtigung des wirksamen Betonalters berücksichtigt.

Die relative Luftfeuchte betrug im Mittel über den Lagerungszeitraum etwa 86 %.

Da die relative Luftfeuchtigkeit deutlich größer ist als die vorgegebene ( $65 \pm 5\%$ ) bei der Lagerung nach nationalem Anhang der DIN EN 12390-2, werden die umgerechneten Festigkeiten bei Verwendung der Gleichung (4.3) unterschätzt. Theoretisch müsste der Faktor in Gleichung (4.3) angepasst werden, um den Einfluss der tatsächlichen relativen Luftfeuchte während der Lagerung auf die Festigkeitsentwicklung zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit werden die geprüften Festigkeiten in Abbildung 4.18 mithilfe von Gleichung (4.3) – ohne Anpassung des Faktors – auf die Wasserbadlagerung umgerechnet.

**Tabelle 4.5:** Umrechnung der geprüften Druckfestigkeiten (vom 09.01.2024) auf die Wasserbadlagerung nach Gleichung (4.3)

Probekörpername	umgerechnete Zylinderdruckfestigkeit $f_{c,cyl}$ „Wasserbadlagerung“) [N/mm <sup>2</sup> ]
Z1	19,5
Z2	18,1
Z3	19,9

Die mittlere Betondruckfestigkeit beträgt:

$$f_{cm,cyl} = \frac{19,5 + 18,1 + 19,9}{3} = 19,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.9)$$

Im Folgenden wird der Konformitätsnachweis gemäß [58] bzw. die Annahmekprüfung unter Zugrundelegung der umgerechneten Druckfestigkeiten und Zielfestigkeiten durchgeführt.

**Tabelle 4.6:** Annahmekriterien für die Ergebnisse der Druckfestigkeitsprüfung<sup>1)</sup> der Baustelle (Beton nach Eigenschaften – Transportbeton) [10]

Anzahl „n“ der Einzelwerte	Mittelwert <sup>2)</sup> $f_{cm}$ (Kriterium 1) [N/mm <sup>2</sup> ]	Jeder Einzelwert $f_{ci}$ (Kriterium 2) [N/mm <sup>2</sup> ]	
		ÜK 1 und 2	ÜK 3
3 bis 4	$f_{cm} \geq f_{ck} + 1$		
5 bis 6	$f_{cm} \geq f_{ck} + 2$	$f_{ci} \geq f_{ck} - 4$	$f_{ci} \geq 0,9 \cdot f_{ck}$
> 6	$f_{cm} \geq f_{ck} + (1,65 - \frac{2,58}{\sqrt{n}}) \cdot \sigma$ <sup>3)</sup>		

<sup>1)</sup> Wenn nicht anders vereinbart, Prüfung im Alter von 28 Tagen.

<sup>2)</sup> Mittelwert von „n“ nicht überlappenden Einzelwerten. Grundsätzlich können vorhandene Prüfergebnisse in kleinere Gruppen aufeinander folgender Werte ( $n \geq 3$ ) aufgeteilt werden. Die Annahmekriterien werden entsprechend der gewählten Anzahl „n“ angewendet.

<sup>3)</sup> Schätzwert  $\sigma$  der Standardabweichung der Stichprobe für  $n \geq 35$ , wobei  $\sigma \geq 3 \text{ N/mm}^2$  für Überwachungsklasse 2 und  $\sigma \geq 5 \text{ N/mm}^2$  für Überwachungsklasse 3 gilt. Bei Stichproben  $n \geq 7$  und  $\leq 34$  gilt  $\sigma \geq 4 \text{ N/mm}^2$ .

Der Beton ist in Überwachungsklasse 1 einzuordnen, da eine Druckfestigkeitsklasse von C25/30 vorliegt. Damit muss jedes einzelne Prüfergebnis  $f_{ci}$  das folgende Kriterium (Einzelwertkriterium, Kriterium 2 in Tabelle 4.6) erfüllen [10], [58]:

$$f_{ci} \geq (f_{ck} - 4) \text{ N/mm}^2 \quad (4.10)$$

Für  $f_{ck}$  wird die ermittelte Zieldruckfestigkeit nach Gleichung (4.8), also  $f_{ck}(t = 17,87)$  und für  $f_{ci}$  die umgerechneten Zylinderdruckfestigkeiten aus Tabelle 4.5 eingesetzt.

Tabelle 4.7: Nachweis Kriterium 2 (Einzelwertkriterium) für Beton C25/30

Probekörpername	$f_{ci}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ck}(t = 17,87) - 4$ [N/mm <sup>2</sup> ]	erfüllt?
Z1	19,5		ja
Z2	18,1	18,49	nein
Z3	19,9		ja

Wie zu erkennen ist, wird der Nachweis für die Probekörper Z1 und Z3 erbracht, während das Prüfergebnis des Probekörpers Z2 das Kriterium nicht erfüllt. So mit wird das Einzelwertkriterium nicht erfüllt.

Insgesamt liegen drei Prüfergebnisse vor. Damit muss zusätzlich der Mittelwert aus den auf die Wasserbadlagerung umgerechneten Druckfestigkeiten in Gleichung (4.9) die folgende Bedingung (Mittelwertkriterium, Kriterium 1 in Tabelle 4.6) erfüllen [58]:

$$f_{cm} \geq (f_{ck} + 1) \text{ N/mm}^2 \quad (4.11)$$

$$19,2 \text{ N/mm}^2 \geq (22,49 + 1) \text{ N/mm}^2$$

$$19,2 \text{ N/mm}^2 \leq 23,49 \text{ N/mm}^2 \text{ } \cancel{\text{X}} \quad (4.12)$$

Während der kleinste Einzelwert nur knapp das Kriterium 2 nicht erfüllt, wird der erwartete Mittelwert deutlich unterschritten. Daraus folgt, dass der geprüfte Beton nicht in die Druckfestigkeitsklasse C25/30 eingeordnet werden kann.

Um einen Vergleich mit den Kennwerten aus der Norm im Prüfalter von 28 Tagen zu gewährleisten, erfolgte zu einem späteren Zeitpunkt bei den restlichen bzw. zerstörungsfreien Probekörpern zunächst die Prüfung des Elastizitätsmoduls – worauf im Kapitel 4.2.3 eingegangen wird – und im Anschluss die Ermittlung der Zylinderdruckfestigkeit.

**Tabelle 4.8: Abmessung, Masse und Rohdichte der restlichen Prüfkörper**

Probekörpername	Abmessung $D/L$ [mm]	Masse [kg]	Rohdichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Z4	150,0 / 296,0	12,625	2413,6
Z5	150,0 / 295,0	12,279	2355,4
Z6	150,0 / 295,0	12,304	2360,2

Bis zum Prüftag wurden die Probekörper 10 Tage lang in der Wasserbauhalle direkt neben den Balken bei einer Temperatur von 20 °C und einer relativen Luftfeuchte von 50 % gelagert. Da das effektive Betonalter der Prüfkörper etwa 18 Tage betrug (vgl. Tabelle 4.4) und diese weitere 10 Tage bei einer Temperatur von 20 °C gelagert wurden, ergibt sich damit insgesamt ein wirksames Betonalter von etwa 28 Tagen.

Die geprüften Druckfestigkeiten im Alter von ca. 28 Tagen sind in der untenstehenden Abbildung dargestellt.

<b>Prüfung:</b>	Druckversuch	Herstelldatum:	05.12.2023	11:02
<b>Norm:</b>	Ohne Norm	Probenalter:	45	02:56
<b>Prüfkörper:</b>	Zylinder 150x300	Prüfdatum:	19.01.2024	13:58

Prüfer:

Name	Durchmesser [mm]	Höhe [mm]	Bruchlast [kN]	Festigkeit [MPa]
Z4	150,0	296,0	412,2	23,3
Z5	150,0	295,0	387,3	21,9
Z6	150,0	295,0	429,1	24,3
Mittelwert			23,2	
Std. Abw.			1,19	

**Abbildung 4.26: Auszug aus dem Prüfprotokoll (19.01.2024)**

Da bei der ersten Lagerungsperiode (35,5 Tage) die mittlere relative Luftfeuchte etwa 86 Prozent und bei der zweiten (10 Tage) 50 Prozent betrug, ergibt sich eine mittlere relative Luftfeuchte über den gesamten Lagerungszeitraum von etwa:

$$RH_{\text{mittel}} = \frac{35,5 \cdot 86 \% + 10 \cdot 50 \%}{45,5} \approx 78 \% \quad (4.13)$$

Damit sinkt die mittlere relative Luftfeuchte von 86 auf 78 Prozent. Obwohl der Faktor (0,92) in Gleichung (4.3) für die Umrechnung auf die Referenzlagerung aufgrund der abweichenden relativen Luftfeuchtigkeit immer noch etwas unterschätzt wird, kommt er dennoch der Trockenlagerung nahe und wird somit realistischer.

Im Folgenden werden die geprüften Festigkeiten auf die Wasserbadlagerung umgerechnet und im Anschluss die Annahmeprüfung für ein Betonalter von 28 Tagen durchgeführt.

**Tabelle 4.9:** Umrechnung der geprüften Druckfestigkeiten (vom 19.01.2024) auf die Wasserbadlagerung nach Gleichung (4.3)

Probekörpername	umgerechnete Zylinderdruckfestigkeit $f_{c,cyl,28}$ („Wasserbadlagerung“) [N/mm <sup>2</sup> ]
Z4	21,4
Z5	20,2
Z6	22,4

Die mittlere Betondruckfestigkeit beträgt:

$$f_{cm,cyl,28} = \frac{21,4 + 20,2 + 22,4}{3} = 21,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4.14)$$

**Tabelle 4.10:** Nachweis Kriterium 2 (Einzelwertkriterium) für Beton C25/30

Probekörpername	$f_{ci}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_{ck}(t = 28) - 4$ [N/mm <sup>2</sup> ]	erfüllt?
Z4	21,4		ja
Z5	20,2	21,0	nein
Z6	22,4		ja

**Nachweis Kriterium 1 (Mittelwertkriterium):**

$$f_{cm} \geq (f_{ck} + 1) \text{ N/mm}^2$$

$$21,3 \text{ N/mm}^2 \geq (25 + 1) \text{ N/mm}^2$$

$$21,3 \text{ N/mm}^2 \leq 26,0 \text{ N/mm}^2 \text{ } \cancel{\text{X}} \quad (4.15)$$

Es ist ersichtlich, dass weder das Kriterium des Einzelwerts noch der Nachweis des Mittelwerts erfüllt werden. Daher kann der Beton auch im Prüfalter von 28 Tagen nicht in die Festigkeitsklasse C25/30 eingestuft werden.

Dies kann auf verschiedene Ursachen zurückgeführt werden. Zunächst ist die Wasserzugabe während der Herstellung des Betons, die im Kapitel 4.1.1 beschrieben wurde, als trifftiger Grund zu nennen. Die dadurch bedingte Erhöhung des Wasserzementwertes führt, wie bereits in Kapitel 2.2.1 erläutert, zu einer Verringerung der Betondruckfestigkeit.

Darüber hinaus erfolgte im Rahmen dieser Arbeit die Herstellung der Balken und Probekörper mittels Transportbeton, dessen Eigenschaften sich während des Transports verändern und sich somit nachteilig auf die Druckfestigkeit auswirken können [9]. Die Veränderung der Konsistenz nach dem Transport konnte deutlich beobachtet werden, weshalb auch eine Wasserzugabe stattfand. Der Beton wurde, wie bereits in Kapitel 4.1.1 erwähnt, nicht mit einem Fahrnischer zur Einbaustelle geliefert, sondern vom Fahrnischer in Betonkübel eingebracht und im Anschluss mit einem Anhänger zum Herstellungsort transportiert. Dieser Vorgang kann die Qualität und somit auch die Druckfestigkeit des Betons – unabhängig von der Wasserzugabe – nachteilig beeinflussen.

Der Einfluss der Temperatur und relativer Luftfeuchte während der Lagerungsperiode wurden mittels Ansätzen aus der Literatur berücksichtigt.

Die Ansätze in Gleichung (4.5) und (4.6) zur Berücksichtigung der Lagerungstemperatur sind jedoch nicht als exakte Berechnungen, sondern als vereinfachte mathematische Verknüpfungen zwischen Temperatur und Erhärtungszeit zu verstehen. Die verwendete Gleichung (4.6) für die Bestimmung des wirksamen Betonalters müsste strenggenommen für jede Betonmischung experimentell festgelegt werden [16], [55].

Wie bereits beim Konformitätsnachweis erwähnt, müsste ebenfalls ein Faktor für die Umrechnung auf die Referenzlagerung bestimmt werden. Diese Umrechnung erfolgte hier vereinfacht und auf der sicheren Seite liegend ohne Anpassung des Faktors in Gleichung (4.3). Jedoch ist zu erwähnen, dass der Konformitätsnachweis auch ohne Umrechnung auf die Referenzlagerung – also mit einem Faktor von 1,0 – nicht erfüllt wäre.

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass die Druckfestigkeit, wie bereits in Kapitel 2.2.2 beschrieben, eine streuende Größe darstellt. Obwohl die charakteristische Druckfestigkeit als 5 % - Quantil aller Einzelwerte definiert wird, besteht dennoch eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass dieser Wert unterschritten werden kann.

Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu überschreiten, werden weitere mögliche Faktoren, die zu einer Abminderung der Betondruckfestigkeit führen können, nicht weiter diskutiert. Die Wasserzugabe vor dem Einbau des Betons wird aufgrund ihres erheblichen Einflusses auf die Druckfestigkeit als primäre Ursache betrachtet.

Die Annahmekriterien nach Tabelle 4.6 gelten als eingehalten, wenn sowohl das Einzelwertkriterium als auch das Mittelwertkriterium erfüllt werden. Dies trifft für die Probekörper nicht zu. Wie schon in Kapitel 4.1.1 erwähnt, wurde die

fließfähiger Konsistenz bei der Herstellung der Probekörper beobachtet. Der eingebrachte Beton in den Balken wies demnach eine etwas steifere Konsistenz auf. Somit kann es durchaus möglich sein, dass eine höhere Druckfestigkeit im Balken als in den Probekörpern vorliegt.

Da die Probekörper die Annahmekriterien nicht erfüllen und die Druckfestigkeit des Betons im Balken zu bewerten ist, darf in diesem Fall die Festigkeitsbeurteilung auch am Bauteil gemäß DIN EN 13791 [59] erfolgen [10].

Zu diesem Zweck wurden zu einem späteren Zeitpunkt Bohrkerne aus einem der hergestellten, unbelasteten Balken entnommen und deren Druckfestigkeit geprüft. Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens folgt im nachfolgenden Kapitel.

#### 4.2.2 Druckfestigkeit-Bohrkerne

Für die Entnahme der Proben mithilfe eines Kernbohrgeräts war es zunächst erforderlich, den Balken in kleinere Abschnitte zu teilen. Dazu wurde ein Abbruchhammer verwendet.



Abbildung 4.27: Geteilter Stahlbetonbalken

Durch das Aufbrechen des Betons konnten die Bewehrungsstäbe freigelegt und mithilfe eines Bolzenschneiders durchtrennt werden. Dies ermöglichte die Positionierung der Balkenteile am Kernbohrgerät und die anschließende Probenentnahme.



Abbildung 4.28: entnommene Bohrkerne

Insgesamt wurden sechs Bohrkerne mit einem Durchmesser von 80,0 mm entnommen und deren Rohdichte bestimmt.

Tabelle 4.11: Abmessung, Masse und Rohdichte der Bohrkerne

Bohrkernname	Abmessung $D/L$ [mm]	Masse [g]	Rohdichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
B1	79,6 / 80,8	1005	2499,4
B2	79,5 / 80,6	1002	2504,4
B3	79,6 / 82,4	1022	2492,3
B4	79,7 / 82,2	1022	2492,1
B5	79,5 / 81,6	1021	2520,6
B6	79,6 / 81,8	1004	2466,4

Die entnommenen Proben können als 1:1-Bohrkerne eingestuft werden, da das Verhältnis von der abgeschliffenen Länge zum Durchmesser im Bereich zwischen 0,90 zu 1 und 1,10 zu 1 liegt [60].

Bei der Bohrkernentnahme war es aufgrund der geringen Balkenbreite und der Bewehrungsanordnung unvermeidlich, dass ein Teil des Betonstahls mitgebohrt wurde (siehe Abbildung 4.29).



Abbildung 4.29: Bohrkerne mit Stahlanteil

Die Bohrkerne bestehen daher nicht aus reinem Beton, sondern enthalten auch einen gewissen Anteil an Bewehrungsstahl, was die die Rohdichte der einzelnen Bohrkerne beeinflusst. Die Rohdichten der Bohrkerne sind in Tabelle 4.11 aufgeführt.

Wären das Volumen und die Masse des Betonstahls in den Bohrkernen bekannt, könnte die Rohdichte des reinen Betons berechnet werden. Da diese Informationen jedoch nicht vorhanden sind und ihre Bestimmung den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde, wird auf eine solche Berechnung verzichtet.

Nachdem die Bohrkerne zentrisch auf der unteren Druckplatte der Prüfmaschine zentrisch platziert wurden, erfolgte die Druckfestigkeitsprüfung der Bohrkerne (siehe Abbildung 4.30).

Prüfung:	Druckversuch	Herstelltdatum:	05.12.2023	15:03
Norm:	Ohne Norm	Probenalter:	62	01:19
Prüfkörper:	Zylinder 80x80	Prüfdatum:	05.02.2024	16:22
		Prüfer:		
Name	Durchmesser [mm]	Höhe [mm]	Bruchlast [kN]	Festigkeit [MPa]
1	79,6	80,8	172,1	34,6
2	79,5	80,6	197,9	39,9
3	79,6	82,4	189,6	38,1
4	79,7	82,2	179,6	36,0
5	79,5	81,6	186,9	37,7
6	79,6	81,8	173,2	34,8
Mittelwert				36,8
Std. Abw.				2,07

Abbildung 4.30: Auszug aus dem Prüfprotokoll (05.02.2024)

Die charakteristische Druckfestigkeit des Bauwerksbetons  $f_{ck,is}$  darf wie folgt bewertet werden [61]:

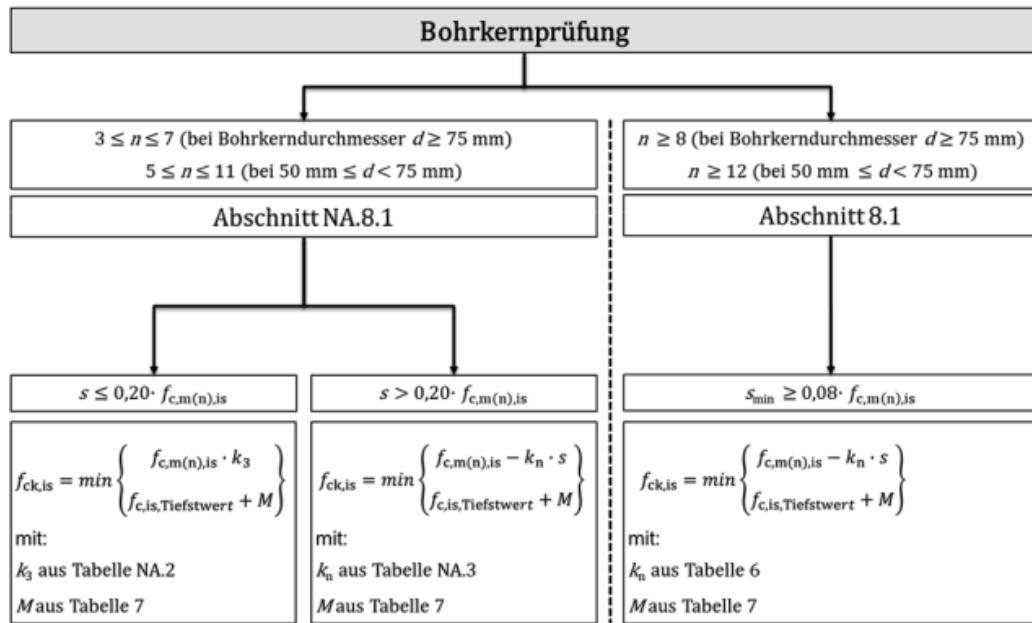


Abbildung 4.31: Vorgehensweise zur Bewertung der charakteristischen Druckfestigkeit von Bauwerksbeton in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang und der Standardabweichung [61]

Insgesamt liegen 6 Prüfergebnisse vor. Die Standardabweichung  $s$  und der Mittelwert der geprüften Bohrkerndruckfestigkeiten  $f_{c,m(n),is}$  können aus Abbildung 4.30 entnommen werden. Damit ergibt sich [61]:

$$s \leq 0,20 \cdot f_{c,m(n),is} \quad (4.16)$$

$$2,07 \leq 0,2 \cdot 36,8$$

$$2,07 \leq 7,36 \quad (4.17)$$

Tabelle 4.12: Beiwert  $k_3$  [61]

<b>n</b>	<b><math>k_3</math></b>
3	0,70
4 bis 5	0,75
6 bis 11	0,80

Tabelle 4.13: auf den kleinsten Wert  $f_{c,is,Tiefstwert}$  anzusetzende Spanne  $M$  [59]

<b><math>f_{c,is,Tiefstwert}</math> [MPa]</b>	<b>Spanne <math>M</math> [MPa]</b>
$\geq 20$	4
$\geq 16 < 20$	3
$\geq 12 < 16$	2
< 12	1

Der kleinste Wert aus der Druckfestigkeitsprüfung beträgt (siehe Abbildung 4.30):

$$f_{ck,is,Tiefstwert} = 34,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Somit ergibt sich für die charakteristische Druckfestigkeit [61]:

$$f_{ck,is} = \min \left\{ f_{c,m(n),is} \cdot k_3, f_{c,is,Tiefstwert} + M \right\} \quad (4.18)$$

$$f_{ck,is} = \min \left\{ 36,8 \cdot 0,8, 34,6 + 4 \right\}$$

$$f_{ck,is} = \min \left\{ 29,4 \text{ N/mm}^2, 38,6 \text{ N/mm}^2 \right\}$$

$$f_{ck,is} = \mathbf{29,4 \text{ N/mm}^2} \quad (4.19)$$

Die ermittelte charakteristische Druckfestigkeit  $f_{ck,is}$  des luftgelagerten Bohrkerns darf mit der charakteristischen Würfeldruckfestigkeit in Tabelle 4.14 gleichgesetzt werden [10], [61].

**Tabelle 4.14: Charakteristische Mindestdruckfestigkeit von Normal- und Schwerbeton im Bauwerk nach [61] für die Einstufung in Druckfestigkeitsklassen nach DIN EN 206-1/DIN 1045-2 [10]**

Druckfestigkeitsklasse nach DIN EN 206-1/ DIN 1045-2	Charakteristische Mindestdruckfestigkeit von Normal- und Schwerbeton im Bauwerk [N/mm <sup>2</sup> ] <sup>1)</sup>	
	f <sub>ck,is,Zylinder</sub>	f <sub>ck,is,Würfel</sub>
C8/10	7	9
C12/15	10	13
C16/20	14	17
C20/25	17	21
C25/30	21	26
C30/37	26	31
C35/45	30	38
C40/50	34	43
C45/55	38	47
C50/60	43	51
C55/67	47	57
C60/75	51	64
C70/85	60	72
C80/95	68	81
C90/105	77	89
C100/115	85	98

<sup>1)</sup> Druckfestigkeit von Bauwerksbeton = 85 % der charakteristischen Druckfestigkeit von genormten Probekörpern.

Die ermittelte charakteristische Druckfestigkeit  $f_{ck,is}$  im Balken kann damit – im Gegensatz zu den Probekörpern – in die Festigkeitsklasse C25/30 zugeordnet werden.

Es ist jedoch zu betonen, dass der Konformitätsnachweis gemäß [58] sich deutlich von der Bewertung der Druckfestigkeit im Bauteil nach [59] unterscheidet. Die Frage, inwiefern die Abschätzung der charakteristischen Druckfestigkeit im Bauteil mithilfe der Bohrkernentnahme verlässlich ist, liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit und wird deshalb nicht weiter behandelt.

### 4.2.3 Elastizitätsmodul

Die Bestimmung des tatsächlichen Elastizitätsmoduls des hergestellten Betons erfolgte an insgesamt fünf Probekörpern. Im Folgenden werden die möglichen Verfahren zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls kurz beschrieben. Anschließend werden die Ergebnisse des angewandten Verfahrens vorgestellt und den Kennwerten aus den Normen gegenübergestellt.

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls (Sekantenmoduls) stellt die DIN EN 12390-13 zwei Verfahren zur Verfügung [10], [62]:

- **Verfahren A:** Zunächst werden drei Vorbelaufungszyklen zur Überprüfung des Versuchsaufbaus durchgeführt. Mit anschließenden drei Belastungszyklen erfolgt die Bestimmung des anfänglichen Elastizitätsmoduls  $E_{C,0}$  und des stabilisierten Elastizitätsmoduls  $E_{C,S}$ .

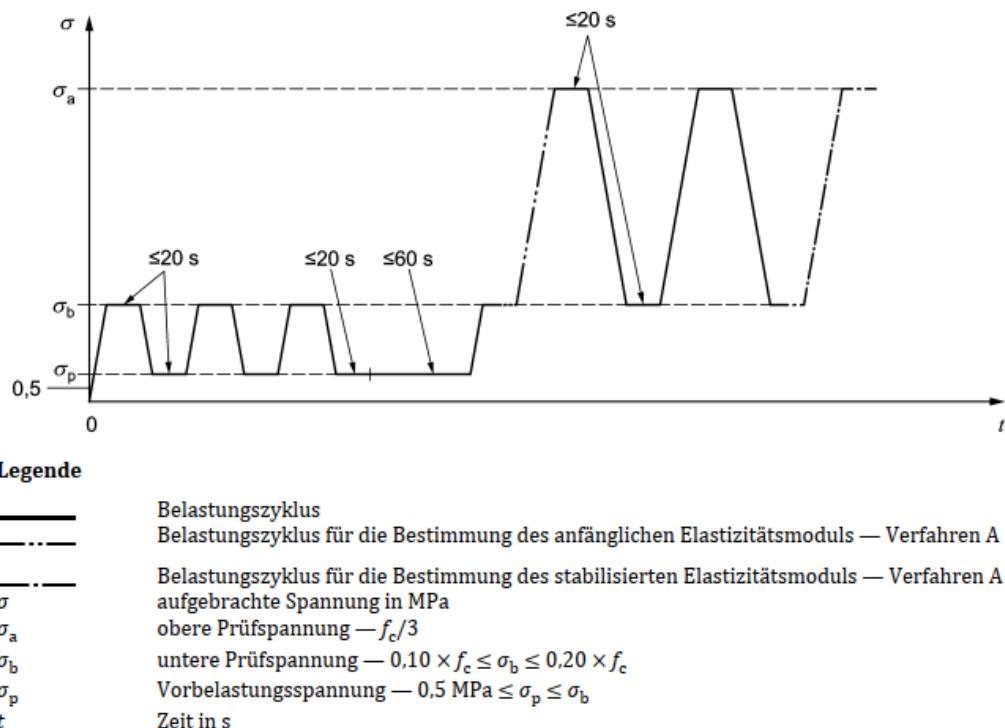
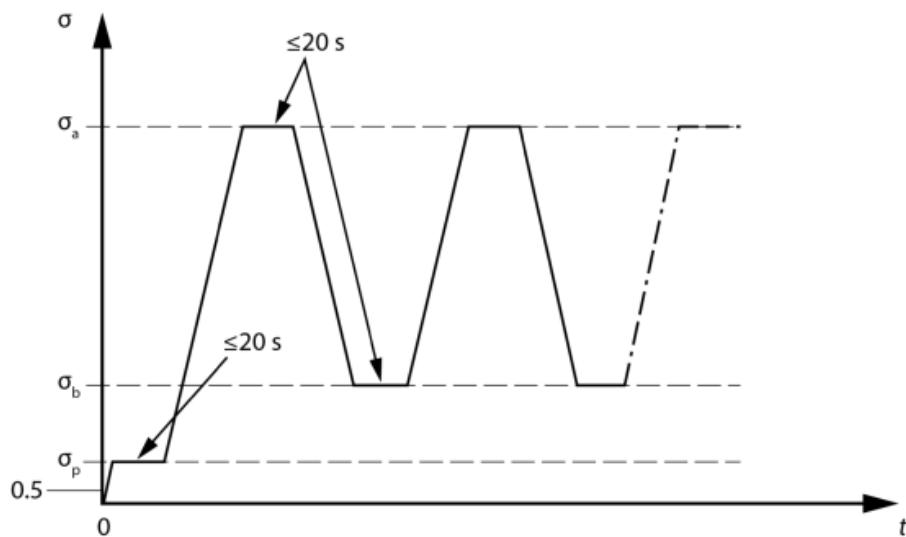


Abbildung 4.32: Prüfzyklus für die Bestimmung des anfänglichen und stabilisierten Elastizitätsmoduls nach Verfahren A [62]

- **Verfahren B:** Ausschließlich drei Belastungszyklen werden zur Bestimmung des stabilisierten Elastizitätsmoduls  $E_{C,S}$  durchgeführt. Die Überprüfung des Versuchsaufbaus erfolgt dabei durch den Vergleich der Dehnungen innerhalb der Belastungszyklen.



**Legende**

— — —	Belastungszyklus
— · —	Belastungszyklus für die Bestimmung des stabilisierten Elastizitätsmoduls — Verfahren B
σ	aufgebrachte Spannung in MPa
σ <sub>a</sub>	obere Prüfspannung: — $f_c/3$
σ <sub>b</sub>	untere Prüfspannung — $0,10 \times f_c \leq \sigma_b \leq 0,20 \times f_c$
σ <sub>p</sub>	Vorbelastungsspannung — $0,5 \text{ MPa} \leq \sigma_p \leq \sigma_b$
t	Zeit in s

Abbildung 4.33: Bestimmung des stabilisierten Elastizitätsmoduls nach Verfahren B [62]

Nach beiden Verfahren ist der stabilisierte Elastizitätsmodul  $E_{C,S}$  (Sekantenmodul) wie folgt definiert [62]:

$$E_{C,S} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_s} = \frac{\sigma_a^m - \sigma_b^m}{\varepsilon_{a,3} - \varepsilon_{b,2}} \quad (4.20)$$

Hierbei ist:

$\sigma_a^m$  Messwert der oberen Prüfspannung,

$\sigma_b^m$  Messwert der unteren Prüfspannung,

$\varepsilon_{a,3}$  mittlere Dehnung bei oberer Prüfspannung beim 3. Belastungszyklus,

$\varepsilon_{b,2}$  mittlere Dehnung bei unterer Prüfspannung beim 2. Belastungszyklus

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Ermittlung des Elastizitätsmoduls nach dem Verfahren B.

Um die obere und untere Prüfspannung festzulegen, war es zunächst erforderlich, an einem Probekörper die Druckfestigkeit  $f_c$  zu bestimmen [62].

Wie bereits in Kapitel 4.2.1 beschrieben, wurde dazu der Probekörper Z1 direkt zerstört. Mithilfe der bekannten Druckfestigkeit von  $f_{c,Z1} \approx 21 \text{ N/mm}^2$  (siehe Abbildung 4.18) wurden die Grenzspannungen wie folgt festgelegt:

$$\sigma_b = 0,1 \cdot f_{c,Z1} = 0,1 \cdot 21 = 2,1 \text{ N/mm}^2 \quad (4.21)$$

$$\sigma_a = 0,3 \cdot f_{c,Z1} = 0,3 \cdot 21 = 6,3 \text{ N/mm}^2 \quad (4.22)$$

Für die Vorbelastungsspannung wurde  $\sigma_p = 1,1 \text{ N/mm}^2$  und für die Haltezeiten  $t = 5 \text{ s}$  angesetzt. Die Prüfgeschwindigkeit betrug  $0,6 \text{ N}/(\text{mm}^2 \cdot \text{s})$ .

Anschließend konnte der Elastizitätsmodul bestimmt werden, wobei der erste Schritt darin bestand, den Messbügel mit beidseitigen Extensometern (Messbereich 2 mm) mittig auf dem jeweiligen Probekörper zu positionieren und diesen auf der unteren Druckplatte zu zentrieren.



Abbildung 4.34: vorbereiteter Probekörper Z2 für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls fand zeitgleich mit der Druckfestigkeitsprüfung statt. Drei Probekörper wurden bei einem wirksamen Betonalter von etwa 18 Tagen untersucht. Die Ermittlung der Elastizitätsmoduln der verbleibenden Zylinder erfolgte bei einem wirksamen Betonalter von 28 Tagen.

Die Messung des Elastizitätsmoduls für jeden Probekörper wurde mehrfach durchgeführt. Die Prüfung beschränkte sich daher nicht auf einen einzigen Durchlauf mit jeweils drei Belastungszyklen, sondern wurde mehrmals wiederholt. Aufgrund dieser wiederholten Messungen werden die Mittelwerte der ermittelten Elastizitätsmoduln zur Gegenüberstellung mit den Kennwerten aus den Normen (DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1) herangezogen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus dem Prüfprotokoll für einen der fünf Probekörper dargestellt. Anschließend erfolgt der Vergleich aller geprüften Elastizitätsmoduln mit den Normkennwerten, die noch an die Gesteinskörnung und das wirksame Betonalter anzupassen sind.

<b>Prüfung:</b>	E-Modul	<b>Herstelldatum:</b>	05.12.2023	15:00
<b>Norm:</b>	EN 12390-13	<b>Probenalter:</b>	35	21:05
<b>Prüfkörper:</b>	Zylinder 150x300	<b>Prüfdatum:</b>	09.01.2024	12:05

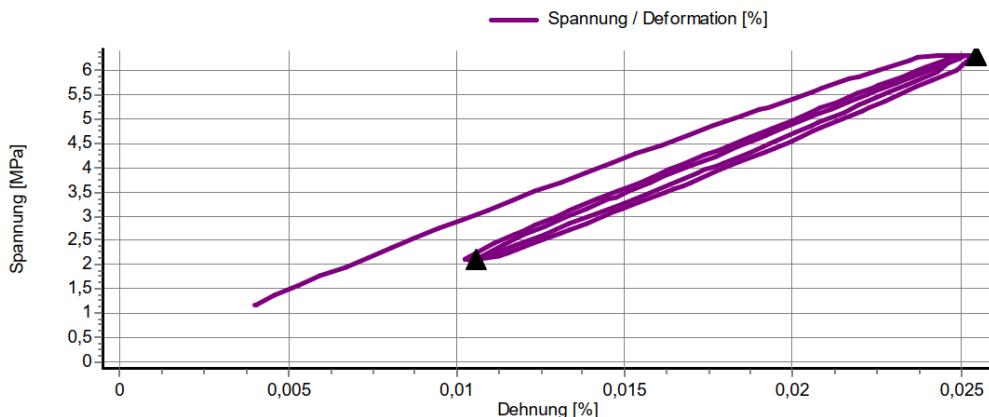
Prüfer:

Feld 1

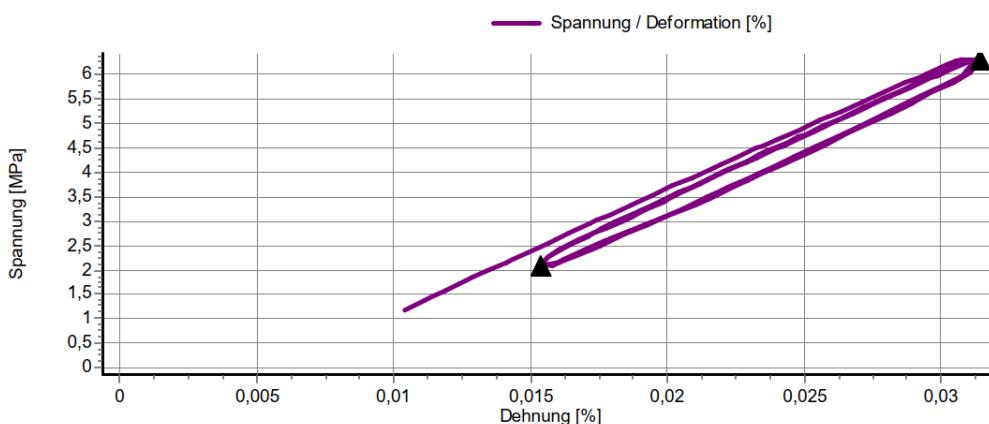
Name	d [mm]	h [mm]	m [g]	p [kg/m³]	EM [MPa]	S <sub>b</sub> [MPa]	S <sub>t</sub> [MPa]	D <sub>b</sub> [%]	D <sub>t</sub> [%]
Z5-2	150,0	297,0	12413,0	2365,1	28280	2,1	6,3	0,0106	0,0254
Z5-3	150,0	297,0	12413,0	2365,1	26160	2,1	6,3	0,0154	0,0314
Z5-4	150,0	297,0	12413,0	2365,1	25780	2,1	6,3	0,0107	0,0270
Mittelwert						2365,1	26700		
Std. Abw.						0,00	1343,71		
d = Durchmesser				p = Rohdichte				S <sub>t</sub> = obere Spannung	
h = Höhe				EM = E-Modul				D <sub>b</sub> = untere Dehnung	
m = Masse				S <sub>b</sub> = untere Spannung				D <sub>t</sub> = obere Dehnung	

Abbildung 4.35: Ausschnitt aus dem Prüfprotokoll zum Probekörper Z2 (09.01.2024)

**Prüfkörper Z5-2**



**Prüfkörper Z5-3**



**Prüfkörper Z5-4**

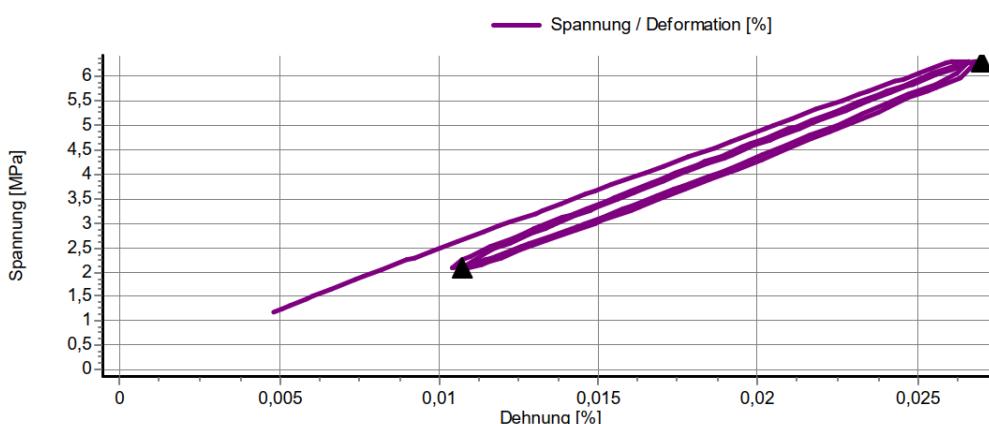


Abbildung 4.36: Spannungs-Dehnungs-Diagramm zu den jeweiligen Durchläufen mit jeweils drei Belastungszyklen (Probekörper Z2, 09.01.2024)

Mit der vorhandenen Gesteinskörnung (Gabbro) und nach Tabelle 2.4 ergibt sich für die Modifikation des Elastizitätsmoduls ein Beiwert von  $\alpha_i = 1,2$ .

Nach Gleichung (2.3) beträgt der angepasste E-Modul aus DIN EN 1992-1-1:

$$E_{cm,DIN\,EN\,1992-1-1} = 31500 \frac{N}{mm^2} \cdot 1,2 = \mathbf{37800} \frac{N}{mm^2} \quad (4.23)$$

und aus DIN 1045-1:

$$E_{cm,DIN\,1045-1} = 26700 \frac{N}{mm^2} \cdot 1,2 = \mathbf{32040} \frac{N}{mm^2} \quad (4.24)$$

Diese modifizierten Kennwerte beziehen sich auf ein Betonalter von 28 Tagen. Für ein wirksames Betonalter von 17,87 Tagen (vgl. Tabelle 4.4) ergibt sich unter Anwendung von Gleichung (2.31) der Elastizitätsmodul aus DIN EN 1992-1-1 zu:

$$E_{cm,DIN\,EN\,1992-1-1}(t = 17,87) = 0,977 \cdot 37800 = \mathbf{36930} \frac{N}{mm^2} \quad (4.25)$$

und aus DIN 1045-1 zu:

$$E_{cm,DIN\,1045-1}(t = 17,87) = 0,977 \cdot 32040 = \mathbf{31303} \frac{N}{mm^2} \quad (4.26)$$

Mit den angepassten Normkennwerten können nun die geprüften E-Moduli verglichen werden.

**Tabelle 4.15: Vergleich der geprüften E-Moduli mit den angepassten Kennwerten aus DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1 für ein wirksames Betonalter von 17,87 Tagen**

Probekörpername	geprüfter E-Modul $E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	E-Modul nach DIN EN 1992-1-1		E-Modul nach DIN 1045-1	
		$E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		$E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	
Z2	26700				
Z3	27900		36930		31303
Z4	25700				

**Tabelle 4.16: Vergleich der geprüften E-Moduli mit den angepassten Kennwerten aus DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1 für ein wirksames Betonalter von etwa 28 Tagen**

Probekörpername	geprüfter E-Modul $E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	E-Modul nach DIN EN 1992-1-1	E-Modul nach DIN 1045-1
		$E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_{cm}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
Z4	26100		
Z5	31700	37800	32040
Z6	31600		

Wie aus Tabelle 4.15 und Tabelle 4.16 ersichtlich, erreichen die geprüften Elastizitätsmoduli weder für ein wirksames Betonalter von 17,87 Tagen noch für 28 Tage die Normkennwerte. Besonders auffällig ist die große Abweichung im Vergleich zum angepassten Elastizitätsmodul nach DIN EN 1992-1-1. Lediglich die Ergebnisse der Probekörper Z5 und Z6 zeigen eine gute Übereinstimmung mit dem modifizierten Elastizitätsmodul gemäß DIN 1045-1.

Eine mögliche Erklärung für den deutlich niedrigeren Messwert des Probekörpers Z4 in Tabelle 4.16 könnte eine Vorbeschädigung während der mehrfachen Messungen im Prüfalter von etwa 18 Tagen sein.

Der Elastizitätsmodul wird im Wesentlichen von der Gesteinskörnung, aber auch vom Wasserzementwert beeinflusst [10]. Daher kann die Wasserzugabe während der Herstellung der Probekörper ebenfalls zu einem niedrigeren Elastizitätsmodul führen.

In Kapitel 2.2.4 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Kennwerte aus der Norm als Richtwerte zu verstehen sind und erheblichen Schwankungen unterliegen. Zudem bestärkte der Vergleich zwischen DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1 (siehe Abbildung 2.15) die Unverlässlichkeit dieser Kennwerte. Aufgrund dieser Tatsache werden die Ergebnisse in dieser Arbeit nicht weiter diskutiert.

### 4.3 Auswertung

Im Folgenden werden zunächst die Verformungsmesswerte während dem Positionieren, Ausrichten und Belasten der Balken dargestellt und ausgewertet.

**Tabelle 4.17: Verformungsmesswerte während dem Positionieren, Ausrichten und Belasten der Balken**

Uhrzeit [-]	Zeitpunkt [-]	w <sub>Balken,1</sub> [mm]	w <sub>Balken,2</sub> [mm]	w <sub>Balken,3</sub> [mm]	w <sub>Balken,4</sub> [mm]	Randinformation [-]
14:05:39	(1)	2,261	-	-	-	nach Auflegen, Richten, Lastaufbringung Balken 1
14:05:59	(2)	2,268	-	-	-	warten
14:06:01	(3)	2,269	-	-	-	warten
14:07:09	(4)	2,371	-	-	-	warten
<b>14:08:11</b>	<b>(5)</b>	<b>3,115</b>	-	-	-	<b>nach Auflegen Balken 2</b>
14:08:14	(6)	3,176	-	-	-	warten
<b>14:11:54</b>	<b>(7)</b>	<b>3,085</b>	-	-	-	<b>nach Richten, Lastaufbringung Balken 2</b>
14:14:46	(8)	-	1,988	-	-	warten
14:14:50	(9)	-	2,002	-	-	warten
<b>14:18:30</b>	<b>(10)</b>	-	<b>3,223</b>	-	-	<b>nach Auflegen Balken 3</b>
14:22:40	(11)	<b>4,202</b>	-	-	-	nach Richten, Lastaufbringung Balken 3
14:22:44	(12)	-	3,378	-	-	warten
14:24:51	(13)	-	-	1,871	-	warten
14:25:00	(14)	-	-	1,888	-	warten
14:25:08	(15)	-	3,615	-	-	warten
14:25:12	(16)	<b>4,357</b>	-	-	-	warten
14:25:49	(17)	-	-	<b>1,925</b>	-	warten
<b>14:28:09</b>	<b>(18)</b>	-	-	<b>2,459</b>	-	<b>nach Auflegen Balken 4, Messbasis bewegt</b>
14:28:14	(19)	-	-	<b>2,462</b>	-	warten
14:28:48	(20)	<b>4,771</b>	-	-	-	warten
14:28:52	(21)	-	<b>4,138</b>	-	-	warten
14:28:56	(22)	-	-	<b>2,479</b>	-	nach Richten, Lastaufbringung Balken 4
14:39:49	(23)	-	-	-	<b>0,971</b>	warten
14:39:59	(24)	<b>5,003</b>	-	-	-	warten
14:40:04	(25)	-	<b>4,460</b>	-	-	warten
14:40:11	(26)	-	-	<b>2,935</b>	-	warten
14:40:16	(27)	-	-	-	<b>0,982</b>	warten
14:40:39	(28)	-	-	-	<b>0,988</b>	warten
14:42:55	(29)	-	-	-	<b>1,015</b>	warten
14:43:01	(30)	<b>5,012</b>	-	-	-	warten
14:43:05	(31)	-	<b>4,487</b>	-	-	warten
14:43:09	(32)	-	-	<b>2,944</b>	-	warten
14:43:13	(33)	-	-	-	<b>1,017</b>	warten

<span style="background-color: #9ACD32; width: 15px; height: 15px;"></span>	Messwerte brauchbar
<span style="background-color: #FFFF00; width: 15px; height: 15px;"></span>	Messwerte noch brauchbar
<span style="background-color: #FF0000; width: 15px; height: 15px;"></span>	Messwerte unbrauchbar

In Tabelle 4.17 sind die Messwerte der Anfangsverformung nach der Zeit dargestellt. Wie bereits in Kapitel 4.1.3 erläutert, wurden die Balken nacheinander auf das Auflager gesetzt, gerichtet und anschließend mit Gewichtsscheiben (50 kg) belastet. Je Balken wurde abgewartet, bis sich die Verformungszunahme deutlich verzögerte. Danach wurde der nächste Balken auf das Auflager gelegt, ausgerichtet, mit Gewichtsscheiben belastet und erneut abgewartet, bis die Zunahme der Verformung deutlich abnahm. Die Verformung infolge des Eigengewichtes konnte hierbei nicht erfasst werden, da die Messung der Durchbiegung des Balkens erst nach dessen Ausrichtung gestartet wurde.

Die in Tabelle 4.17 aufgeführten Verformungswerte der einzelnen Balken erscheinen nicht bei jeder Uhrzeit sinnvoll. Besonders das Positionieren und Ausrichten des nächsten Balkens beeinflusste signifikant die Messwerte der bereits platzierten und belasteten Balken. Da für jeden Balken nach dessen Belastung eine deutlich verzögerte Verformungszunahme beobachtet wurde, erscheinen die plötzlichen Sprünge in den Messwerten unplausibel. Ein Hinweis darauf ist, dass diese Sprünge immer zeitgleich mit dem Platzieren und Ausrichten des nächsten Balkens auftraten. Die rot markierten Zellen in Tabelle 4.17 kennzeichnen daher Messwerte, die aufgrund von Bewegungen sind.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Durchbiegung ist schematisch in Abbildung 4.37 dargestellt. Dabei wird deutlich, dass ein gewisser Fehler in die Berechnung einfließt, da der Messwert (Zeitpunkt (3')) in untenstehender Abbildung) unmittelbar vor dem Positionieren des nächsten Balkens unbekannt ist.

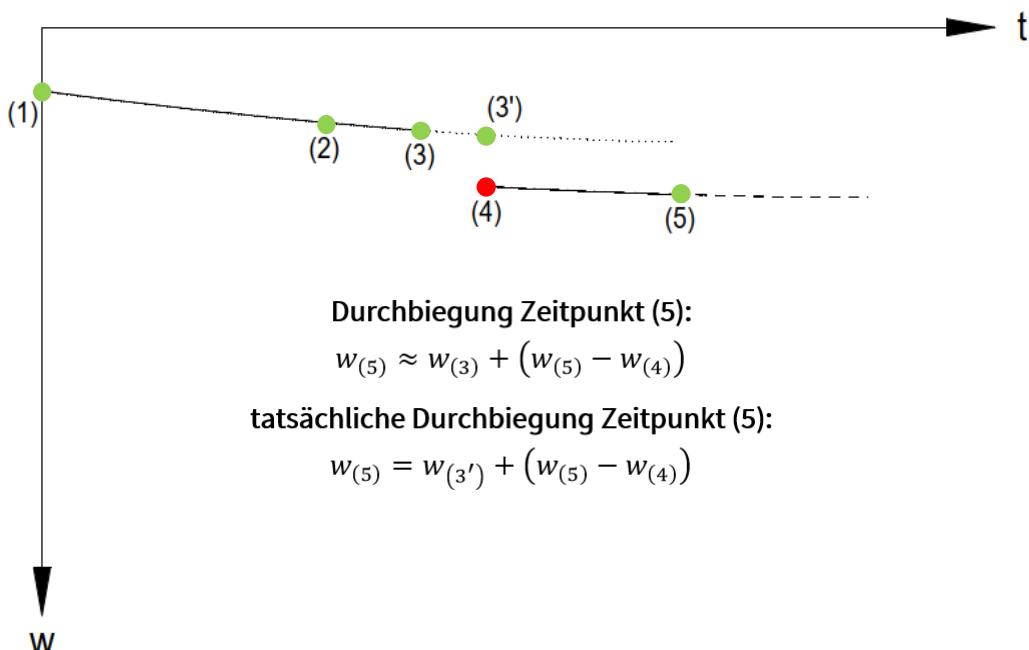


Abbildung 4.37: beispielhafte Darstellung zur Ermittlung der Durchbiegung basierend auf den erfassten Messwerten

- **Balken 1:**

Bei der Betrachtung des Zeitraums von (1) bis (4) ist zu erkennen, dass die Durchbiegung innerhalb von 1,5 Minuten um:

$$\Delta w_{(4)-(1)} = w_{(4)} - w_{(1)} = 2,371 \text{ mm} - 2,261 \text{ mm} = 0,11 \text{ mm} \quad (4.27)$$

zunahm. Zum darauffolgenden Zeitpunkt (5) – nachdem Balken 2 auf das Auflager gesetzt wurde – ist ein deutlicher Sprung in der Durchbiegung von 0,744 mm zu beobachten, der sich innerhalb von etwa einer Minute eingestellt hat. Dies erscheint wenig plausibel, da zuvor eine Verformungszunahme von nur 0,11 mm innerhalb von 1,5 Minuten festgestellt wurde, und die Verformung plötzlich um das etwa Siebenfache innerhalb einer Minute zunimmt. Es kann daher angenommen werden, dass dieser Anstieg der Durchbiegung hauptsächlich auf die Bewegung zurückzuführen ist, die durch das Auflegen des zweiten Balkens verursacht wurde. Ebenso erscheint der Messwert zum Zeitpunkt (7) – nachdem der zweite Balken ausgerichtet wurde – nicht plausibel, da hierbei eine Abnahme der Verformung des Balkens zu erkennen ist.

Nachdem der dritte Balken auf das Auflager gesetzt und gerichtet wurde, ist erneut eine deutliche Zunahme der Verformung zum Zeitpunkt (11) zu beobachten. Zwischen der Zeit (10) und (8) fehlen Messwerte. Daher kann hier nicht pauschal behauptet werden, dass sich die Verformungszunahme größtenteils durch Bewegungen einstellte. Denn die Durchbiegung nimmt – auch wenn in einem geringen Maße – weiterhin zu (wie auch in Abbildung 4.37 verdeutlicht). Aus diesem Grund wird der Messwert zum Zeitpunkt (11) wie folgt abgeschätzt:

$$\Delta w_{(11)-(7)} \approx \frac{\left( \frac{\Delta w_{(4)-(1)}}{\Delta t_{(4)-(1)}} + \frac{\Delta w_{(16)-(11)}}{\Delta t_{(16)-(11)}} \right)}{2} \cdot \Delta t_{(11)-(7)} \quad (4.28)$$

$$\Delta w_{(11)-(7)} \approx \frac{\left( \frac{2,371 - 2,261}{90} + \frac{4,357 - 4,202}{152} \right)}{2} \cdot 646$$

$$\Delta w_{(11)-(7)} \approx 0,724 \text{ mm}$$

$$w_{(\sim 11)} \approx w_{(7)} + \Delta w_{(11)-(7)} \quad (4.29)$$

$$w_{(\sim 11)} \approx 3,085 \text{ mm} + 0,724 \text{ mm} = 3,809 \text{ mm}$$

Der erste Faktor in Gleichung (4.28) stellt eine Abschätzung der Verformungszunahme pro Sekunde vom Zeitabschnitt (7) bis (11) dar, indem der Mittelwert der Verformungszunahme pro Sekunde aus Zeitabschnitt (1) bis (4) und (11) bis (16) gebildet wird.

Die berechnete Verformungszunahme  $\Delta w_{(11)-(7)}$  ergibt sich aus dem Produkt des Mittelwertes der Verformungszunahme pro Sekunde (1. Faktor in Gleichung (4.28)) und der Zeit in Sekunden vom Zeitpunkt (7) bis (11) (2. Faktor in Gleichung (4.28)).

Damit erfolgt in Gleichung (4.29) die Abschätzung des Messwertes zum Zeitpunkt (11). Dieser Wert wird für die nachfolgende Berechnung der Verformung in herangezogen. Daher wird die Differenz zwischen dem tatsächlichen Messwert zum Zeitpunktes (11) und dem berechneten Wert  $w_{(\sim 11)}$  ermittelt. Es wird angenommen, dass diese Differenz durch das Auflegen und Richten von Balken 3 verursacht wird und entsprechend von der Verformung subtrahiert.

Beim Anbringen des vierten Balkens auf das Auflager kam es durch einen Stoß mit dem Fuß zu einer leichten Verschiebung der Messbasis. Die Messwerte für die Balken 1-3 besitzen somit keine Gültigkeit. Die annähernd gleiche Messwertänderung bei den Balken 1 bis 3 nach der Positionierung des letzten Balkens bestärkt die Annahme, dass die Verformungszunahme überwiegend durch die Bewegung der Messbasis verursacht wurde.

Damit lässt sich die die Anfangsverformung für Balken 1 wie folgt berechnen:

$$w_1 = w_{(4)} + (w_{(6)} - w_{(5)}) + (w_{(16)} - w_{(7)}) + (w_{(30)} - w_{(20)}) - (w_{(11)} - w_{(\sim 11)}) \quad (4.30)$$

$$w_1 = 2,371 + (3,176 - 3,115) + (4,357 - 3,085) + (5,012 - 4,771) - (4,202 - 3,809)$$

$$w_1 = 3,552 \text{ mm}$$

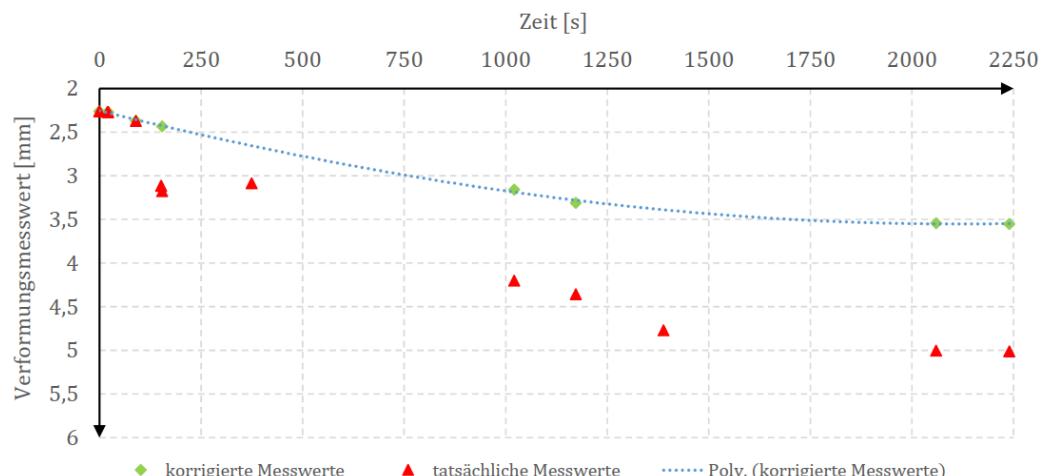


Abbildung 4.38: Darstellung der tatsächlichen und bereinigten Messwerte für Balken 1

- **Balken 2:**

$$w_2 = w_{(9)} + (w_{(15)} - w_{(10)}) + (w_{(31)} - w_{(21)}) \quad (4.31)$$

$$w_2 = 2,002 + (3,615 - 3,223) + (4,487 - 4,138)$$

$$w_2 = 2,743 \text{ mm}$$

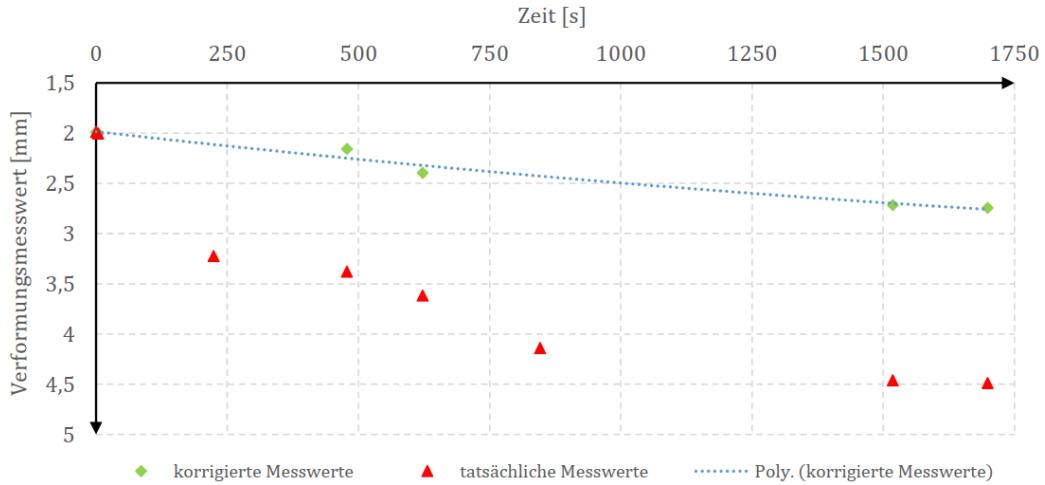


Abbildung 4.39: Darstellung der tatsächlichen und bereinigten Messwerte für Balken 2

- **Balken 3:**

$$w_3 = w_{(17)} + (w_{(32)} - w_{(18)}) \quad (4.32)$$

$$w_3 = 1,925 + (2,944 - 2,459)$$

$$w_3 = 2,410 \text{ mm}$$

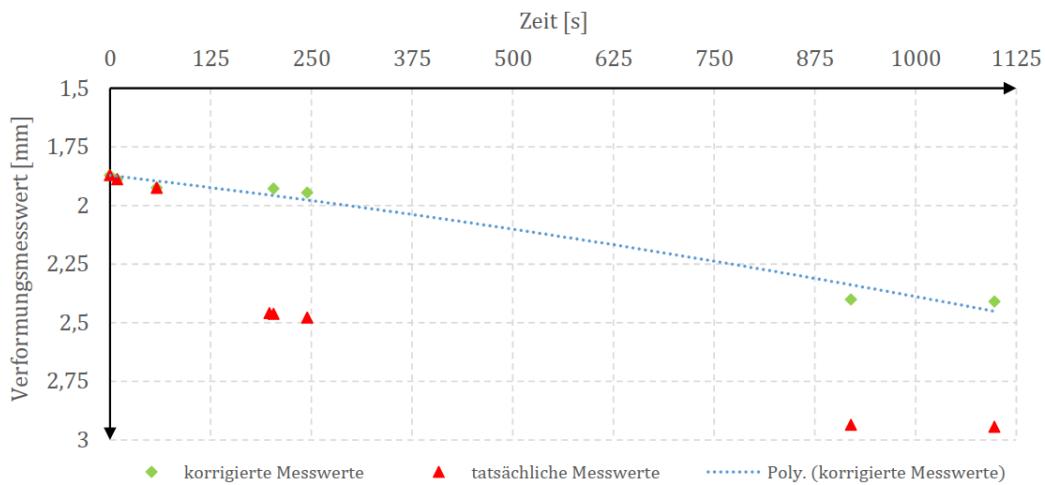


Abbildung 4.40: Darstellung der tatsächlichen und bereinigten Messwerte für Balken 3

- **Balken 4:**

$$w_4 = w_{(33)} \quad (4.33)$$

$$w_4 = \mathbf{1,017 \text{ mm}}$$

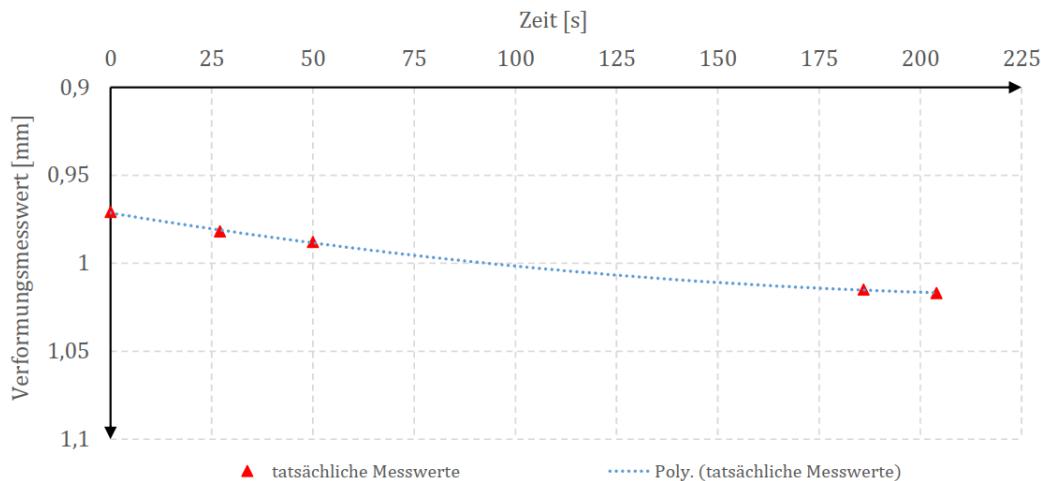


Abbildung 4.41: Darstellung der tatsächlichen Messwerte für Balken 4

Für die elastische Verformung infolge des Eigengewichts liegen keine Messwerte vor. Daher wird diese Verformung mithilfe des geprüften Elastizitätsmoduls berechnet und dazu addiert. Dazu wird der Mittelwert der geprüften Elastizitätsmoduln im Alter von etwa 18 Tagen (aus Tabelle 4.15) gebildet:

$$E_{cm} = \frac{E_{cm,z2} + E_{cm,z3} + E_{cm,z4}}{3} \quad (4.34)$$

$$E_{cm} = \frac{26700 + 27900 + 25700}{3} = \mathbf{26767 \frac{N}{mm^2}} \quad (4.35)$$

Trotz der ursprünglichen Absicht, die Balken mit einer Querschnittshöhe von 8,0 cm herzustellen, wurde festgestellt, dass die tatsächliche Höhe im Durchschnitt etwa 8,5 cm beträgt.

**Biegemoment in Feldmitte infolge des Eigengewichts:**

$$M_{y,Feld,g_k} = \left( 0,15 \text{ m} \cdot 0,085 \text{ m} \cdot 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right) \cdot \frac{(2,5 \text{ m})^2}{8} \quad (4.36)$$

$$M_{y,Feld,g_k} = \mathbf{0,249 \text{ kNm}} \quad (4.37)$$

**Trägheitsmoment im Zustand I:**

$$I_y^I = 15 \text{ cm} \cdot \frac{(8,5 \text{ cm})^3}{12} = 767,7 \text{ cm}^4 \quad (4.38)$$

**elastische Verformung in Feldmitte:**

$$w_{\text{el},g_k} = \frac{\frac{5}{12} \cdot 0,249 \text{ kNm} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5 \text{ m}}{2} \cdot 2,5 \text{ m}}{26767 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \cdot 1000 \cdot 767,7 \text{ cm}^4 \cdot \frac{1}{100^4}} \quad (4.39)$$

$$w_{\text{el},g_k} = 0,00079 \text{ m} = 0,79 \text{ mm} \quad (4.40)$$

Damit ergeben sich die in Tabelle 4.18 dargestellten Anfangsverformungen für die einzelnen Balken.

**Tabelle 4.18: Anfangsverformung  $w_{i,a}$**

Balken	Anfangsverformung $w_{i,a} = w_i + w_{\text{el},g_k} [\text{mm}]$
1	$3,552 + 0,79 = 4,34$
2	$2,743 + 0,79 = 3,53$
3	$2,410 + 0,79 = 3,20$
4	$1,017 + 0,79 = 1,81$

Es ist nochmals ausdrücklich zu betonen, dass die ermittelte Anfangsverformung keine exakte Berechnung darstellt. Sie basiert auf den Annahmen, die bei der Auswertung der Messdaten getroffen wurden. Zudem wurde die elastische Verformung aufgrund einer nicht realisierbaren Messwertaufzeichnung mithilfe Gleichung (4.34) berechnet und entsprechend dazu addiert.

Nach der Erfassung der Messwerte für die Anfangsverformung wurden die Messwerte auf den Ausgangswert Null zurückgesetzt.

Nachfolgend werden die aufgezeichneten Balkenverformungen über den Belastungszeitraum dargestellt. Die unterschiedlichen Belastungszeiträume sind auf das Überschreiten des Messbereiches zurückzuführen, wodurch die Erfassung der weiteren Messwerte nicht möglich war.

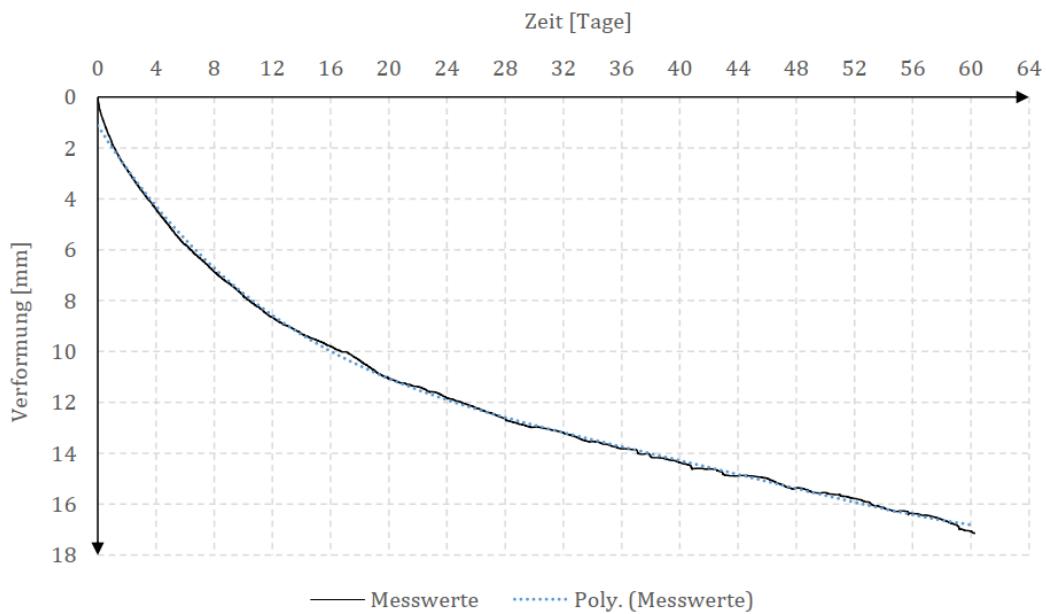


Abbildung 4.42: Darstellung der Verformungsmesswerte von Balken 1 über den Belastungszeitraum (09.01.2024 bis 09.03.2024)

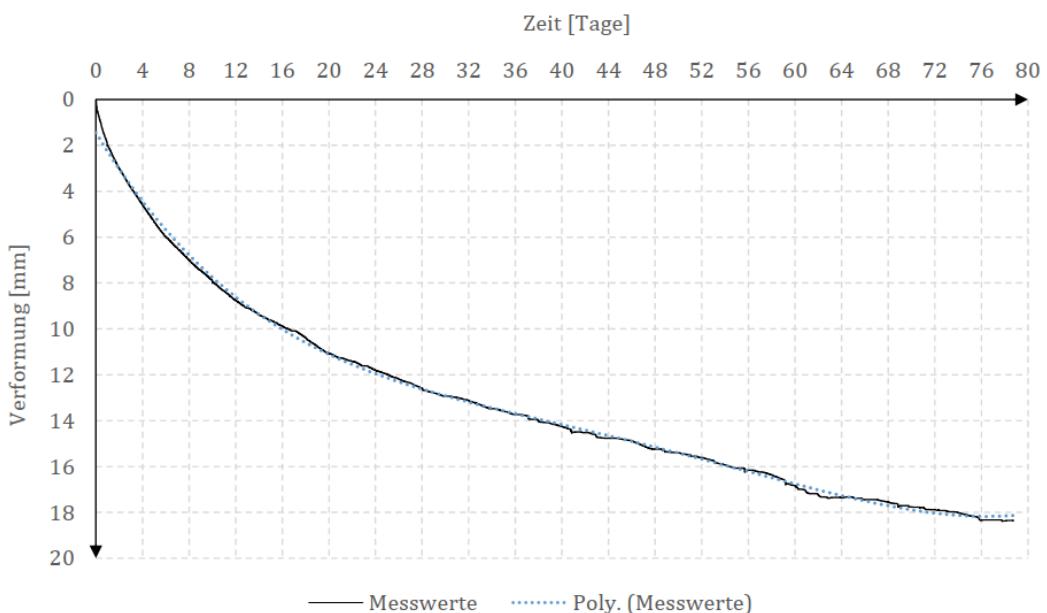


Abbildung 4.43: Darstellung der Verformungsmesswerte von Balken 2 über den Belastungszeitraum (09.01.2024 bis 28.03.2024)

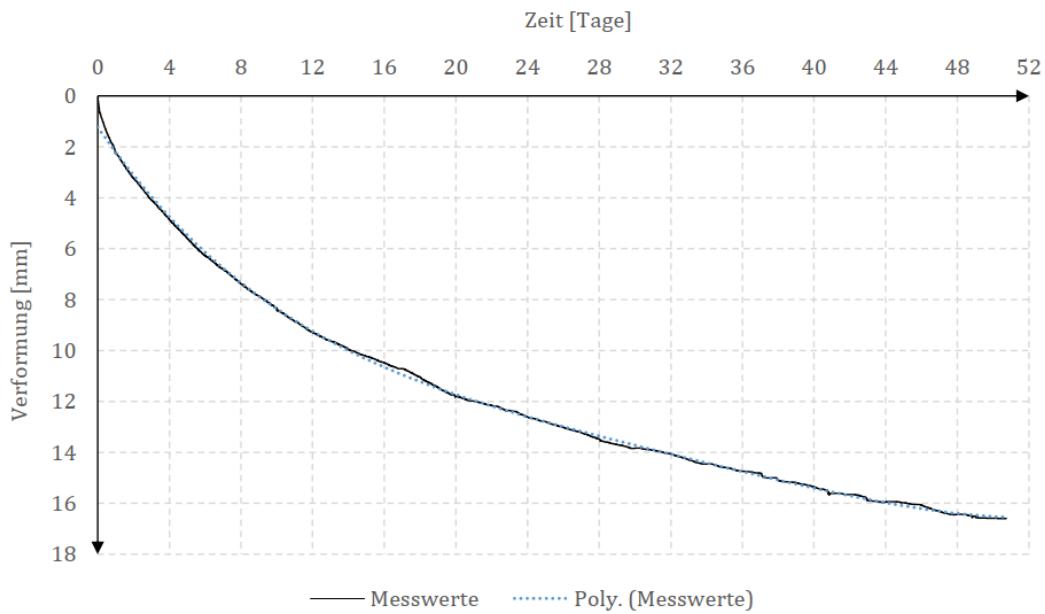


Abbildung 4.44: Darstellung der Verformungsmesswerte von Balken 3 über den Belastungszeitraum (09.01.2024 bis 29.02.2024)

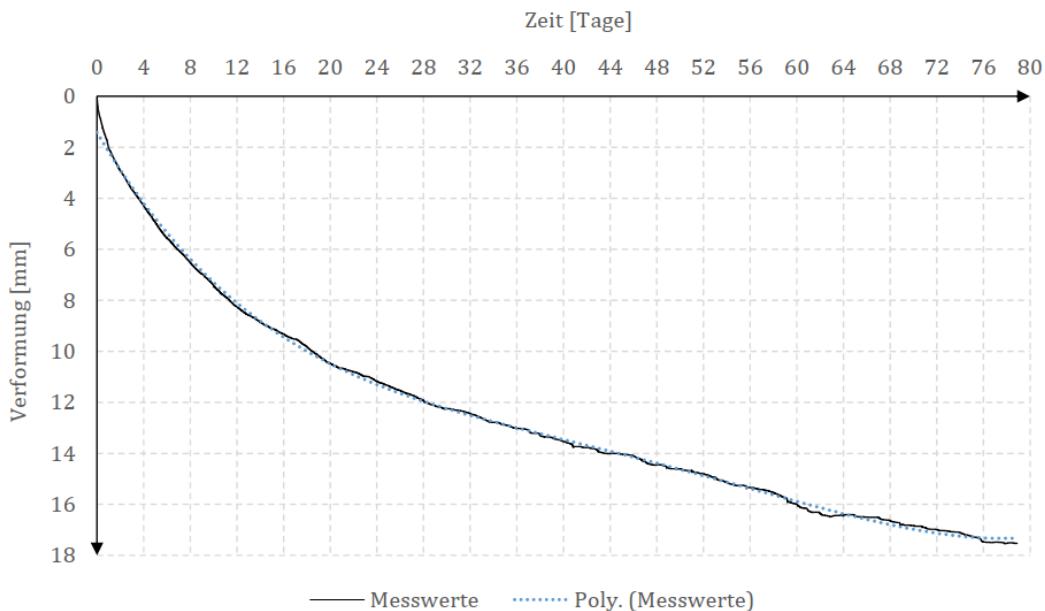


Abbildung 4.45: Darstellung der Verformungsmesswerte von Balken 3 über den Belastungszeitraum (09.01.2024 bis 28.03.2024)

Abbildung 4.46 zeigt die Gegenüberstellung der Balkenverformungen über den Belastungszeitraum. Während Balken 3 die größte Verformung aufweist, ist bei Balken 4 die kleinste Verformung zu beobachten. Bemerkenswerterweise zeigen Balken 2 und 3 sehr ähnliche Messwerte, was auf ähnliche Materialeigenschaften hindeuten könnte.

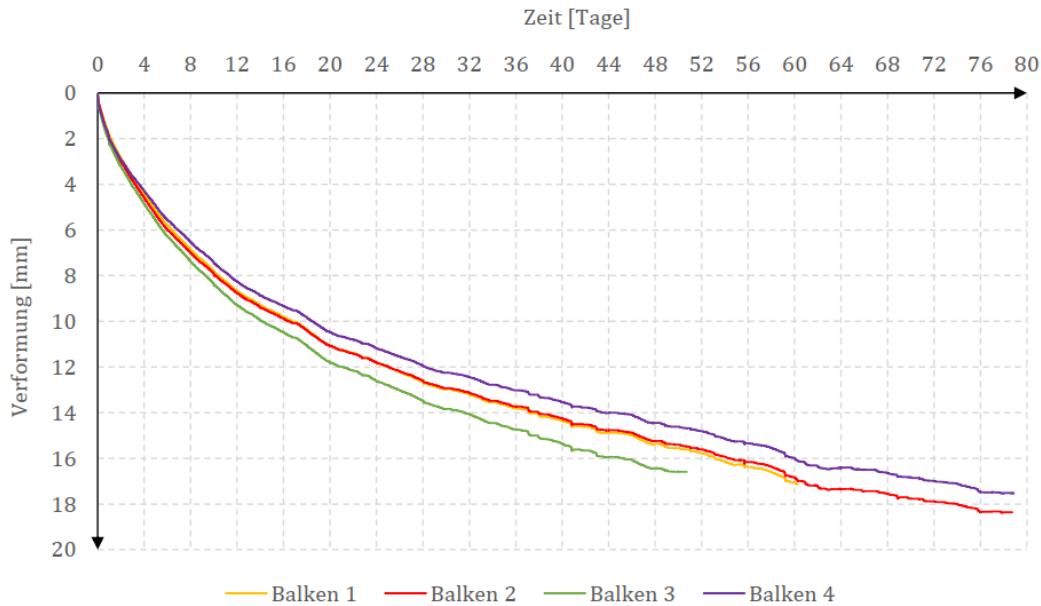


Abbildung 4.46: Vergleich der Balkenverformungen

Bei allen Balken ist eine unterproportionale Zunahme der Verformung im Laufe der Zeit bei konstanter Belastung zu erkennen. Dieses Verhalten ist typisch für das Kriechen des Betons. Ein Vergleich des Verformungsverlaufs der Balken über die Zeit mit dem Dehnungsverlauf in Abbildung 2.24 – vom Zeitpunkt der Belastung bis zur Entlastung – zeigt deutliche Ähnlichkeiten. Daher kann der vorliegende Verformungsverlauf hauptsächlich auf das Kriechen zurückgeführt werden.

Aus Abbildung 4.46 wird deutlich, dass die Verformungsaufzeichnung für Balken 3 nach einem Belastungszeitraum von etwa 50 Tagen aufgrund der Überschreitung des Messbereichs endet. Um einen direkten Vergleich der Messdaten zu ermöglichen, wird die Gesamtverformung für einen Belastungszeitraum von 50 Tagen – unter Berücksichtigung der Anfangsverformung – in Tabelle 4.19 dargestellt.

Tabelle 4.19: Gesamtverformung  $w_{i,ges}$  für  $t = 50$  Tage

Balken	Gesamtverformung
	$w_{i,ges}(t = 50 \text{ d}) = w_{i,a} + w_i(t = 50 \text{ d}) [\text{mm}]$
1	$15,55 + 4,34 = 19,89$
2	$15,40 + 3,53 = 18,93$
3	$16,58 + 3,20 = 19,78$
4	$14,61 + 1,81 = 16,42$

Für die Größe der Verformung spielt neben dem Kriecheinfluss auch die Rissbildung eine wichtige Rolle. Da die Zugfestigkeit eine sehr stark streuende Größe darstellt, wurden entsprechend unterschiedliche Rissbilder beobachtet.



Abbildung 4.47: Rissbilder (rot markiert)

Im nachfolgenden Kapitel wird der Vergleich der gemessenen Verformung mit den verschiedenen Berechnungsansätzen aufgezeigt. Dazu wird unter anderem auch die in Gleichung (4.42) gebildete mittlere Verformung  $w_{m,ges}(t = 50 d)$  herangezogen.

$$w_{m,ges}(t = 50 d) = \frac{w_{1,ges} + w_{2,ges} + w_{3,ges} + w_{4,ges}}{4} \quad (4.41)$$

$$w_{m,ges}(t = 50 d) = \frac{19,89 + 18,93 + 19,78 + 16,42}{4} = \mathbf{18,76 \text{ mm}} \quad (4.42)$$

#### 4.4 Vergleich der gemessenen Verformung mit den verschiedenen Berechnungsansätzen

In der Praxis sind die genauen Kennwerte des Betons und der exakte Belastungszeitpunkt in der Regel unbekannt. Daher wird die Berechnung der Balkendurchbiegung zunächst auf Grundlage von Normkennwerten durchgeführt, wobei Annahmen für die Ermittlung der Kriech- und Schwindbeiwerte getroffen werden.

Zwischen den Normen DIN EN 1992-1-1 [19] und DIN 1045-1 [18] gibt es hinsichtlich des Elastizitätsmoduls und des Schwindbeiwertes signifikante Unterschiede, die bereits in den Grundlagen dieser Arbeit erläutert wurden. Um die Auswirkungen dieser Unterschiede zu untersuchen, werden die Balkenverformungen sowohl mit den Kennwerten aus DIN 1045-1 als auch mit denen aus DIN EN 1992-1-1 berechnet und anschließend mit den Messwerten verglichen.

Im nächsten Schritt erfolgt der Vergleich der Messwerte mit den Verformungen, die unter Verwendung von Laborkennwerten berechnet wurden. Für die Ermittlung des Kriech- und Schwindparameters wird zudem der „genaue“ Belastungszeitpunkt und Austrocknungsbeginn angesetzt.

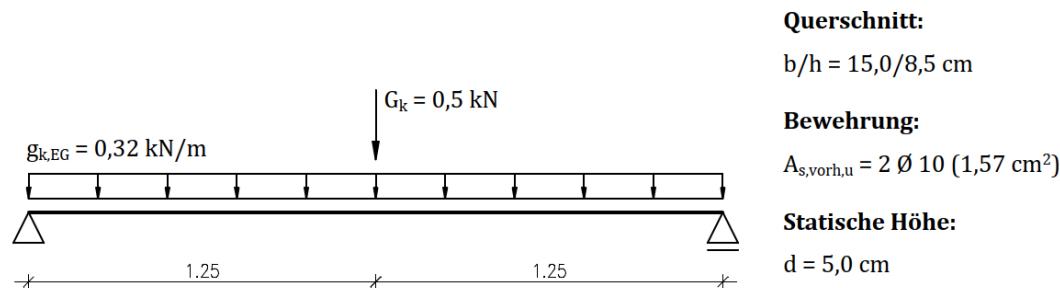


Abbildung 4.48: statisches System und Belastung der Balken

##### Balkenverformung in Feldmitte mit Normkennwerten

Für die Ermittlung des Schwind- und Kriechbeiwertes werden folgende Annahmen getroffen:

- $t_s = 28$  Tage (Austrocknungsbeginn, Ausschalzeitpunkt)
- $t_0 = 28$  Tage (Belastungsalter)
- $t = 78$  Tage (Betrachtungszeitpunkt)
- $RH = 50\%$  (relative Luftfeuchte)
- Zementtyp N

Der betrachtete Zeitpunkt wird auf 78 Tage ( $t = 28 + 50$ ) festgelegt, da die gemessene Verformung nach einer Belastungsdauer von 50 Tagen für den Vergleich herangezogen wird.

Es ist ausdrücklich zu erwähnen, dass das Belastungsalter und insbesondere der Beginn der Austrocknung so günstig wie möglich gewählt wurden. Ein früheres Belastungsalter und ein früherer Austrocknungsbeginn führen zu größeren Durchbiegungen.

**Tabelle 4.20: Kennwerte des Balkens (C25/30) nach DIN 1045-1 [18] und DIN EN 1992-1-1 [19]**

Kennwert	DIN 1045-1	DIN EN 1992-1-1
$E_{cm}$	26.700 N/mm <sup>2</sup>	31.000 N/mm <sup>2</sup>
$f_{ctm}$	2,6 N/mm <sup>2</sup>	2,6 N/mm <sup>2</sup>
$\varepsilon_{cs}(78\text{ d}, 28\text{ d})$	-0,388 %	-0,419 %
$\varphi(78\text{ d}, 28\text{ d})$	1,856	1,802

Die für die Verformungsberechnung des Balkens angesetzten Kennwerte gemäß DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1 sind in Tabelle 4.20 aufgeführt.

**Tabelle 4.21: Durchbiegungswerte in Feldmitte mit verschiedenen Berechnungsansätzen**

Verfahren	Nummer des Verfahrens	Verformung in Feldmitte mit Kennwerten aus DIN 1045-1 $w_m$ [mm]	Verformung in Feldmitte mit Kennwerten aus DIN EN 1992-1-1 $w_m$ [mm]
Integration der $M-\kappa$ -Linie über Zugstab analogie	1	8,84	8,04
Vereinfachte Integration der $M-\kappa$ -Linie über Verteilungsbeiwert	2	8,26	7,51
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 (mb AEC)	3	9,66	8,97
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 mit $\zeta_{min} = 0,5$ (mb AEC)	4	13,53	12,92
Vereinfacht über abschnittsweise konstante Biegesteifigkeiten (Verteilungsbeiwert aus DIN EN 1992-1-1)	5	6,74	6,03
Vereinfacht über konstante Biegesteifigkeit (Verteilungsbeiwert aus DIN EN 1992-1-1)	6	15,14	14,56
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 mit Berücksichtigung der Eigenspannungen aus Schwinden (Dlubal)	7	16,05	15,81

Die berechneten Durchbiegungen in Feldmitte können aus Tabelle 4.21 entnommen werden. Der Vergleich mit den Messwerten ist in Abbildung 4.49 dargestellt. Dabei repräsentieren die horizontalen Linien die gemessenen Verformungen, wobei der Mittelwert dieser Messwerte durch eine durchgezogene Linie dargestellt wird. Die Säulen im Diagramm zeigen die Verformungen, die mit verschiedenen Berechnungsansätzen ermittelt wurden – jeweils unter Verwendung der Kennwerte aus DIN EN 1992-1-1 und DIN 1045-1.

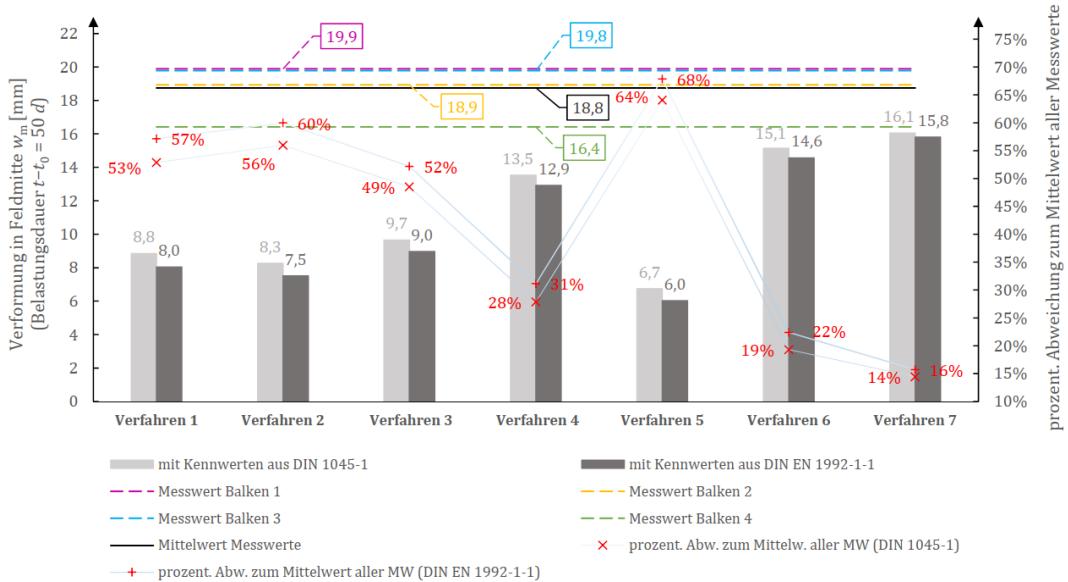


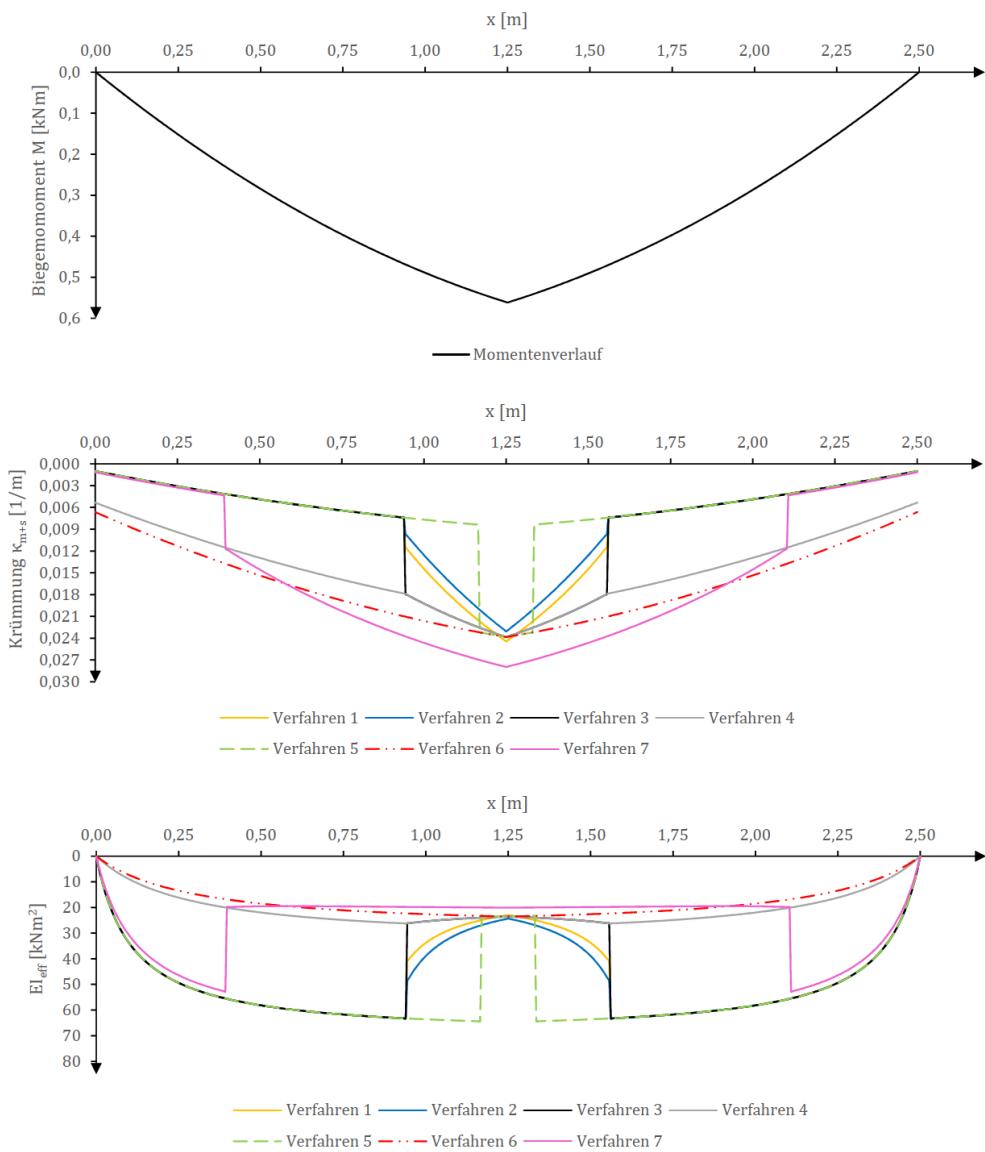
Abbildung 4.49: Gegenüberstellung der berechneten Durchbiegungen mit den Messwerten

Die Ergebnisse verdeutlichen zunächst, dass die Unterschiede in den Normkennwerten keinen wesentlichen Einfluss auf die Verformung haben, da die Verformungen in der betrachteten Größenordnung nur geringe Abweichungen aufweisen. Dies liegt vor allem daran, dass die Zugfestigkeit – die für die Verformungsberechnung aufgrund der Rissbildung entscheidend ist – bei beiden Normen identisch ist. Zudem ist der Unterschied des Schwindbeiwerts im betrachteten Zeitraum gering, wobei dieser Unterschied im Endzustand ( $t = \infty$ ) deutlich größer.

Im Rahmen dieses Kapitels liegt der Fokus jedoch auf dem Vergleich mit den Messwerten. Alle Verfahren zeigen ziemlich große Abweichungen zu den Messwerten, mit Ausnahme des Verfahrens 4, 6 und vor allem 7, die den Messwerten am nächsten kommen.

Verfahren 1 und 2 resultieren, wie erwartet, in fast identischen Verformungen, da Verfahren 2 eine vereinfachte Berechnungsvariante von Verfahren 1 ist (wie bereits in Kapitel 3.2.3 erläutert).

Verfahren 3 weist etwas größere Verformungen auf als Verfahren 1 und 2. Der Grund hierfür kann aus Abbildung 4.50 anhand des Krümmungs- bzw. Biegesteifigkeitsverlaufes entnommen werden. Es ist zu erkennen, dass der Balken mit Verfahren 1-3 in weiten Bereichen ungerissen bleibt. Mit Verfahren 1 und 2 wird die Rissbildungsphase berücksichtigt, während nach DIN EN 1992-1-1 (Verfahren 3) die Krümmung und damit auch die effektive Biegesteifigkeit beim Erreichen des Rissmomentes mit einem Sprung gekennzeichnet ist. Die Folge daraus ist eine größere Verformung in Feldmitte.



**Abbildung 4.50: Momentenlinie, Verlauf der Krümmung und der effektiven Biegesteifigkeiten des Balkens für Verfahren 1-7 (berechnet mit Normkennwerten aus DIN 1045-1)**

Die Verformungsberechnung unter Ansatz eines Mindestwertes für den Verteilungsbeiwert (Verfahren 4) weist eine Abweichung von etwa 30 % gegenüber dem Mittelwert der Messwerte auf. Trotz der Unterstellung, dass der Balken in jedem Bereich mindestens zur Hälfte gerissen ist, wird dennoch nicht einmal der kleinste Messwert erreicht.

Die Verformung aus Verfahren 5 weicht am stärksten von den Messwerten ab, was auf die festgelegte Abschnittsgrenze zwischen ungerissenem und gerissenem Bereich (ermittelt für  $1,15 \cdot M_{cr}$ ) zurückzuführen ist. Die Bestimmung der Abschnittsgrenze für  $1,0 \cdot M_{cr}$  wäre in diesem Fall sinnvoller gewesen.

Das Ergebnis aus der Verformungsberechnung unter der Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit (Verfahren 6) zeigt eine Abweichung von etwa 20 % zum Mittelwert der Messwerte auf. Das Ergebnis kommt jedoch dem kleinsten Messwert (Balken 4) nahe.

Die Verformungsberechnung mit Berücksichtigung der Eigenspannungen (Verfahren 7, entspricht dem Ansatz in RFEM 5) weicht etwa 15 % vom Mittelwert der Messwerte ab und ist nahezu mit dem kleinsten gemessenen Durchbiegungswert identisch. Der gerissene Bereich ist im Vergleich zu den anderen Verfahren bedingt durch die Beachtung der Eigenspannungen weitaus größer (vgl. Abbildung 4.50).

Das Ergebnis aus der vereinfachten Verformungsberechnung durch Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse (siehe Kapitel 3.4) ist in Tabelle 4.21 und in Abbildung 4.49 nicht dargestellt. Mit dem Elastizitätsmodul nach DIN EN 1992-1-1 ergibt sich eine elastische Verformung von etwa 1,4 mm. Aus einer pauschalen Erhöhung dieses Wertes mit einem Faktor von 4,0 resultiert gerade mal ein Verformungsergebnis von 5,6 mm. Dies würde eine Abweichung von über 70 % zum Mittelwert der Messwerte bedeuten.

### Balkenverformung in Feldmitte mit Laborkennwerten

Für die nachfolgende Berechnung wird der mittlere Elastizitätsmodul aus der ersten Prüfung gemäß Gleichung (4.35) herangezogen, da die Balken bereits zu diesem Zeitpunkt belastet wurden.

Das wirksame Belastungsalter ist aus Tabelle 4.4 bekannt, wodurch die Kriechzahl „genau“ bestimmt werden kann. Die Kriechzahl wird dabei nach den Vorgaben der DIN EN 1992-1-1 ermittelt.

Als Austrocknungsbeginn wird der Zeitpunkt festgelegt, zu dem die Folie entfernt und die Balken ausgeschaltet wurden, was dem Zeitpunkt des Transports zur Hochschule entspricht. Das Austrocknen bzw. das Trocknungsschwinden wurde nämlich durch die vorherrschenden hohen relativen Luftfeuchten sowie durch das Belassen der Balken in der Schalung inkl. einer Folienabdeckung während des Lagerungszeitraums verhindert bzw. stark verzögert. Die Schwinddehnung wird aufgrund des Fehlers in DIN EN 1992-1-1 (siehe dazu Kapitel 2.2.5) gemäß DIN 1045-1 ermittelt. Das Ausschalen fand einen Tag vor dem Belastungsbeginn statt.

Die Bestimmung des Kriech- und Schwindbeiwerts erfolgt mit:

- $t_0 = 18$  Tage (wirksames Belastungsalter)
- $t = 18 + 50 = 78$  Tage (Betrachtungszeitpunkt für Kriechen)
- $t_s = 34$  Tage (Austrocknungsbeginn, Ausschalzeitpunkt)
- $t_{cs} = 34 + 1 + 50 = 85$  Tage (Betrachtungszeitpunkt für Schwinden)
- $RH = 50\%$  (relative Luftfeuchte)
- Zementtyp N

Die Zugfestigkeit des Betons wurde im Rahmen der experimentellen Untersuchungen nicht geprüft. Das wirksame Betonalter beträgt jedoch etwa 18 Tage und liegt damit unter den 28 Tagen, auf die sich die in der Norm angegebene mittlere Zugfestigkeit bezieht.

Da die Druckfestigkeiten der Probekörper zum Belastungszeitpunkt vorliegen (siehe Abbildung 4.18), wird unter Verwendung des Mittelwertes der geprüften Zylinderdruckfestigkeiten die mittlere Betonzugfestigkeit in den Balken mittels Gleichung (2.16) abgeschätzt:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 20,8^{2/3} = 2,27 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

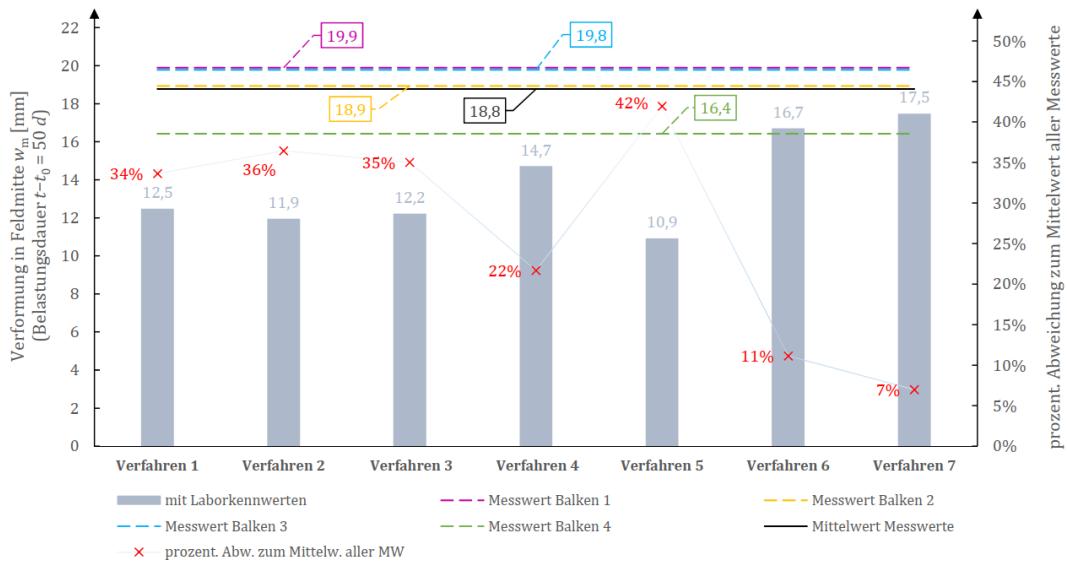
**Tabelle 4.22: „genaue“ Kennwerte für den Balken**

$E_{cm}$	26.800 N/mm <sup>2</sup>
$f_{ctm}$	2,27 N/mm <sup>2</sup>
$\varepsilon_{cs}(85 d, 34 d)$	-0,391 %
$\varphi(68 d, 18 d)$	1,960

Die berechneten Durchbiegungen in Feldmitte, die auf den Kennwerten aus Tabelle 4.22 basieren, sind in Tabelle 4.23 aufgeführt. Der Vergleich dieser berechneten Werte mit den tatsächlichen Messwerten ist in Abbildung 4.49 dargestellt.

**Tabelle 4.23: Durchbiegungswerte in Feldmitte mit verschiedenen Berechnungsansätzen unter Verwendung von Laborkennwerten**

Verfahren	Nummer	Verformung in Feldmitte mit Laborkennwerten $w_m$ [mm]
Integration der $M-\kappa$ -Linie über Zugstabanalogie	1	12,45
Vereinfachte Integration der $M-\kappa$ -Linie über Verteilungsbeiwert	2	11,92
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 (mb AEC)	3	12,19
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 mit $\zeta_{min} = 0,5$ (mb AEC)	4	14,69
Vereinfacht über abschnittsweise konstante Biegesteifigkeiten (Verteilungsbeiwert aus DIN EN 1992-1-1)	5	10,89
Vereinfacht über konstante Biegesteifigkeit (Verteilungsbeiwert aus DIN EN 1992-1-1)	6	16,67
Integration der $M-\kappa$ -Linie nach DIN EN 1992-1-1 mit Berücksichtigung der Eigenspannungen aus Schwinden (Dlubal)	7	17,45



**Abbildung 4.51: Vergleich der Messwerte mit den berechneten Verformungen unter Verwendung von Laborkennwerten**

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verwendung von Laborkennwerten sowie realistischeren Kriech- und Schwindparametern zu Ergebnissen führt, die näher an den Messwerten liegen. Mit Verfahren 7 beträgt die Abweichung zum Mittelwert gerade mal 7 % und stellt für die Verhältnisse im Stahlbetonbau ein ausreichend zufriedenstellendes Ergebnis dar.



## 5 Ableitung einer Empfehlung für die Baupraxis

Der Vergleich zwischen den berechneten und tatsächlich gemessenen Verformungen der Balken zeigt, dass die Verformungsberechnung nach DIN EN 1992-1-1 unter Berücksichtigung der Eigenspannungen (Verfahren in RFEM 5) das beste Ergebnis liefert. Unter Verwendung von Laborkennwerten liegt die berechnete Verformung zudem ziemlich nahe am gemessenen Mittelwert.

Daraus lässt sich schließen, dass die Verformungsberechnung nach DIN EN 1992-1-1 **unter Berücksichtigung der Eigenspannungen infolge Schwinden** durchgeführt werden sollte.

Es ist zu beachten, dass im Rahmen des Bauteilversuchs die genau Belastungshöhe bekannt war. Die gesamte Belastung (Eigengewicht und Punktlast) wurde als ständige Last erfasst. In der Baupraxis ist jedoch die genaue Belastungshöhe – insbesondere der genaue Nutzlastanteil – nicht bekannt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde verdeutlicht, dass die Rissbildung bzw. der gerissene Bereich im Bauteil wesentlichen Einfluss auf die Größe der Verformung hat. Da dem Tragwerksplaner die genaue Belastungshöhe nicht bekannt ist, jedoch die Belastungsgeschichte beachtet werden sollte, wird für die Baupraxis bei der Verformungsberechnung (mit Berücksichtigung der Eigenspannungen) unter der quasi-ständigen Kombination empfohlen, den gerissenen Bereich und damit den Verteilungsbeiwert unter der seltenen Einwirkungskombination zu berechnen.

Verbleibt das Bauteil mit dieser Berechnungsvariante dennoch im ungerissenen Bereich bzw. unterscheidet sich das Ergebnis nur wenig von der linear-elastischen Verformung, wird aufgrund der starken Streuung der Zugfestigkeit empfohlen, einen Mindestwert für den Verteilungsbeiwert von  $\zeta = 0,5$  und somit das Bauteil auf der sicheren Seite liegend in jedem Bereich zur Hälfte als gerissen anzunehmen.

Für die Ermittlung der Kriechzahl wird zudem empfohlen, das Belastungsalter möglichst konservativ (z. B.  $t_0 = 20\text{ d}$  statt  $t_0 = 28\text{ d}$ ) anzunehmen.

Für die Schwinddehnung im Endzustand spielt es keine Rolle, ob das Bauteil z. B. bereits nach drei Tagen oder erst nach 28 Tagen austrocknet, da die Differenz zwischen dem betrachteten Zeitpunkt ( $t = \infty$ ) und dem Austrocknungsbeginn ( $t_s = 3\text{ d}$  oder  $t_s = 28\text{ d}$ ) „identisch“ bleibt. Der Schwindbeiwert sollte jedoch aufgrund des in DIN EN 1992-1-1 enthaltenen Fehlers – der zu einer Unterschätzung im Endzustand führt – nach DIN 1045-1 bestimmt werden.



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### Zusammenfassung

In dieser Masterarbeit wurden verschiedene Ansätze zur Begrenzung der Verformungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit analysiert und verglichen. Neben vereinfachten Verfahren, wie der Nachweis über die Biegeschlankheit oder die Faktorisierung der linear-elastischen Berechnungsergebnisse, wurden zudem direkte Verformungsberechnungen über die numerische Integration der Momenten-Krümmungs-Linie behandelt. Ein besonderer Schwerpunkt lag auf der Untersuchung der direkten Verformungsberechnungen sowie der in FE-Software implementierten Berechnungsansätze, wobei Softwareprodukte wie mb AEC und Dlubal zum Einsatz kamen. Das Ziel bestand darin, die Unterschiede in den Berechnungsergebnissen zu identifizieren und die Genauigkeit dieser Verfahren zu bewerten.

Darüber hinaus zeigte diese Arbeit, dass die normativen Regelungen hinsichtlich des Elastizitätsmoduls und des Schwindbeiwertes erhebliche Unterschiede aufweisen. Die Hintergründe dazu wurden detailliert erläutert, um ein tieferes Verständnis für die unterschiedlichen normativen Vorgaben und deren Auswirkungen auf die Verformungen zu vermitteln.

Im experimentellen Teil der Arbeit wurden Versuche an Stahlbetonbalken durchgeführt, wobei deren Herstellung unter praxisnahen Bedingungen erfolgte. Die Verformungen im Laufe der Zeit wurden messtechnisch erfasst und mit den theoretischen Berechnungsergebnissen verglichen. Ein Berechnungsverfahren zeigte hierbei eine besonders gute Übereinstimmung mit den Messwerten, während andere Verfahren signifikante Abweichungen aufwiesen. Basierend auf diesen Erkenntnissen wurde zur Verbesserung der Verformungsprognose eine Empfehlung für die Baupraxis formuliert.

## Ausblick

Ausblickend kann diese Arbeit als Grundlage für weitere Forschungen im Bereich der Verformungsprognose von Stahlbetonbauteilen dienen. Die in Kapitel 3.2 aufgeführten Ansätze zur Verformungsberechnung – sowohl die Integration der Momenten-Krümmungs-Beziehung als auch die daraus abgeleiteten vereinfachten Verfahren – könnten angepasst werden, indem die Eigenspannungen infolge des Schwindens in die Berechnungen einbezogen werden.

Für das in der Praxis häufig angewandte vereinfachte Verfahren könnten anstelle eines pauschalen Faktors lastabhängige Faktoren für einfache/übliche Systeme und Belastungen abgeleitet werden – beispielsweise in Abhängigkeit vom Verhältnis der mittleren Zugfestigkeit zur einwirkenden Spannung im Zustand I. Dies könnte durch eine systematische Anwendung von FE-Berechnungen unter Nutzung des analytischen Verfahrens in RFEM als Referenz erfolgen.

Weiterführende experimentelle Untersuchungen an variierenden Systemen, Querschnitten und unter unterschiedlichen Belastungen könnten dazu beitragen, die Genauigkeit und Zuverlässigkeit des empfohlenen Verfahrens zu überprüfen. Dabei wäre die labortechnische Bestimmung der Betonzugfestigkeit sinnvoll, da diese einen wesentlichen Einfluss auf die Verformung hat.

Darüber hinaus würden Verformungsmessungen an realen Bauprojekten wertvolle Erkenntnisse liefern, da in solchen Fällen die genaue Belastungshöhe in der Regel unbekannt ist. Solche Messungen könnten aufzeigen, ob der in dieser Arbeit empfohlene Ansatz die tatsächlichen Verformungen zuverlässig abdeckt oder eher zur Über- oder Unterschätzung neigt. Allerdings sind solche Messungen aufgrund der Komplexität und praktischen Herausforderungen anspruchsvoller als kontrollierte Laborexperimente.

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] O. Wolmsdorff, Stahlbetonbau, Bemessung und Konstruktion, Teil 1, 9. Aufl., Köln: Werner Verlag, 2008.
- [2] DAFStb-Heft 600, Erläuterungen zu DIN EN 1992-1-1 und DIN EN 1992-1-1/NA (Eurocode 2), 1. Aufl., Berlin: Beuth Verlag, 2012.
- [3] F. Fingerloos, J. Hegger und K. Zilch, EUROCODE 2 für Deutschland, 1. Aufl., Berlin: Beuth Verlag, Ernst & Sohn Verlag, 2012.
- [4] DAFStb-Heft 525, Erläuterungen zu DIN 1045-1, 1. Aufl., Berlin: Beuth Verlag, 2003.
- [5] R. Avak, Stahlbetonbau in Beispielen, 4. Aufl., Köln: Werner Verlag, 2004.
- [6] K. Zilch und G. Zehetmaier, Bemessung im konstruktiven Betonbau, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [7] D. Gross, W. Hauger, S. Jörg und W. A. Wall, Technische Mechanik 2, 14. Aufl., Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2021.
- [8] G. König und N. V. Tue, Grundlagen des Stahlbetonbaus, 1. Aufl., Stuttgart/Leipzig: Teubner, 1998.
- [9] Verein Deutscher Zementwerke e.V., Hrsg., Zement-Taschenbuch, 51. Aufl., Düsseldorf: Bau+Technik GmbH, 2008.
- [10] Betontechnische Daten, Heidelberg: Heidelberg Materials, 2022.
- [11] R. Avak, M. Aldejohann und R. Conchon, Stahlbetonbau in Beispielen Teil 1, 7. Aufl., Köln: Bundesanzeiger Verlag GmbH, 2016.
- [12] K. Zilch, C. J. Diederichs, R. Katzenbach und K. J. Beckmann, Konstruktiver Ingenieurbau und Hochbau, 1. Aufl., Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
- [13] E. Grasser, Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei

- einachsigen Spannungszuständen, Technische Universität München, Dissertation, 1968.
- [14] M. Sargin, Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections, Ontario : University of Waterloo, 1971.
- [15] K. Bergmeister, F. Fingerloos und J. D. Wörner, Beton Kalender 2016, Berlin: Ernst & Sohn, 2016.
- [16] S. Röhling , H. Eifert und R. Kaden, Betonbau, Berlin: Verlag Bauwesen, 2000.
- [17] CEB/FIB, Model Code 1990, Lausanne: Comité Euro-International du Béton, 1993.
- [18] DIN 1045-1, Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 1: Bemessung und Konstruktion, 2008.
- [19] DIN EN 1992-1-1:2011-01, Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 +AC:2010.
- [20] H. S. Müller, F. A. Urrea und V. Kvitsel, „Modelle zur Vorhersage des Schwindens und Kriechens von Beton - Teil 1: Analyse des Schwindmodells in DIN EN 1992-1-1:2011 und neuer Ansatz im Eurocode 2 prEN 1992-1-1:2020,“ *Beton und Stahlbetonbau*, Bd. 116, pp. 2-18, 2021.
- [21] H. S. Müller, F. A. Urrea und V. Kvitsel, „Modelle zur Vorhersage des Schwindens und Kriechens von Beton - Teil 2a: Kriechen - Grundlagen und Analyse des Kriechmodells in DIN EN 1992-1-1:2011,“ *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 116, pp. 660-676, 2021.
- [22] H. S. Müller und V. Kvitsel, „Kriechen und Schwinden von Beton - Grundlagen der neuen DIN 1045 und Ansätze für die Praxis,“ *Beton und Stahlbetonbau*, Bd. 97, pp. 8-19, 2002.
- [23] A. Goris, Stahlbetonbau-Praxis nach Eurocode 2, 5. Aufl., Bd. 1, Berlin, Wien, Zürich: Beuth Verlag GmbH, 2013.

- [24] DIN 488-1, Betonstahl - Teil 1: Stahlsorten, Eigenschaften, Kennzeichnung, 2009.
- [25] DIN EN 1992-1-1/NA, Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, 2011.
- [26] P. Rao, Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte (DafStb-Heft 177), Berlin: Ernst & Sohn, 1966.
- [27] H. Mayer und H. Rüsch, Bauschäden als Folge der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 193, Berlin: Ernst und Sohn, 1967.
- [28] K. Zilch, Massivbau in ganzer Breite: Festschrift zum 60. Geburtstag von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Konrad Zilch, Förderverein Massivbau der TU München e.V., Hrsg., Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [29] K. Zilch und U. Donaubauer, Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen. In: DAfStb-Heft 533, Berlin: Beuth Verlag, 2006.
- [30] W. Krüger und O. Mertzsch, Zur Verformungsberechnung von überwiegend auf Biegung beanspruchten bewehrten Betonquerschnitten. In: Beton- und Stahlbetonbau 97 (2002), Heft 11, S. 584-589.
- [31] W. Krüger und O. Mertzsch, Zum Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonquerschnitte im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. In: DAfStb-Heft 533, Berlin: Beuth Verlag, 2006.
- [32] W. Jeromin, Verformungsanalysen von ein- und zweiachsig gespannten Mehrfeldplatten bei verschiedenen Lagerungsbedingungen. Dissertation, Technische Universität München, 2014.

- [33] W. Jeromin, Mindestnutzhöhen von Stahlbetonplatten für l/250 und l/500. In: Beton- und Stahlbetonbau 110 (2015), Heft 1, S. 59-64.
- [34] A. Fischer, „Neuer Nachweis der Biegeschlankheit für Platten,“ *Beton- und Stahlbetonbau*, Bd. 113, pp. 2-12, 2018.
- [35] Eurocode 2 - Commentary, Ed.: The European Concrete Platform ASBL, June 2008.
- [36] F. Prietz und U. Richtsteig, „Vereinfachung der Regeln zur Beschränkung der Verformungen nach EC2 - Neuvorschlag für Decken des üblichen Hochbaus,“ *Beton- und Stahlbetonbau, Heft 4*, pp. 275-280, 2015.
- [37] DafStb-Heft 630, Bemessung nach DIN EN 1992 in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit, Berlin: Beuth Verlag, 2018.
- [38] P. U. Schmitz und A. Goris, Bemessungstafeln nach Eurocode 2, 2. Aufl., Düsseldorf: Werner Verlag, 2013.
- [39] H. Mayer, Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen (DAfStb-Heft 194), Berlin: Ernst & Sohn, 1967.
- [40] E. Grasser und G. Thielen, Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken nach DIN 1045 Ausgabe Juli 1988, 3. Hrsg., Berlin: Ernst & Sohn, 1991.
- [41] W. Krüger und O. Mertzsch, „Beitrag zur Verformungsberechnung von Stahlbetonbauteilen,“ *Beton- und Stahlbetonbau 93, Heft 10/11*, pp. 300-303, 330-336, 1998.
- [42] DafStb-Heft 425, Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2 Teil 1 (DIN V ENV 1992 Teil 1-1, Ausgabe 06.92), Berlin, Köln: Beuth Verlag, 1992.
- [43] U. Donaubauer, Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen. Dissertation, Technische Universität München, 2002.

- [44] K. Zilch und C. Reitmayer, Zur Verformungsberechnung von Betontragwerken nach Eurocode 2 mit Hilfsmitteln. In Bauingenieur, 87 (2012), Heft 6.
- [45] A. Goris, Hrsg., Schneider Bautabellen für Ingenieure, 20. Aufl., Werner Verlag, 2012.
- [46] S. Hohenstern, „Belastungsgeschichte beim Verformungsnachweis im Zustand II,“ *mb-news 3*, pp. 22-25, 2019.
- [47] H. Werkle, Finite Elemente in der Baustatik, 4. Aufl., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2021.
- [48] H.-U. Litzner, Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 - Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227, Beton-Kalender 1996, Teil 1, Berlin: Ernst & Sohn.
- [49] Dlubal Software GmbH, 29. Mai 2019. [Online]. Available: <https://www.dlubal.com/de/support-und-schulungen/support/knowledge-base/001574>. [Zugriff am 24. August 2024].
- [50] Dlubal Software GmbH, 23. Juni 2016. [Online]. Available: <https://www.dlubal.com/de/support-und-schulungen/support/produkt-features/000131>. [Zugriff am 24. August 2024].
- [51] Handbuch RF-BETON Flächen, Tiefenbach: Dlubal Software , 2018.
- [52] H. Westphal und F. Zahn, „Verformungsberechnungen von Stahlbetonbauteilen im gerissenen Zustand,“ *Beton- und Stahlbetonbau, Heft 5*, Bd. 113, pp. 330-338, 2018.
- [53] Zement-Merkblatt Betontechnik B6: Transportbeton - Festlegung, Bestellung, Lieferung, Abnahme, Düsseldorf: InformationsZentrum Beton GmbH, 2021.
- [54] DIN EN 12390-2, Prüfung von Festbeton - Teil 2: Herstellung und Lagerung von Probekörpern für Festigkeitsprüfungen, 2019.
- [55] J. Heibl, Beton-Kalender 2001, Berlin: Ernst & Sohn, 2001.

- [56] „WetterKontor,“ [Online]. Available: <https://www.wetterkontor.de/de/wetter/deutschland/rueckblick.asp?id=L886&datum0=06.12.2023&datum1=09.01.2024&jr=2024&mo=5&datum=09.01.2024&t=6&part=2>. [Zugriff am 27. Mai 2024].
- [57] „wetterzentrale,“ [Online]. Available: [https://www.wetterzentrale.de/weatherdata\\_de.php?station=917&jaar=2024&maand=01&dag=09](https://www.wetterzentrale.de/weatherdata_de.php?station=917&jaar=2024&maand=01&dag=09). [Zugriff am 1. Juni 2024].
- [58] DIN EN 206, Beton - Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität, 2021.
- [59] DIN EN 13791, Bewertung der Druckfestigkeit von Beton in Bauwerken und Bauwerksteilen, 2019.
- [60] DIN 12504-1, Prüfung von Beton in Bauwerken - Teil 1: Bohrkernproben - Herstellung , Untersuchung und Prüfung der Druckfestigkeit, 2021.
- [61] DIN EN 13791/A20, Bewertung der Druckfestigkeit von Beton in Bauwerken und in Bauwerksteilen, 2022.
- [62] DIN EN 12390-13, Prüfung von Festbeton - Teil 13: Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Druckbelastung (Sekantenmodul), 2021.